2.1- Transformée directe de Laplace

L'analyse temporelle des circuits linéaires en régime transitoire nécessite la résolution d'équations différentielles. Pour cela, nous allons introduire un outil mathématique puissant, la transformation de Laplace.

Cette transformation permet d'associer, à toute fonction f(t), une fonction F(p) d'une variable complexe **p=σ+jω**. Elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques. Cette propriété facilite la résolution des équations différentielles.

2.1.1 Définition de la transformation de Laplace

Considérant une fonction réelle d'une variable réelle s(t) telle que s(t)=0 pour t<0, on définit sa transformée de Laplace L(s) comme la fonction S de la variable complexe p telle que :

$$\boxed{F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt \qquad \text{pour } t \geq 0}$$

Avec :

f(t) = 0 pour t < 0

p : complexe indépendant du temps

F(p) = L {f(t)} : transformée de Laplace ou image de f(t)

f(t) : originale ou fonction objet de F(p).

2.1.1.a - Exemple 1

La figure 2–1 représente la fonction échelon unitaire u(t) ou Heaviside :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

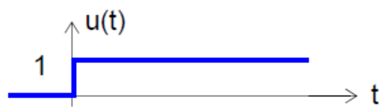

Fig. 2–1 : Fonction échelon unitaire

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow \qquad U(p) = \frac{1}{p}$$

2.1.1.b - Exemple 2

Soit à calculer L {f ' (t)} connaissant L {f(t)}.

On a : $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$u = f(t)$ $\quad\quad dv = e^{-pt}\,dt$

$du = f'(t)dt$ $\quad\quad v = \dfrac{e^{-pt}}{-p}$ $\quad\quad$ Or : $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

$$\Rightarrow \quad F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \left[f(t)\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt$$

$$\Rightarrow \quad F(p) = \frac{f(0)}{p} + \frac{1}{p}\,\mathcal{L}\{f'(t)\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{f'\,t)\} = p\,F(p) - f(0)$$

Si la condition initiale est nulle ($f(0) = 0$), alors :

$L\{f'(t)\}=pF(p)$

De même, si toutes les conditions initiales sont nulles ($f(0)=f'(0) = f''(0)=......=0$), alors :

$$L\{f^n(t)\} = p^n F(p)$$

Dans ce cas là, l'équation différentielle (pour un système linéaire) liant l'entrée e(t) à la sortie s(t),

$$a_n \frac{d}{dt^n}^n s(t) + ... + a_1 \frac{d}{dt} s(t) + a_0\, s(t) = b_k \frac{d}{dt^k}^k e(t) + ... + b_1 \frac{d}{dt} e(t) + b_0\, e(t)$$

s'écrit, en utilisant la transformée de Laplace,

$$a_n p^n\, S(p) + ... + a_1 p\, S(p) + a_0\, S(p) = b_k p^k\, E(p) + ... + b_1 p\, E(p) + b_0\, E(p)$$

$$\Rightarrow \quad S(p) = \frac{b_k p^k + ... + b_0}{a_n p^n + ... + a_0} E(p)$$

avec $S(p) = \mathcal{L}\{s(t)\}$

et $E(p) = \mathcal{L}\{e(t)\}$

2.1.2 - Propriétés Usuelles de la transformée de Laplace

2.1.2.a - Linéarité

Si λ_1 et λ_2 sont constants, on a :

$$\boxed{\mathcal{L}\{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\} = \lambda_1\, \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \lambda_2\, \mathcal{L}\{f_2(t)\}}$$

2.1.2.b – Dérivation

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\} = p\,F(p) - f(0)}$$

f(0) représente la valeur de f(t) lorsque t → 0 par valeur positive puisque f(t) n'est pas définie pour t<0.

Exemple :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right\} \qquad \mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right\} = p^2 F(p) - p\,f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3}{dt^3} f(t)\right\} \qquad \mathcal{L}\left\{\frac{d^3}{dt^3} f(t)\right\} = p^3 F(p) - p^2 f(0) - p\,f'(0) - f''(0)$$

2.1.2.c – Intégration

Soit à calculer $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \mathcal{L}\{P(t)\}$, P (t) désignant une primitive de f(t) pour t>0.

