Exercice n°1

Calcul des transformées de Laplace directes :

1.a) f(t) = e^{-at}

$$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}\ f(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}e^{-at}dt = \int_0^\infty e^{-(p+a)t}dt = \left[\frac{e^{-(p+a)t}}{-(p+a)}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow\ F(p) = \frac{1}{p+a}$$

1.b) f(t) = $\cos(\omega t)$ sachant que : $\cos(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

1ère méthode (d'après les tables de transformées de Laplace) :

$$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t)\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} + \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}\right]$$

$$\Rightarrow\ F(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right] \qquad \text{car : } \mathcal{L}\{ e^{-at}\} = \frac{1}{p+a}$$

$$\Rightarrow\ F(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

2ème méthode (à partir de la définition de la transformée de Laplace) :

$$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}\ f(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}\ \cos(\omega t)dt$$

$$\Rightarrow\ F(p) = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-pt}\ e^{jwt}dt + \int_0^\infty e^{-pt}\ e^{-jwt}dt\right] = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-(p-jw)t}dt + \int_0^\infty e^{-(p+jw)t}dt\right]$$

$$\Rightarrow\ F(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right] \qquad \text{car : } \mathcal{L}\{ e^{-at}\} = \frac{1}{p+a}$$

$$\Rightarrow\ F(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

1.c) f(t) = t^n n ≥ 1

$$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}\ f(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}\ t^n dt$$

En utilisant l'intégration par partie, on aura : $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

Avec : u = t^n dv = e^{-pt}dt

du = n. t^{n-1}.dt v = $\dfrac{e^{-pt}}{-p}$

$$\Rightarrow \; F(p) = \mathcal{L}\{\, t^n \,\} = \underbrace{-\frac{1}{p}\left[t^n e^{-pt}\right]_0^{\infty}}_{\substack{Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to\infty \\ (e^{-pt}\ tend\ plus\ vite\ vers\ 0 \\ que\ ne\ tend\ t^n\ vers\ \infty). \\ Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to 0}} + \frac{n}{p}\int_0^{\infty} e^{-pt}\ t^{n-1}dt = \frac{n}{p}\,\mathcal{L}\{\, t^{n-1} \,\}$$

$$\Rightarrow \; F(p) = \mathcal{L}\{\, t^n \,\} = \frac{n}{p}\,\mathcal{L}\{\, t^{n-1} \,\} = \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\,\mathcal{L}\{\, t^{n-2} \,\} = \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\frac{n-2}{p}\,\mathcal{L}\{\, t^{n-3} \,\} = \ldots..$$

$$\Rightarrow \; F(p) = \mathcal{L}\{\, t^n \,\} = \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\frac{n-2}{p}\ldots\ldots\frac{n-(n-1)}{p}\,\mathcal{L}\{\, t^{n-n} \,\} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{p^n}\,\mathcal{L}\{\, 1 \,\}$$

$$\Rightarrow \; F(p) = \mathcal{L}\{\, t^n \,\} = \frac{n!}{p^n}\frac{1}{p}$$ car : $\mathcal{L}\{\, 1 \,\} = \mathcal{L}\{\, u(t) \,\} = \frac{1}{p}$ $\quad u(t)$: échelon unitaire

$$\Rightarrow \; F(p) = \mathcal{L}\{\, t^n \,\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

1.d) $\boxed{f(t) = t^5 e^{2t}}$ sachant que : $\mathcal{L}\{\, e^{-at}\,.\,g(t)\} = G(p+a)$

et : $\mathcal{L}\{\, t^5 \,\} = \frac{5!}{p^6}$ (voir exercice 1.c)

