

Biologie Mathématique et Modélisation (L3 – MIV)

Chapitre 3 : Fonctions de Lyapunov – Notion de cycle limite

Sandrine CHARLES et Christelle LOPES (16/05/2008)

scharles@biomserv.univ-lyon1.fr; lopes@biomserv.univ-lyon1.fr

1. Introduction	2
2. Les fonctions de Lyapunov	5
3. La notion de cycle limite	18
3.1. Définition.....	18
3.2. Le passage en coordonnées polaires	20
3.3. Le théorème de Poincaré-Bendixson	22
3.3.1. Définitions	22
3.3.2. Théorème et corollaires	25
3.4. Les critères négatifs de Dulac et Bendixson	31
4. Applications en dynamique des populations	33
4.1. Le modèle de Holling	33
4.2. Le modèle de Holling-Tanner	38

1. Introduction

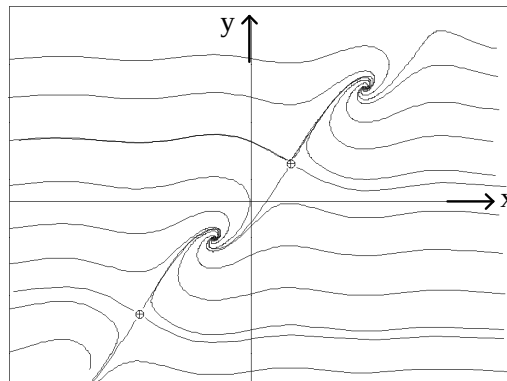


Figure 16 : Trajectoires associées au système dynamique $\dot{x} = x - y$; $\dot{y} = \cos x$.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2 (Figure 16), on peut, dans la plupart des cas, construire le portrait de phase global à partir de la connaissance des systèmes linéarisés au voisinage des points d'équilibre

On constate sur la figure 16 que les portraits de phase locaux correspondent bien à des points selle ou des foyers instables, ce que nous avait indiqué l'étude de stabilité locale par la méthode de linéarisation.

Dans cet exemple, on a donc pu construire le portrait de phase global à partir de la connaissance des systèmes linéarisés. Ce n'est pas toujours possible (*Théorème de linéarisation*) et cela dépend des propriétés de stabilité des points d'équilibres.

Pour tout point d'équilibre d'un système dynamique quelconque, il n'existe que trois types de stabilité : la stabilité asymptotique, la stabilité neutre, ou l'instabilité.

Définition 1 :

Un point d'équilibre (x^*, y^*) d'un système dynamique $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ est dit **neutralement stable** si pour tout voisinage V de (x^*, y^*) , il existe un plus petit voisinage $V' \subseteq V$ de (x^*, y^*) tel que toute trajectoire traversant V' reste dans V lorsque t augmente.

Par exemple, les centres sont neutralement stables.

Définition 2 :

Un point d'équilibre (x^*, y^*) d'un système dynamique $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ est dit **asymptotiquement stable** s'il est stable et s'il existe un voisinage V de (x^*, y^*) tel que toute trajectoire traversant V converge vers (x^*, y^*) lorsque t tend vers l'infini.

Par exemple, les foyers et les nœuds stables sont asymptotiquement stables.

La stabilité asymptotique impose que la limite des trajectoires lorsque $t \rightarrow \infty$ soit le point d'équilibre, tandis que la stabilité neutre impose seulement que les trajectoires restent dans un voisinage du point d'équilibre sans nécessairement tendre vers celui-ci.

Exemple :

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^3 \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Le point d'équilibre $(0,0)$ est stable mais pas asymptotiquement stable.

La linéarisation au voisinage de $(0,0)$ conduit à la matrice Jacobienne suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -3y^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det \mathbf{J}_{(0,0)} = 0$, l'origine est non hyperbolique et par conséquent le théorème de linéarisation ne s'applique pas.

Comme le montre la Figure 17(gauche), les trajectoires n'approchent jamais l'origine lorsque t tend vers l'infini, l'origine n'est donc pas asymptotiquement stable.