On a : $\mathcal{L}\{P(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} P(t)dt$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$$u = P(t) \qquad dv = e^{-pt}\,dt$$

$$du = P'(t)dt \qquad v = \frac{e^{-pt}}{-p} \qquad (uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{P(t)\} = \left[P(t)\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt} P'(t)dt = \frac{P(0)}{p} + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{1}{p}\mathcal{L}\{f(t)\} + \frac{P(0)}{p}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t\int_0^t \cdots \int_0^t f(t)\,dt^n\right\} = \frac{1}{p^n}\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

2.1.2.d - Changement d'échelle

Un changement de l’échelle des temps se traduit par le changement de la variable "***t→kt ou t→k/t*** " dans la fonction f. Soit à calculer alors : L{f(kt)} connaissant L{f(t)}

D'où : $\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$

De même que : $\mathcal{L}\{f(\frac{1}{k}t)\} = k\,F(k\,p)$

2.1.3 - Théorèmes relatifs à la Transformée de Laplace

2.1.3.a - Théorème du retard – Translation

Soit à calculer L {f(t–τ)}, c'est-à-dire la transformée de f(t) quand on fait un changement d'origine des temps (Fig. 2–2).

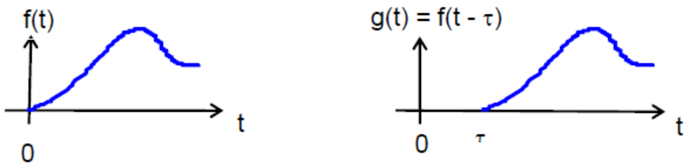

Fig. A–2 : Changement d'origine des temps

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau}\,\mathcal{L}\{f(t)\} \qquad \text{pour } t \geq \tau}$$

On a : $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ pour $t \geq 0$

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$$

$$G(p) = \int_0^\infty e^{-pt} g(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt} f(t-\tau)dt \qquad \text{pour} \quad t \geq \tau$$

Car, par définition : $f(t) = 0$ pour $t < 0$

ou encore : $f(t-\tau) = g(t) = 0$ pour $t < \tau$

Effectuons le changement de variable $x = t - \tau$:

$$G(p) = \int_0^\infty e^{-p(x+\tau)} f(x)dx = e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-px} f(x)dx = e^{-p\tau}\,\mathcal{L}\{f(x)\} = e^{-p\tau}\,F(p)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau}\,\mathcal{L}\{f(t)\} \qquad \text{pour } t \geq \tau$$

2.1.3.c - Théorème de la valeur initiale

Soit à démonter que :

$$\boxed{f(0^+) = \lim_{p\to\infty}\{p\,F(p)\}}$$

On a : $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$

$$\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt = p\,F(p) - f(0^+)$$

quand : $p \to \infty$, $e^{-pt} \to 0$, donc $0 = p\,F(p) - f(0^+)$

$$f(0^+) = \lim_{p\to\infty} \{ p\,F(p) \}$$

2.1.3.d - Théorème de la valeur finale

Soit à démonter que :

$$\boxed{f(\infty) = \lim_{p\to 0} \{ p\,F(p) \}}$$

On a : $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$

$$\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt = p\,F(p) - f(0^+)$$

Si $(p \to 0)$, Alors $(e^{-pt} \to 1)$. d'où $\int_0^\infty f'(t)dt = \lim_{p\to 0} \{ p\,F(p) - f(0^+) \}$

Or : $\int_0^\infty f'(t)dt = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f'(\tau)d\tau = \lim_{t\to\infty} \{ f(t) - f(0^+) \}$

Donc : $\lim_{p\to 0} \{ p\,F(p) - f(0^+) \} = \lim_{t\to\infty} \{ f(t) - f(0^+) \}$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} \{ p\,F(p) \}}$$

2.2- Transformée Inverse de Laplace

On peut exprimer la Transformée inverse, en utilisant les intégrales de Fourrier et de Melin-Fourrier. Si F(p) est la Transformée de Laplace d'une fonction f(t), on a :

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ F(p) \} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt}.F(p).dp \qquad (t \geq 0)}$$

Où c est une constante, appelée abscisse de convergence.

Cette méthode est difficile à utiliser et on préfère généralement :

- ✓ soit recourir aux tables de Transformées de Laplace. Dans ce cas, F(p) est immédiatement reconnaissable dans la table,
- ✓ soit, lorsque la fonction F(p) n'apparaît pas dans la table, décomposer F(p) en fractions partielles et écrire F(p) en termes de fonctions simples de p pour lesquels la Transformée de Laplace est toujours connue.

A noter que cette manière simple de trouver la Transformée inverse est basée sur le fait qu'il existe une correspondance unique entre la fonction temporelle et sa Transformée inverse de Laplace du fait de la continuité de la fonction temporelle.