$$F(p) = \mathcal{L}\{\, f(t) \,\} = \frac{5!}{(p-2)^6}$$

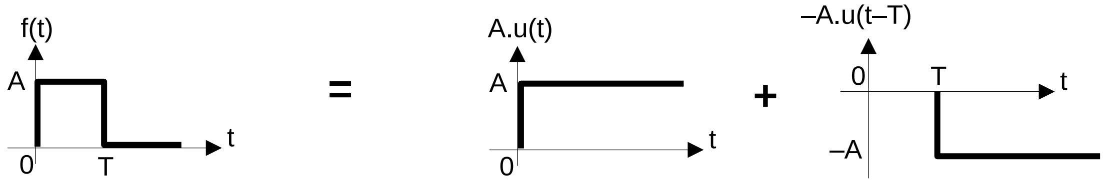
1.e) $\boxed{f(t) = 3(1-e^{-4t})}$

$$F(p) = \mathcal{L}\{\, f(t) \,\} = 3\left[\mathcal{L}\{\, 1 \,\} - \mathcal{L}\{\, e^{-4t} \,\}\right] = 3\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+4}\right]$$

$$\Rightarrow \; F(p) = \frac{12}{p(p+4)}$$

1.f) $\boxed{f(t) = \begin{cases} A & 0 \le t \le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}}$

$f(t)$ est, en fait, la somme algébrique de 2 échelons unitaires : le premier partant de t=0, le second partant de t=T, mais de signe négatif.



$$\Rightarrow \; f(t) = A\left[u(t) - u(t-T)\right]$$

$$\Rightarrow \; F(p) = \mathcal{L}\{\, f(t) \,\} = A\left[\mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-T)\}\right]$$

$$\Rightarrow \; F(p) = A\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-Tp}\right]$$ car : $\mathcal{L}\{\, g(t-T) \,\} = e^{-Tp}\,G(p)$ (pour t ≥ T)

$$\Rightarrow \quad F(p) = A\frac{1-e^{-Tp}}{p}$$

1.g) $\boxed{f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & 0 \le t \le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}}$

Soit : $g(t) = \begin{cases} A & 0 \le t \le T \\ 0 & ailleurs \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{-\alpha t}\,.\,g(t)$

Or : $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p) = A\,\dfrac{1-e^{-Tp}}{p}$ (voir exercice 1.f)

$$\Rightarrow \quad F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\,.\,g(t)\} = G(p+\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad F(p) = A\frac{1-e^{-T(p+\alpha)}}{p+\alpha}$$

1.h) $\boxed{f(t) = e^{-0.5t}u(t-2)}$

$\mathcal{L}\{u(t-2)\} = \dfrac{e^{-2p}}{p}$ car : $\mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp}\,G(p)$ (pour t ≥ T)

$\Rightarrow \quad F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{e^{-2(p+0.5)}}{p+0.5}$ car : $\mathcal{L}\{e^{-at}\,.\,g(t)\} = G(p+a)$

1.i) $\boxed{f(t) = \dfrac{t^2}{2}}$

<u>1ère méthode (d'après les tables de transformées de Laplace) :</u>

$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2!}{p^{2+1}}\right] = \dfrac{1}{p^3}$ car : $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ (voir exercice 1.c)

<u>2ème méthode (à partir de la définition de la transformée de Laplace) :</u>

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}\,f(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}\,\frac{t^2}{2}dt$$

En utilisant l'intégration par partie, on aura : $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

Avec : u = $\dfrac{t^2}{2}$ dv = e^{-pt}dt

du = t .dt v = $\dfrac{e^{-pt}}{-p}$

$$\Rightarrow \quad F(p) = \underbrace{-\frac{1}{2p}\left[t^2e^{-pt}\right]_0^\infty}_{\substack{Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to\infty \\ (e^{-pt}\ tend\ plus\ vite\ vers\ 0 \\ que\ ne\ tend\ t^2\ vers\ \infty). \\ Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to 0}} + \frac{1}{p}\int_0^\infty te^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty te^{-pt}\,dt$$

En intégrant, de nouveau, par partie, on aura : $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

Avec : u = t dv = e^{-pt} dt

du = dt v = $\dfrac{e^{-pt}}{-p}$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{p}\left[\underbrace{-\frac{1}{p}\left[te^{-pt}\right]_0^{\infty}}_{\substack{Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to\infty \\ (e^{-pt}\ tend\ plus\ vite\ vers\ 0 \\ que\ ne\ tend\ t\ vers\ \infty). \\ Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to 0}} + \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-pt}\ dt\right] = \frac{1}{p^2}\int_0^{\infty} e^{-pt}\ dt = \frac{1}{p^3}\left[-e^{-pt}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{p^3}$$