Cependant, l'origine est neutralement stable. En effet, d'après la Figure 17(droite), il existe des voisinages V et V' ($V' \subseteq V$), tels que toute trajectoire traversant V' reste dans V .

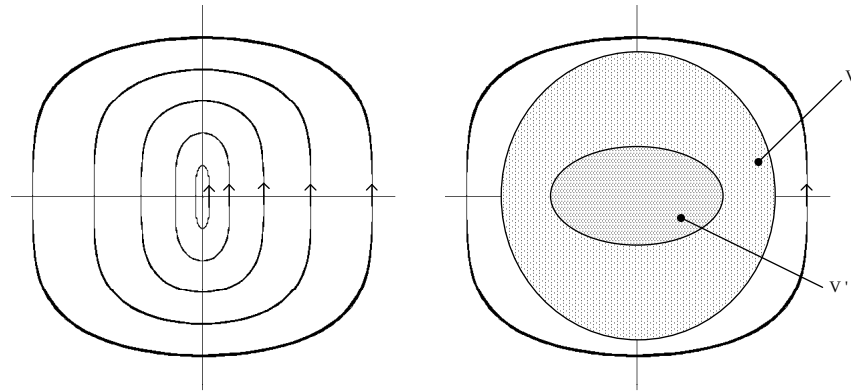


Figure 17 : Trajectoires (centres) du système dynamique $\dot{x} = -y^3$; $\dot{y} = x$.

Définition 3 :

Un point d'équilibre (x^*, y^*) d'un système dynamique $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ qui n'est pas stable est dit **instable**.

On peut, dans la plupart des cas, construire le portrait de phase global à partir de la connaissance des systèmes linéarisés au voisinage des points d'équilibre, sauf dans deux situations particulières :

- La première, lorsque le théorème de linéarisation ne s'applique pas (cas des points d'équilibres non hyperboliques, ou cas des centres) ;
- La seconde, lorsque le système dynamique présente un comportement particulier au niveau global du portrait de phase. Ce comportement particulier peut se traduire par la présence de **trajectoires homoclines**, *i.e.*, qui partent d'un point d'équilibre et qui y reviennent (Figure 18b), ou de **cycles limites** (Figure 18c) par exemple.

Dans ces deux cas, une approche locale est insuffisante et il faut utiliser des outils globaux, comme les fonctions de Liapunov, pour faire l'étude complète du système dans le plan de phase tout entier.

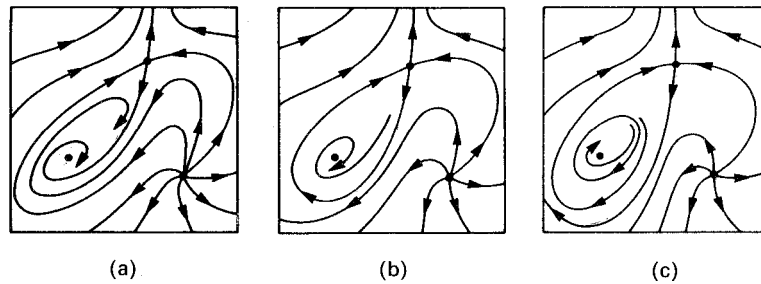


Figure 18 : Trois portraits de phase globaux qualitativement différents mais correspondant à trois points d'équilibre avec le même comportement local.

Ainsi, des systèmes d'EDO non-linéaires différents peuvent présenter les mêmes points d'équilibre (même nombre et même nature), mais ne pas correspondre aux mêmes portraits de phase globaux.

2. Les fonctions de Lyapunov

Les fonctions de Lyapunov, à l'instar des fonctions intégrales premières, sont des outils globaux d'étude des systèmes dynamiques. Elles permettent, dans le cas où le théorème de linéarisation ne s'applique pas, de montrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable et d'avoir une bonne estimation de son bassin d'attraction, c'est-à-dire de l'ensemble de tous les points du plan à partir desquels la trajectoire tend vers ce point d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.