Soit $F(p) = L\{f(t)\}$

Si $F(p)$ peut être décomposée en termes distincts : $F(p) = F_1(p) + F_2(p) + ... + F_n(p)$

et Si les transformées inverses sont disponibles, alors :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(p)\} + ... + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(p)\} \\ &= f_1(t) + f_2(t) + ... + f_n(t)\end{aligned}}$$

2.2.1- Si F(p) ne contient que des pôles distincts

F(p) peut, alors, être décomposé en une somme de fractions partielles :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{a_1}{p+p_1} + \frac{a_2}{p+p_2} + ... + \frac{a_n}{p+p_n}$$

$$a_i = \left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_i)\right]_{p=-p_i} \qquad a_i \text{ : constante appelée " résidu au pôle } p = p_i \text{ "}$$

2.2.1.a - Exemple 1

Trouver la Transformée Inverse de $F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$

$$F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} \qquad \text{2 pôles distincts : } p=-1 \text{ , } p=-2$$

$$F(p) = \frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = \left[\frac{p+3}{(p+1)(p+2)}(p+1)\right]_{p=-1} = 2 \\ a_2 = \left[\frac{p+3}{(p+1)(p+2)}(p+2)\right]_{p=-2} = -1 \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{p+1}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p+2}\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = e^{-t}(2 - e^{-t}) \qquad t \geq 0$$

Remarque : Dans le cas où le degré de B(p) > degré de A(p) dans $F(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ il faut alors diviser le numérateur par dénominateur, ensuite appliquer la méthode des fractions partielles.

2.2.1.b - Exemple 2

Soit : $G(p) = \frac{p^3+5p^2+9p+7}{(p+1)(p+2)}$

En divisant le numérateur par le dénominateur, on obtient :

$$G(p) = p + 2 + \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} = p + 2 + F(p)$$ (voir F(p) dans l'exemple précédent)

$$\Rightarrow \quad G(p) = p.1 + 2.1 + F(p)$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\ G(p)\ \} = \frac{d}{dt}\delta(t) + 2.\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\{\ F(p)\ \} \qquad t \geq 0$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\ G(p)\ \} = \frac{d}{dt}\delta(t) + 2.\delta(t) + e^{-t}(2 - e^{-t}) \qquad t \geq 0$$

avec $\delta(t)$: impulsion unitaire et $\mathcal{L}\{\ \delta(t)\ \} = 1$

2.2.2- Si F(p) contient des pôles complexes conjugués

Soient p_1 et p_2 les 2 pôles complexes conjugués, alors :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\alpha_1 p + \alpha_2}{(p+p_1)(p+p_2)} + \frac{a_3}{p+p_3} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{p+p_n}$$

α_1 et α_2 les résidus aux pôles p_1 et p_2 : $(\alpha_1 p + \alpha_2)_{p=-p_1} = \left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)(p+p_2)\right]_{p=-p_1 \text{ ou } p=-p_2}$

2.2.2.a - Exemple 1

Trouver la transformée inverse de $F(p) = \frac{p+1}{p(p^2+p+1)}$

On a : $p^2 + p + 1 = 0$ pour $p = -0,5 \pm j\ 0,866$

Donc : $$F(p) = \frac{\alpha_1 p + \alpha_2}{(p + 0,5 + j\,0,866)(p + 0,5 - j\,0,866)} + \frac{a}{p}$$

Avec : $$(\alpha_1 p + \alpha_2)_{p=-0,5-j\,0,866} = \left[\frac{p+1}{p}\right]_{p=-0,5-j\,0,866}$$

$$\alpha_1(-0,5 - j\,0,866) + \alpha_2 = \frac{0,5 - j\,0,866}{-0,5 - j\,0,866}$$

$$\alpha_1(0,25 + j\,0,866 - 0,75) + \alpha_2\,(-0,5 - j\,0,866) = 0,5 - j\,0,866$$

En égalant les parties réelles et imaginaires des 2 membres de l'équation précédente, on obtient:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -1$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 = -1 \qquad \text{d'où :} \qquad \alpha_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = 0$$

Déterminons ensuite la valeur de a :

$$a = [F(p).p]_{p=0} = \left[\frac{p+1}{p^2+p+1}\right]_{p=0} = 1$$

Donc F(p) s'écrit :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p} + \frac{-p}{p^2+p+1} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{p}{(p+0,5+j\,0,866)(p+0,5-j\,0,866)} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{p}{(p+0,5)^2+(0,866)^2} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{p+0,5}{(p+0,5)^2+(0,866)^2} + \frac{0,5}{(p+0,5)^2+(0,866)^2} \end{aligned}$$

Ce qui donne pour f(t) (voir table des Transformées de Laplace) :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\ F(p)\ \} = 1 - e^{-0,5t}\cos(\,0,866\,t\,) + \frac{0,5}{0,866}\,e^{-0,5t}\sin(\,0,866\,t) \qquad (t \geq 0)$$

2.2.3 - Si F(p) contient des pôles multiples

Soit p_1 le pôle multiple de F(p), r étant l'indice de multiplicité de ce pôle.