1.j) $\boxed{\text{f(t)} = \sin(2t + \frac{\pi}{4})}$

Rappel :

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j.\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j.\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\omega t) = \dfrac{1}{2j}\left[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right] \\ \cos(\omega t) = \dfrac{1}{2}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right] \end{cases}$$

Or : $\begin{cases} \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = \dfrac{1}{p - j\omega} \\ \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\} = \dfrac{1}{p + j\omega} \end{cases}$ car : $\mathcal{L}\{\ e^{-at}\} = \dfrac{1}{p+a}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \dfrac{1}{2j}\left[\dfrac{1}{p - j\omega} - \dfrac{1}{p + j\omega}\right] \\ \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{p - j\omega} + \dfrac{1}{p + j\omega}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \dfrac{p}{p^2 + \omega^2} \end{cases}$$

$$f(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{4}) = \sin(2t).\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4}).\cos(2t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin(2t) + \cos(2t)\right]$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{\text{f(t)}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{L}\{\sin(2t)\} + \mathcal{L}\{\cos(2t)\}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+4}\right]$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{p+2}{p^2+4}$$

1.k) $\boxed{\text{f(t)} = e^{-0.5t}\sin(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)}$

On a : $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-0.5t}\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{(p+0.5)^2+\omega^2} \qquad \text{car :} \quad \mathcal{L}\{\, e^{-at}.\ g(t)\} = G(p+a)$$

Et : $\cos(\omega t+\varphi) = \cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t+\varphi)\} = \cos(\varphi)\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} - \sin(\varphi)\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t+\varphi)\} = \cos(\varphi)\frac{p}{p^2+\omega^2} - \sin(\varphi)\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{p.\cos(\varphi)-\omega.\sin(\varphi)}{p^2+\omega^2}$$

Donc : $F(p) = \mathcal{L}\{\, f(t)\} = \dfrac{\omega}{(p+0.5)^2+\omega^2} + \dfrac{p.\cos(\varphi)-\omega.\sin(\varphi)}{p^2+\omega^2}$

1.l) $\boxed{\text{f(t) = } t.e^{-at}.\delta(t-1)}$ $\delta(t)$: impulsion de Dirac

$\mathcal{L}\{\, \delta(t)\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\, \delta(t-1)\} = e^{-p.1}.1 = e^{-p}$ car : $\mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp}\, G(p)$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{\, e^{-at}.\delta(t-1)\} = e^{-(p+a)}$ car : $\mathcal{L}\{\, e^{-at}.\ g(t)\} = G(p+a)$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{\, t.e^{-at}.\delta(t-1)\} = e^{-(p+a)}$ car : $\mathcal{L}\{\, t.g(t)\} = -\dfrac{d}{dp}[G(p)]$

1.m) $\boxed{\text{f(t) = } t.u(t-2) + \sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t-3)}$ $u(t)$: échelon unitaire

Soit : $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ Avec : $f_1(t) = t.u(t-2)$ et $f_2(t) = \sin(2\pi t - \dfrac{\pi}{4}).u(t-3)$

$$\mathcal{L}\{\, f(t)\} = \mathcal{L}\{\, f_1(t)\} + \mathcal{L}\{\, f_2(t)\}$$

- Calculons en premier lieu : $\mathcal{L}\{\, f_1(t)\} = \mathcal{L}\{\, t.u(t-2)\}$
  - *<u>1ère méthode :</u>* *utilisation de la propriété* $\mathcal{L}\{\, t.g(t)\} = -\dfrac{d}{dp}[G(p)]$

$\mathcal{L}\{\, u(t)\} = \dfrac{1}{p}$

$\mathcal{L}\{\, u(t-2)\} = \dfrac{1}{p}e^{-2p}$ car : $\mathcal{L}\{\, g(t-T)\} = e^{-Tp}\, G(p)$