L'idée développée par *Aleksandr Mikhailovitch Lyapunov*, mathématicien russe de la fin du XIX^{ème} siècle¹, spécialiste de la stabilité des systèmes, et particulièrement de ceux issus de la mécanique des fluides, a été d'introduire des fonctions réelles et d'étudier leurs variations le long des trajectoires du système $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$.

On rappelle ici que

$$\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

¹ 1857-1918

Définition 1 :

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine. Une fonction réelle de classe C^1 :

$$V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } (x, y) \rightarrow V(x, y)$$

est une **fonction définie positive** sur $\mathcal{V}$ si :

- (i) $V(0, 0) = 0$
- (ii) $V(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{V}$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$

Par exemple la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2$ est définie positive sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, tandis que la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2 - y^3$ est définie positive que dans un petit intervalle de valeurs de x (Figure 1).

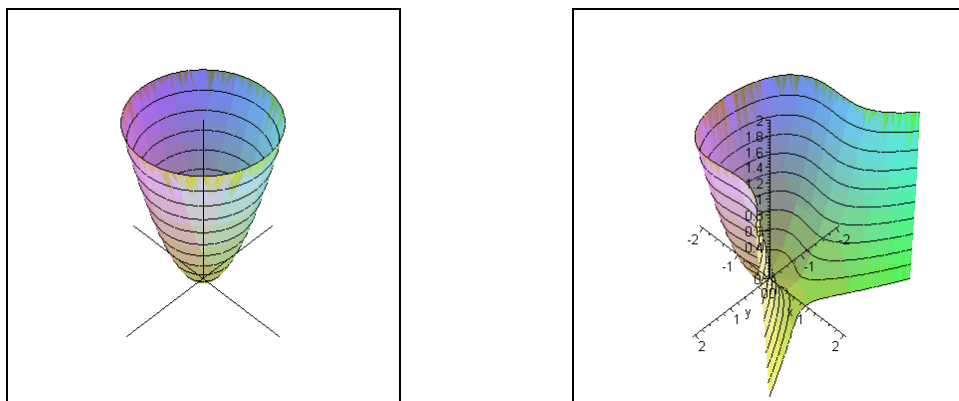


Figure 1 : A gauche $V(x, y) = x^2 + y^2$; à droite $V(x, y) = x^2 + y^2 - y^3$.

Par contre, les fonctions $V(x, y) = x + y^2$, $V(x, y) = (x + y)^2$ ou bien encore $V(x, y) = x^2$ ne sont pas définies positives, dans aucun voisinage contenant l'origine (Figure 2).

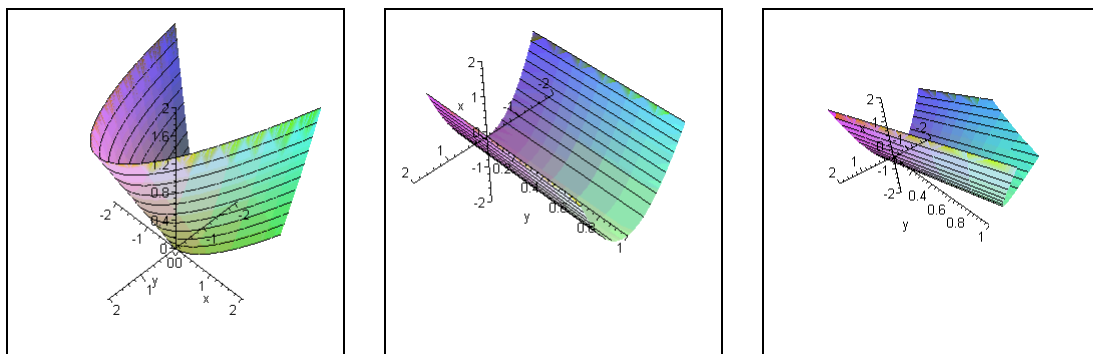


Figure 2 : De gauche à droite : $V(x, y) = x + y^2$, $V(x, y) = (x + y)^2$ et $V(x, y) = x^2$.