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \qquad\qquad A(p) = (p+p_1)^r(p+p_{r+1})(p+p_{r+2})........(p+p_n)$$

Alors F(p) s'écrit :

$$\boxed{F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_r}{(p+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(p+p_1)^{r-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(p+p_1)} + \frac{a_{r+1}}{p+p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{p+p_{r+2}} + \ldots + \frac{a_n}{p+p_n}}$$

avec : $$a_k = \left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_k)\right]_{p=-p_k} \qquad (k = r+1, r+2, \ldots\ldots, n)$$

et : $$b_r = \frac{1}{0!}\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)^r\right]_{p=-p_1}$$

$$b_{r-1} = \frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{dp}\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)^r\right]\right\}_{p=-p_1}$$

$$\vdots$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{dp^j}\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)^r\right]\right\}_{p=-p_1}$$

$$\vdots$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{d^{\,r-1}}{dp^{r-1}}\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)^r\right]\right\}_{p=-p_1}$$

Remarque : $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+p_1)^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-p_1 t}$$

2.2.3.a - Exemple 1

Trouver la transformée inverse de $F(p) = \frac{p^2+2p+3}{(p+1)^3}$

$$F(p) = \frac{p^2+2p+3}{(p+1)^3} \qquad F(p) = \frac{b_3}{(p+1)^3} + \frac{b_2}{(p+1)^2} + \frac{b_1}{(p+1)}$$

$$b_3 = \left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+1)^3\right]_{p=-1} = \left[p^2+2p+3\right]_{p=-1} = 2$$

$$b_2 = \left\{\frac{d}{dp}\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+1)^3\right]\right\}_{p=-1} = \left\{\frac{d}{dp}(p^2+2p+3)\right\}_{p=-1} = (2p+2)_{p=-1} = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+1)^3\right]\right\}_{p=-1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dp}(2p+2)\right\}_{p=-1} = \frac{1}{2}(2)_{p=-1} = 1$$

Donc : $$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\,F(p)\,\} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(p+1)^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0}{(p+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)}\right] = (t^2+1)\,e^{-t} \qquad (t \geq 0)$$

Table des Principales Transformées de Laplace et leurs propriétés

Table des Transformées de Laplace	
f (t) (t ≥ 0)	**F (p) = $\mathcal{L}$ { f(t) }**
Impulsion unitaire $\delta(t)$	1
Echelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$t.sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t.cos(\omega t)$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$e^{-at}.sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}.cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

(n : entier positif)

Propriétés des Transformées de Laplace	
f (t) (t ≥ 0)	**F (p) = $\mathcal{L}$ { f(t) }**
$f(t)$	$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$
$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$	$\lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} . \frac{d^{(r-n-1)} f(0)}{dt^{(r-n-1)}}$
$\int_0^t \int_0^t ..... \int_0^t f(t).dt^n$ *(avec conditions initiales nulles)*	$\frac{F(p)}{p^n}$
$f(kt)$	$\frac{1}{k}.F\left(\frac{p}{k}\right)$
$f(\frac{t}{k})$	$k.F(kp)$
$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
$f(t-\tau)$ *pour* $(t \geq \tau)$	$e^{-p\tau}.F(p)$
$\int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau)d\tau$	$F_1(p).F_2(p)$
$t.f(t)$	$-\frac{d}{dp}F(p)$

- *f(t) fonction périodique de période T.*
- *$f_1(t)$ fonction définie sur la 1ère période de f(t).*

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}$$

$$f(0^+) = \lim_{p\to\infty} \{pF(p)\} \qquad f(\infty) = \lim_{p\to 0} \{pF(p)\}$$

Si les limites existent

2.3- Mise en équation d'un système - Résolution

2.3.1- Mise en équation

Nous avons dit précédemment que nous nous bornions à l'étude des systèmes linéaires. Donc, les équations rencontrées seront des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Considérons un système quelconque A, le plus général possible, possédant une entrée e(t) et une sortie s(t) (fig. 2–3).