$\mathcal{L}\{\, t.u(t-2)\} = -\dfrac{(-2.e^{-2p}).p - 1.e^{-2p}}{p^2}$ car : $\mathcal{L}\{\, t.g(t)\} = -\dfrac{d}{dp}[G(p)]$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\, t.u(t-2)\} = \frac{(1+2p)e^{-2p}}{p^2}$$

  - *<u>2ème méthode :</u>* *utilisation de la propriété* $\mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp}\, G(p)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\, t.u(t-2)\} &= \mathcal{L}\{\, (t-2+2).u(t-2)\} \\ &= \mathcal{L}\{\, (t-2).u(t-2)\} + 2\,.\,\mathcal{L}\{\, u(t-2)\}\end{aligned}$$

Or : $\mathcal{L}\{\, u(t)\} = \dfrac{1}{p} \Rightarrow \mathcal{L}\{\, u(t-2)\} = \dfrac{1}{p}e^{-2p}$ car : $\mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp}\, G(p)$

Et : $\mathcal{L}\{\ t\} = \mathcal{L}\{\ t.u(t)\} = \dfrac{1}{p^2}$ (fonction rampe)

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t-2\} = \mathcal{L}\{(t-2).u(t-2)\} = \frac{1}{p^2}e^{-2p}$$

Donc : $\mathcal{L}\{\ t.u(t-2)\} = \dfrac{1}{p^2}e^{-2p} + 2\dfrac{1}{p}e^{-2p}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\ t.u(t-2)\} = \frac{(1+2p)e^{-2p}}{p^2}$$

- *3^ème^ méthode :* *utilisation de la définition de la transformée de Laplace*

$$\mathcal{L}\{\ t.u(t-2)\} = \int_0^\infty t.u(t-2).e^{-pt}dt$$

$$= \underbrace{\int_0^2 t.u(t-2).e^{-pt}dt}_{=0,\ car\ u(t-2)=0} + \underbrace{\int_2^\infty t.u(t-2).e^{-pt}dt}_{u(t-2)=1} = \int_2^\infty t.e^{-pt}dt$$

En intégrant par partie, on aura : $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

u = t dv = e^{-pt} dt

du = dt v = $\dfrac{e^{-pt}}{-p}$

$$\mathcal{L}\{\ t.u(t-2)\} = \underbrace{-\frac{1}{p}\left[te^{-pt}\right]_2^\infty}_{\substack{Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to\infty \\ (e^{-pt}\ tend\ plus\ vite\ vers\ 0 \\ que\ ne\ tend\ t\ vers\ \infty). \\ Différent\ de\ 0,\ lorsque\ t\to 2}} + \frac{1}{p}\int_2^\infty e^{-pt}\ dt = \frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p}\int_2^\infty e^{-pt}\ dt$$

$$\mathcal{L}\{\ t.u(t-2)\} = \frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p^2}\left[-e^{-pt}\right]_2^\infty = \frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\ t.u(t-2)\} = \frac{(1+2p)e^{-2p}}{p^2}$$

- Calculons en second lieu : $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = \mathcal{L}\{\ \sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t-3)\}$

$$\sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t) = \left[\sin(2\pi t).\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4}).\cos(2\pi t)\right].u(t)$$

$$\sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin(2\pi t) - \cos(2\pi t)\right].u(t)$$

Or : $\begin{cases} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\{\sin(\omega t).u(t)\} = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \mathcal{L}\{\cos(\omega t).u(t)\} = \dfrac{p}{p^2+\omega^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{ \sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{L}\{\sin(2\pi t).u(t)\} - \mathcal{L}\{\cos(2\pi t).u(t)\}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{ \sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2\pi}{p^2 + 4\pi^2} - \frac{p}{p^2 + 4\pi^2}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{ \sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\pi - p}{p^2 + 4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{ \sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t-3) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\pi - p}{p^2 + 4\pi^2}e^{-3p}$$ car : $\mathcal{L}\left\{ g(t-T)\right\} = e^{-Tp}\, G(p)$