Le fait qu'une fonction soit définie positive (au sens de la *définition 1*) implique qu'elle admet un minimum à l'origine, au moins localement.

Par exemple, la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2$ est définie positive sur $\mathbb{R}^2$; elle admet dans ce cas un minimum global.

Définition 2 :

On appelle courbes de niveaux associées à une fonction définie positive $V(x, y)$, les lieux des points du plan qui vérifiant l'équation $V(x, y) = k$, avec $k > 0$ et k petit.

Ainsi, pour une fonction définie positive, les courbes de niveaux dans le plan (x, y) sont des courbes concentriques autour de l'origine.

Dans le cas de la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2$, les courbes de niveaux sont des cercles concentriques autour de l'origine (Figure 3).

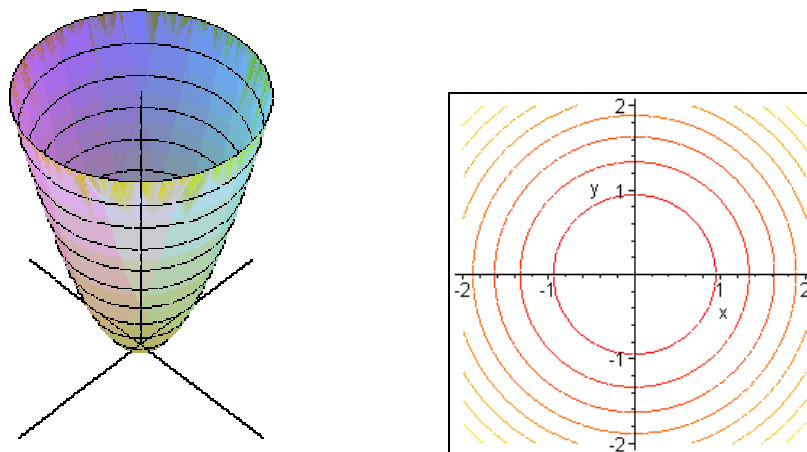


Figure 3 : Courbes de niveaux de la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2$.

D'une manière générale, on choisira de préférence, comme fonction définie positive une fonction polynomiale, i.e. une fonction quadratique homogène.

Lemme :

Une fonction quadratique homogène $V(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, avec a , b et c des nombres réels, est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.

On va maintenant étudier les variations des fonctions définies positives le long des trajectoires du système $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$, et plus précisément la façon dont les trajectoires coupent les courbes de niveaux de ces fonctions.

Soit $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ une solution du système $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$, et $V(x, y)$ une fonction définie positive. Alors la dérivée de la fonction $V(x, y)$, en un point de la trajectoire $\mathbf{X}(t)$, s'écrit :

$$\dot{V} = \frac{\partial V(\mathbf{X}(t))}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial V(\mathbf{X}(t))}{\partial y} \dot{y}(t)$$

$$\text{Soit } \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x, y)$$

Cette expression est en fait le produit scalaire du vecteur vitesse, tangent à la trajectoire, et de coordonnées $(\dot{x}, \dot{y}) = \Phi(\mathbf{X})$, avec le gradient de $V(x, y)$:

$$\dot{V} = \Phi(\mathbf{X}) \bullet \nabla V(\mathbf{X}) = \|\Phi(\mathbf{X})\| \cdot \|\nabla V(\mathbf{X})\| \cdot \cos \theta \quad (2.1)$$

où $\nabla V(\mathbf{X})$ ou $\overrightarrow{\text{grad}} V$ est le vecteur gradient associé à $V(x, y)$ de coordonnées $\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right)$, et θ , l'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur gradient.