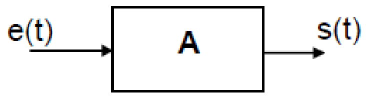

Fig. 2–3 : Représentation d'un système quelconque à 1 entrée et 1 sortie

Si on applique un signal à l'entrée, on recueillera, à la sortie, un signal qui sera liée au signal d'entrée par une équation différentielle de type :

$$\boxed{a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \ldots\ldots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0\, s = b_k \frac{d^k e}{dt^k} + \ldots\ldots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0\, e}$$

- ✓ Les coefficients $\mathbf{a_i}$ et $\mathbf{b_j}$ sont les paramètres du système et ils sont sensés être connus, ce qui est le cas dans la pratique pour la plupart des systèmes courants. Ils représentent diverses constantes de temps et divers coefficients de proportionnalité accessibles à la mesure.
- ✓ La difficulté de la mise en équation réside surtout au niveau de la connaissance du processus lui même. En réalité, l'équation différentielle à laquelle on arrive n'est souvent qu'une approximation qui consiste à négliger des termes d'ordre plus élevé. Cette précision suffit dans la plupart des cas, bien qu'une étude plus poussée soit quelque fois nécessaire.
- ✓ Une fois l'équation du système établie, il faut exprimer la valeur de la sortie en fonction du temps pour connaître les régimes permanents et transitoires. Pour cela, il existe 2 méthodes

2.3.1.a- Méthode Classique :

Consiste à résoudre l'équation différentielle décrivant ce système, c'est–à–dire trouver une réponse forcée et une réponse libre pour le système. Mais cette méthode ne permet pas toujours de trouver une solution et peut amener à une difficulté de résolution dès que l'ordre de l'équation différentielle dépasse 2.

2.3.1.b- Méthode Opérationnelle :

Basée sur le calcul opérationnel ou, essentiellement, sur la transformée de Laplace qui mettra en relation, une fonction de la variable du temps f(t) avec une fonction de la variable complexe F(p) dépendant de la pulsation.

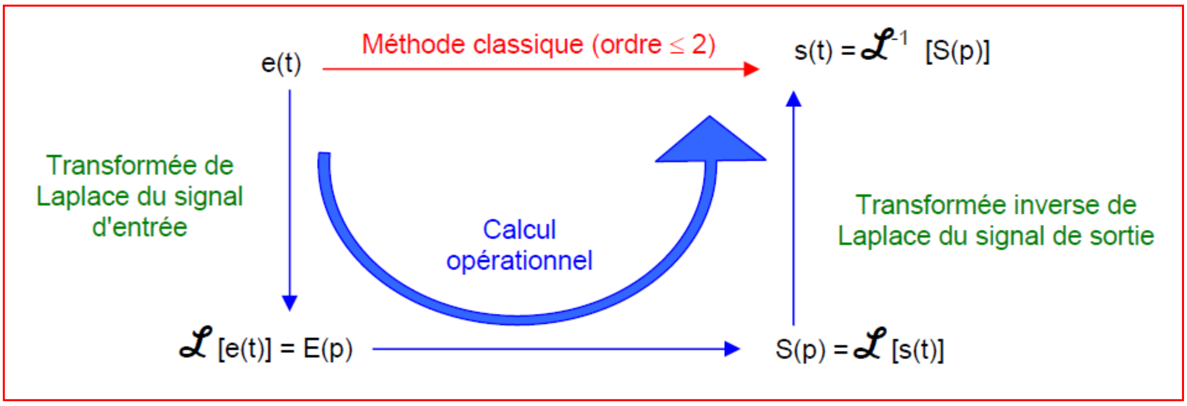

Fig. 2–4 : Détermination de la sortie du système par la méthode classique et par le calcul opérationnel

2.3.2 - Utilisation de la transformée de Laplace

En appelant S(p) et E(p) les transformées de s(t) et de e(t), si on prend la Transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle :

$$\boxed{a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \ldots\ldots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0\, s \quad = \quad b_k \frac{d^k e}{dt^k} + \ldots\ldots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0\, e}$$

On aura :

$$\boxed{a_n\, p^n\, S(p) + \ldots\ldots + a_1\, p\, S(p) + a_0\, S(p) \quad = \quad b_k\, p^k\, E(p) + \ldots\ldots + b_1\, p\, E(p) + b_0\, E(p)}$$

D'où :

$$\boxed{S(p) = \frac{b_k\, p^k + \ldots\ldots + b_1\, p + b_0}{a_n\, p^n + \ldots\ldots + a_1\, p + a_0} \,.\, E(p)}$$

Si l'on connaît l'image E(p) de e(t), il est facile, grâce aux tables de transformées de Laplace, de revenir à l'original de S(p).

D'une manière générale, cette notation n'est valable que si :

- ✓ Le système est linéaire à coefficients constants,
- ✓ Toutes les variables et leurs dérivées sont nulles pour t<0 (le système part du repos absolu),
- ✓ Le système est dissipatif, donc sa réponse tend, plus ou moins, vers un régime permanent indépendant des conditions initiales.