- Finalement : $F(p) = \mathcal{L}\left\{ f(t) \right\} = \mathcal{L}\left\{ f_1(t) \right\} + \mathcal{L}\left\{ f_2(t) \right\}$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{(1+2p)e^{-2p}}{p^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\pi - p}{p^2 + 4\pi^2}e^{-3p}$$

$$\Rightarrow F(p) = e^{-2p}\left[\frac{(1+2p)}{p^2} + \frac{e^{-p}}{\sqrt{2}}\frac{2\pi - p}{p^2 + 4\pi^2}\right]$$

Exercice n°2

Calcul des transformées inverses de Laplace :

2.a) $\boxed{F(p) = \frac{2}{p\,(p+1)(p-2)}}$

3 pôles réels (0 ; –1 ; 2) $\Rightarrow$ $F(p) = 2\left[\frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-2}\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \lim\limits_{p\to 0}\left[\cancel{p}.\frac{1}{\cancel{p}\,(p+1)(p-2)}\right] = -\frac{1}{2} \\ B = \lim\limits_{p\to -1}\left[\cancel{(p+1)}.\frac{1}{p\,\cancel{(p+1)}\,(p-2)}\right] = \frac{1}{3} \\ C = \lim\limits_{p\to 2}\left[\cancel{(p-2)}.\frac{1}{p\,(p+1)\,\cancel{(p-2)}}\right] = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(p) = 2\left[\frac{-1/2}{p} + \frac{1/3}{p+1} + \frac{1/6}{p-2}\right]$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t}\right] \qquad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = -1 + \frac{1}{3}\left(2e^{-t} + e^{2t}\right) \qquad t \geq 0$$

2.b) $\boxed{F(p) = \frac{p\,(p+2)}{p^2+2p+2}}$

Degré du numérateur ≥ Degré du dénominateur (n=m=2) $\Rightarrow$ Avant le développement en fractions partielles, il faut réécrire $F(p)$ en opérant une division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

$$\frac{p^2+2p}{p^2+2p+2} = \frac{p^2+2p+2-2}{p^2+2p+2} = 1 - 2\underbrace{\frac{1}{p^2+2p+2}}_{F_1(p)}$$

$$F(p) = \frac{p^2+2p}{p^2+2p+2} = \frac{p^2+2p+2-2}{p^2+2p+2} = 1 - 2\underbrace{\frac{1}{p^2+2p+2}}_{F_1(p)}$$

$$F(p) = 1 - 2.F_1(p) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - 2.\mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\}$$

$F_1(p)$ a 2 pôles complexes conjugués (–1 ± j)

$$\Rightarrow F_1(p) = \frac{1}{p^2+2p+2} = \frac{1}{(p+1+j)(p+1-j)} = \frac{1}{(p+1)^2+1}$$

or $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}\left\{e^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

$$\Rightarrow f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\} = e^{-t}\sin(t) \qquad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \delta(t) - 2e^{-t}\sin(t) \qquad t \geq 0$$

2.c) $\boxed{F(p) = \frac{2p^2+7p+8}{p^2+3p+2}}$

Degré du numérateur ≥ Degré du dénominateur (n=m=2) ⇒ division euclidienne

$$2p^2+7p+8 = 2\left(p^2+3p+2\right)+(p+4)$$

$$F(p) = 2+\frac{p+4}{p^2+3p+2} = 2+\underbrace{\frac{p+4}{(p+1)(p+2)}}_{F_1(p)}$$

$F_1(p)$ a 2 pôles réels (–1 ; –2) ⇒ $F_1(p) = \frac{A}{(p+1)}+\frac{B}{(p+2)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \lim\limits_{p\to -1}\left[\cancel{(p+1)}.\frac{(p+4)}{\cancel{(p+1)}\,(p+2)}\right] = 3 \\ B = \lim\limits_{p\to -2}\left[\cancel{(p+2)}.\frac{(p+4)}{(p+1)\cancel{(p+2)}}\right] = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F(p) = 2+\frac{3}{(p+1)}-\frac{2}{(p+2)}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 2\delta(t)+3e^{-t}-2e^{-2t} \quad t\geq 0$$