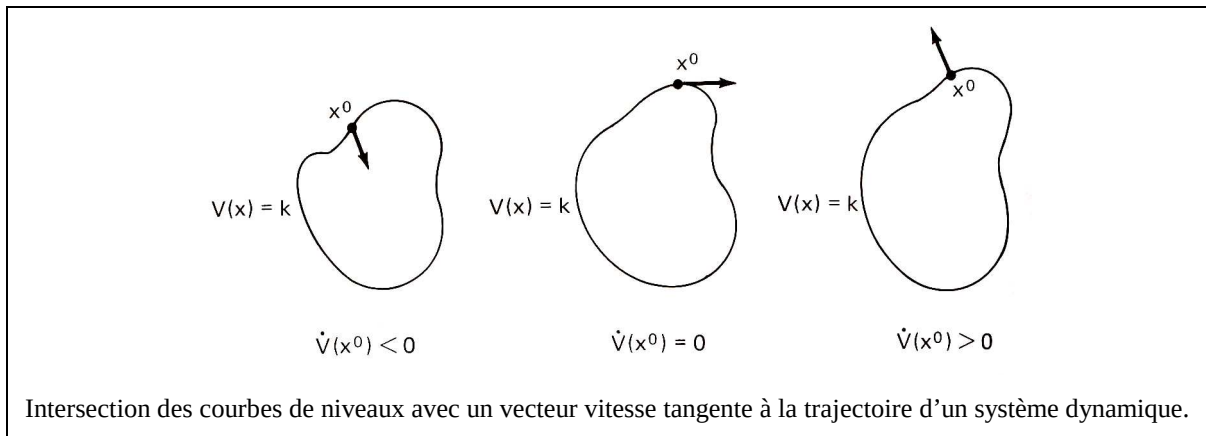
Le vecteur gradient $\nabla V(\mathbf{X})$ ou $\overrightarrow{\text{grad}} V$ indique la direction et le sens de variation de $V(x, y)$ dans l'espace. Par différentiation, on obtient :

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} V \bullet dM \end{aligned}$$

où dM est le vecteur déplacement entre $M(x, y)$ et $M'(x + dx, y + dy)$.

Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}} V$ est *orthogonal* aux courbes de niveaux de V , puisque les courbes de niveaux vérifient $V(x, y) = k$ soit $\dot{V} = 0 \Leftrightarrow dV = 0$. Il est par ailleurs orienté dans le sens de la plus grande pente.

Comme le montre l'expression (2.1), le signe de $\dot{V}$ est celui de $\cos \theta$. Ainsi, comme l'illustre la figure suivante, trois cas peuvent se présenter.



- Si $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$, alors $\dot{V} > 0$, les trajectoires traversent les courbes de niveaux de l'intérieur vers l'extérieur.
- Si $\theta \in \left] \frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2} \right[$, alors $\dot{V} < 0$, les trajectoires traversent les courbes de niveaux de l'extérieur vers l'intérieur.
- Si $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, alors $\dot{V} = 0$, les trajectoires sont tangentes à la courbe de niveau.

Théorème de Lyapunov :

Soit $\mathbf{X}^* = \mathbf{0}$ un point d'équilibre du système dynamique $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ et $V(x, y)$ une fonction C^1 définie positive dans un voisinage $\mathcal{V}$ de l'origine.

- (i) Si $\dot{V}(\mathbf{X}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{0}\}$, alors l'origine est *stable*.
- (ii) Si $\dot{V}(\mathbf{X}) < 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{0}\}$, alors l'origine est *asymptotiquement stable*.
- (iii) Si $\dot{V}(\mathbf{X}) > 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{0}\}$, alors l'origine est *instable*.

Définition 3 :

Une fonction $V(x, y)$ définie positive sur un voisinage $\mathcal{V}$ de l'origine est dite **fonction de Lyapunov faible** pour le système $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ si $\dot{V}(\mathbf{X}) \leq 0$ $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{0}\}$.

Si $\dot{V}(\mathbf{X}) < 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{0}\}$, la fonction de Lyapunov est dite **forte**.

Exemple 1 : Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x-1)^3 \\ \dot{y} = -(y-2)^3 \end{cases}$$

Ce système admet un point d'équilibre unique de coordonnées $(1, 2)$. Dans un premier temps, effectuons le changement de variables suivant permettant de ramener le point d'équilibre à l'origine :

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 2 \end{cases}$$

Avec ces nouvelles variables, le système se réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{u} = -u^3 \\ \dot{v} = -v^3 \end{cases}$$

Ce système admet l'origine comme point d'équilibre unique. La matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3u^2 & 0 \\ 0 & -3v^2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne au point $(0, 0)$: $\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le point d'équilibre origine est donc non

hyperbolique et le théorème de linéarisation ne s'applique pas.