2.d) $\boxed{F(p) = \frac{5p+16}{(p+2)^2\,(p+5)}}$

1 pôle double (–2) et 1 pôle réel (–5) ⇒ $F(p) = \frac{A}{(p+2)^2}+\frac{B}{(p+2)}+\frac{C}{(p+5)}$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{p\to -2}\left[\frac{1}{0!}\left\{\cancel{(p+2)^2}.\frac{5p+16}{\cancel{(p+2)^2}\,(p+5)}\right\}\right] = 2 \\ B = \lim\limits_{p\to -2}\left[\frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{dp}\left(\cancel{(p+2)^2}.\frac{5p+16}{\cancel{(p+2)^2}\,(p+5)}\right)\right\}\right] = \lim\limits_{p\to -2}\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{5p+16}{(p+5)}\right)\right] = \lim\limits_{p\to -2}\left[\frac{9}{(p+5)^2}\right] = 1 \\ C = \lim\limits_{p\to -5}\left[\cancel{(p+5)}.\frac{5p+16}{(p+2)^2\,\cancel{(p+5)}}\right] = -1 \end{cases}$$

$$F(p) = 2\frac{1}{(p+2)^2}+\frac{1}{(p+2)}-\frac{1}{(p+5)}$$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = t \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\right\} = te^{-2t}$ car : $\mathcal{L}^{-1}\{G(p+a)\} = e^{-at}.\,g(t)$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 2te^{-2t}+e^{-2t}-e^{-5t} \qquad t\geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = (2t+1)e^{-2t}-e^{-5t} \qquad t\geq 0$$

2.e) $\boxed{F(p) = \dfrac{2(p+2)}{p^2-2p+2}}$

$F(p)$ a 2 pôles complexes conjugués : (1 ± j)

$$\Rightarrow \quad F(p) = \frac{2(p+2)}{(p-1+j)(p-1-j)} = 2\frac{p+2}{(p-1)^2+1^2} = 2\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+1^2} + 3\frac{1}{(p-1)^2+1^2}\right]$$

or $\begin{cases} \mathcal{L}\left\{e^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \dfrac{\omega}{\left(p+a\right)^2+\omega^2} \\ \mathcal{L}\left\{e^{-at}\cos(\omega t)\right\} = \dfrac{p+a}{\left(p+a\right)^2+\omega^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\} = 2\left[e^t\cos(t) + 3e^t\sin(t)\right] \qquad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = 2e^t\left[\cos(t) + 3\sin(t)\right] \quad t \geq 0$$

2.f) $\boxed{F(p) = \dfrac{5(p+2)}{p^2(p+1)(p+3)}}$

1 pôle double (0) et 2 pôles réels (–1 ; –3) $\Rightarrow F(p) = \dfrac{A}{p^2} + \dfrac{B}{p} + \dfrac{C}{(p+1)} + \dfrac{D}{(p+3)}$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{p\to 0}\left[\dfrac{1}{0!}\left\{\cancel{p^2}.\dfrac{5(p+2)}{\cancel{p^2}(p+1)(p+3)}\right\}\right] = {}^{10}\!/_{3} \\ B = \lim\limits_{p\to 0}\left[\dfrac{1}{1!}\left\{\dfrac{d}{dp}\left(\cancel{p^2}.\dfrac{5(p+2)}{\cancel{p^2}(p+1)(p+3)}\right)\right\}\right] = \lim\limits_{p\to 0}\left[5\,\dfrac{(p+1)(p+3)-2(p+2)^2}{\left\{(p+1)(p+3)\right\}^2}\right] = -{}^{25}\!/_{9} \\ C = \lim\limits_{p\to -1}\left[\cancel{(p+1)}.\dfrac{5(p+2)}{p^2\cancel{(p+1)}(p+3)}\right] = {}^{5}\!/_{2} \\ D = \lim\limits_{p\to -3}\left[\cancel{(p+3)}.\dfrac{5(p+2)}{p^2(p+1)\cancel{(p+3)}}\right] = {}^{5}\!/_{18} \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{{}^{10}\!/_{3}}{p^2} - \frac{{}^{25}\!/_{9}}{p} + \frac{{}^{5}\!/_{2}}{(p+1)} + \frac{{}^{5}\!/_{18}}{(p+3)}$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\} = \frac{10}{3}t - \frac{25}{9}u(t) + \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{5}{18}e^{-3t} \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{10}{3}t + \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{5}{18}e^{-3t} - \frac{25}{9} \qquad t \geq 0$$

Solution d'exercice N°3

Trouver la transformée de Laplace de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5$$

Pour les cas suivants :

1) Conditions initiales : $x_0 = 4$, $\frac{dx_0}{dt} = 3$.

La transformée de Laplace d'une dérivation d'ordre n avec des conditions initiales non nulles est :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{d^n}\right] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2}\frac{df(o^+)}{dt} - \cdots - \frac{d^{n-1}f(0^+)}{dt^{n-1}}$$

D'après la loi on a :

Avec : $x_0 = 4$, $\frac{dx_0}{dt} = 3$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = p^2X(p) - px_0 - \frac{dx_0}{dt} = p^2X\,(p) - 4p - 3$$

Pour $\frac{dx}{dt}$, n=1

$$\mathcal{L}\left[3\frac{dx}{dt}\right] = 3\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = 3(p\,X(p) - 4) = 3pX(p) - 12$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5\right] = p^2X\,(p) - 4p - 3 + 3pX(p) - 12 + 2X(p) = \frac{5}{p}$$

$$X(p)(p^2 + 3p + 2) = \frac{5}{p} + 4p + 15 = \frac{5 + 4p^2 + 15p}{p}$$

$$X(p) = \frac{4p^2 + 15p + 5}{p(p^2 + 3p + 2)}$$

2) Conditions initiales nulles.

A $t = 0$, $x_0 = 0$, $\frac{dx_0}{dt} = 0$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5\right] = p^2X(p) + 3pX(p) + 2X(p) = \frac{5}{p}$$

$$X(p) = \frac{5}{p(p^2 + 3p + 2)}$$

Solution d'exercice N°4

Soit un système dynamique d'écrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 10\frac{dy(t)}{dt} = 0.1\,r(t) \text{ avec } y(0) = y_0 \text{ et } \frac{dy(0)}{dt} = y_1$$

1) Trouvez l'expression de Y(p).

$$\mathcal{L}[\ddot{y} + 10\dot{y} = 0.1r] = p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 10\big(pY(p) - y(0)\big) = 0.1R(p)$$

$$Y(p)(p^2 + 10p) = 0.1R(p) + y(0)(p + 10) + \dot{y}(0)$$

$$Y(p) = \frac{0.1}{p(p+10)}R(p) + \frac{1}{p}y_0 + \frac{1}{p(p+10)}y_1$$

2) Calculez y(t) si $y_0=y_1=0$ et r(t)=1. $\mathcal{L}[r(t) = 1] \Rightarrow R(p) = \frac{1}{p}$

$$Y(p) = \frac{0.1}{p(p+10)}R(p) = \frac{0.1}{p^2(p+10)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+10}$$

Il y'a deux méthodes pour calculer A, B, C

1ère méthode :

$$\frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+10} = \frac{A(p+10) + Bp(p+10) + Cp^2}{p^2(p+10)} = \frac{(B+C)p^2 + (A+10B)p + 10A}{p^2(p+10)}$$

Par analogie avec $\frac{0.1}{p^2(p+10)}$ on a :

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + 10B = 0 \\ 10A = 0.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -C \\ B = -\dfrac{A}{10} \\ A = \dfrac{0.1}{10} = 0.01 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0.001 \\ B = -0.001 \\ A = 0.01 \end{cases}$$