Soit la fonction $V(u, v) = u^2 + v^2$ définie positive.

$$\dot{V} = 2u\dot{u} + 2v\dot{v} = -2(u^4 + v^4)$$

Quelque soit u et v , $\dot{V} < 0$, la fonction $V(u, v)$ est donc une fonction de Lyapunov **forte**, et d'après le théorème de Lyapunov, l'origine est asymptotiquement stable dans $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent, quelque soit la condition initiale dans $\mathbb{R}^2$, la trajectoire tend vers l'origine dans le plan (u, v) ; on dit que $\mathbb{R}^2$ est le **bassin d'attraction** du point d'équilibre $(0, 0)$.

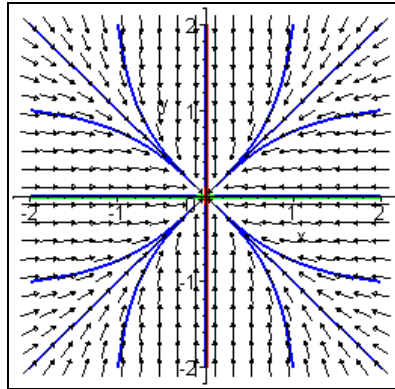


Figure 4 : Trajectoire du système $\dot{u} = -u^3$; $\dot{v} = -v^3$.

Exemple 2 : Considérons l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$\ddot{z} + 2a\dot{z} + z + z^3 = 0 \text{ avec } 0 < a < 1$$

On peut construire le système dynamique équivalent suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2ax_2 - x_1^3 \end{cases}$$

$(0, 0)$ est le seul point d'équilibre. La matrice Jacobienne au point d'équilibre s'écrit :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2a \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \det \mathbf{A}_0 = 1 \\ \text{tr} \mathbf{A}_0 = -2a \end{cases}$$

Par conséquent, du fait que $0 < a < 1$, on peut dire que $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

On peut alors utiliser une fonction de Lyapunov pour déterminer le **bassin d'attraction** de $(0, 0)$. L'idée consiste à exhiber une fonction de Lyapunov quadratique. Pour cela, nous allons mettre la partie linéaire du système, *i.e*, la matrice $\mathbf{A}_0$, sous forme de Jordan.

Les valeurs propres de $\mathbf{A}_0$ sont solutions de :

$$\lambda^2 + 2a\lambda + 1 = 0 \text{ soit } \lambda_{1,2} = -a \pm i\beta \text{ avec } \beta = \sqrt{1-a^2}$$

Les vecteurs propres sont $\mathbf{V}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$.

En posant $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & \beta \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, on obtient la forme de Jordan suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -a & \beta \\ -\beta & -a \end{pmatrix}$$

On effectue alors le changement de variables $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$, soit $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$. Ainsi :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \frac{1}{\beta}(ax_1 + x_2) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -ay_1 + \beta y_2 \end{cases}$$

On obtient finalement le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -ay_1 + \beta y_2 \\ \dot{y}_2 = -\beta y_1 - ay_2 - \frac{1}{\beta} y_1^3 \end{cases}$$

On prend comme fonction de Lyapunov la fonction définie positive suivante :

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2a}(y_1^2 + y_2^2)$$

Alors $-\dot{V} = (y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{a\beta} y_1^3 y_2$. C'est une fonction constituée d'un cercle et d'une hyperbole (Voir Hale et Koçak (1991) p 282 DIFFICILE). On sait que $a < 1$, donc $\beta < 1$ et $a\beta < 1$. En considérant le domaine autour de $(0,0)$ le cercle de rayon $r_0 = \sqrt{a\beta}$, on montre aisément que $-\dot{V} > 0$, donc que $\dot{V} < 0$, ce qui permet de conclure à la stabilité asymptotique du point $(0,0)$.