2ième méthode :

$$A = p^2\frac{0.1}{p^2(p+10)}\bigg|_{p=0} = 0.01$$

$$B = \frac{d}{dp}\left[p^2\frac{0.1}{p^2(p+10)}\right]\bigg|_{p=0} = \frac{-0.1}{(p+10)^2}\bigg|_{p=0} = -0.001$$

$$C = (p+10)\frac{0.1}{p^2(p+10)}\bigg|_{p=-10} = 0.001$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.01}{p^2} - \frac{0.001}{p} + \frac{0.001}{p+10}\right]$$

$$y(t) = 0.01\,t - 0.001 + 0.001\,e^{-10t}$$

3) Calculez y(0) et y(∞) en utilisant les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale.

- Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to +\infty} p\,F(p)$$

$$y(0) = \lim_{p\to +\infty} p\,Y(p) = \lim_{p\to +\infty} p\,\frac{0.1}{p(p+10)}.\frac{1}{p} = \lim_{p\to +\infty} \frac{0.1}{p^2+10p} = \lim_{p\to +\infty} \frac{0.1}{p^2\left(1+\frac{10}{p}\right)} = 0$$

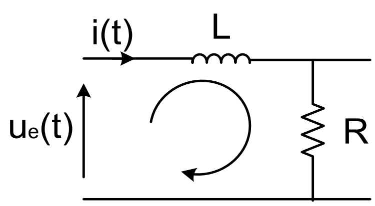
- Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t\to \infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\,F(p)$$

$$y(\infty) = \lim_{p\to 0} p\,Y(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{0.1}{p(p+10)}.\frac{1}{p} = \lim_{p\to 0} \frac{0.1}{p(p+10)} = \infty$$

Exercice N°5

Soit le circuit électrique illustré par la figure suivante :



R : est une résistance
L : est une inductance
$u_e(t)$: est la tension d'entrée
$i(t)$: est le courant

1) Etablir l'équation différentielle i(t).

$$u_{e(t)} = L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}u_e(t)$$

2) Trouver $I(p)$ en fonction de $U_e(p)$, R et L pour les conditions initiales nulles.

$$I(p) = \mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}u_e(t)\right]$$

$$I(p) = \frac{1/L}{p+\frac{R}{L}}\,U_e(p)$$

3) Calculer $i(t)$ « solution de l'équation différentielle » pour $U_e(p) = E$ et $U_e(p) = \frac{E}{p}$, deduire i(t) pour R=10Ω, L=10mH et E=100V.

1er cas $U_e(p) = E$

$$I(p)=\frac{E/_L}{p+\frac{R}{L}}=\frac{E}{L}\left(\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right)$$

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(p)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{E}{L}\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right]$$

$$i(t)=\frac{E}{L}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right]$$

$$i(t)=\frac{E}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

2ième cas $U_e(p)=\frac{E}{p}$

$$I(p)=\frac{1/_L}{p+\frac{R}{L}}.\frac{E}{p}=\frac{E/_L}{p\left(p+\frac{R}{L}\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+\frac{R}{L}}$$

$$A=p\left.\frac{E/_L}{p\left(p+\frac{R}{L}\right)}\right|_{p=0}=\frac{E}{R}$$

$$B=\left(p+\frac{R}{L}\right)\left.\frac{E/_L}{p\left(p+\frac{R}{L}\right)}\right|_{p=0}=-\frac{E}{R}$$

$$I(p)=\frac{E/_R}{p}-\frac{E/_R}{p+\frac{R}{L}}=\frac{E}{R}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right]$$

$$i(t)=\frac{E}{R}\left[1-e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

Pour R=10Ω, L=10mH et E=100V.

1er cas :

$$i(t)=\frac{E}{L}e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{100}{0.01}e^{\frac{-10}{0.01}t}=10^4e^{-10^3t}$$

2ème cas

$$i(t)=\frac{E}{R}\left[1-e^{-\frac{R}{L}t}\right]=10\left[1-e^{-10^3t}\right]$$