Cette fois-ci le bassin d'attraction est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $r_0 = \sqrt{a\beta}$.

Théorème de Barbashin-Krasovskii-LaSalle pour fonctions faibles

S'il existe une fonction de Lyapunov faible $V(x, y)$ définie dans un voisinage de l'origine pour le système dynamique $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$, alors, si $\dot{V}$ ne s'annule pas le long d'une quelconque trajectoire autre que le point d'équilibre, l'origine est asymptotiquement stable.

Exemple 3: Considérons l'équation différentielle d'ordre 2 $\ddot{x} + 6x^2\dot{x} + x = 0$ qui est équivalente au système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 6x^2y \end{cases}$$

L'origine est le seul point d'équilibre. La matrice Jacobienne en $(0,0)$ s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-12xy & -6x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Partie linéaire}$$

La linéarisation prévoit l'existence de centres au point $(0,0)$, on est donc dans le cas où le théorème de linéarisation ne s'applique pas. Il faut donc vérifier, avec une fonction de Lyapunov, s'ils sont conservés au niveau du portrait de phase global.

Soit la fonction définie positive $V(x, y) = x^2 + y^2$, alors $\dot{V} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -12x^2y^2$.

$\dot{V}$ s'annule soit pour $x = 0$ soit pour $y = 0$ et est strictement négative partout ailleurs. Par conséquent, $\dot{V} \leq 0$ c'est-à-dire que V est une fonction de Lyapunov *faible* pour le système dynamique considéré. Ainsi, d'après le théorème de Lyapunov, l'origine est stable.

D'autre part, si $x = 0$, la dynamique devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, toutes les trajectoires traversent la droite $x = 0$, sauf à l'origine (Figure 5a).

De même, si $y = 0$, la dynamique devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Dans ce cas, toutes les trajectoires traversent la droite $y = 0$, sauf à l'origine (Figure 5b).

En conclusion, $\dot{V}$ est nul partout sauf sur les deux axes $x = 0$ et $y = 0$ où il s'annule seulement momentanément (Figure 5).



Figure 5 : cas particuliers associés au système $\dot{x} = y$; $\dot{y} = -x - 6x^2y$; (à gauche) lorsque $x = 0$; (à droite) lorsque $y = 0$.

D'après le théorème de Barbashin-Krasovskii-LaSalle pour fonctions faibles, on peut donc conclure à la stabilité asymptotique de l'origine (Figure 6).

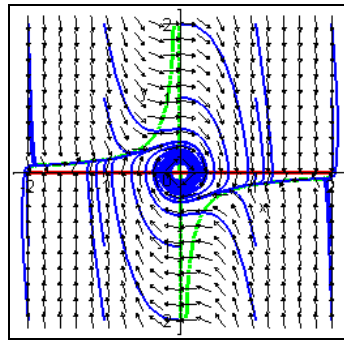


Figure 6 : Trajectoires associées au système $\dot{x} = y$; $\dot{y} = -x - 6x^2y$.

Théorème d'instabilité de Četaev :

Supposons que le système dynamique $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ admet l'origine comme point fixe.

Si une fonction $V(x, y)$, à valeurs réelles et de classe C^1 , existe telle que :

1. Le domaine de définition de $V(x, y)$ contient $D = \{\mathbf{X} / \|\mathbf{X}\| \leq r\}$ où r est une constante réelle strictement positive.
2. Il existe des points aussi près que l'on veut de l'origine pour lesquels $V(x, y)$ est strictement positive.
3. $\dot{V} > 0$ sur $D - \{\mathbf{0}\}$
4. $V(\mathbf{0}) = 0$

Alors, l'origine est instable.

Exemple4 : Soit le système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - xy \\ \dot{y} = y^2 \end{cases}$$

La matrice Jacobienne au point d'équilibre $(0,0)$ s'écrit : $\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, L'origine est donc non hyperbolique et le théorème de linéarisation ne s'applique pas.

Soit la fonction $V(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3$. Cherchons les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que $V(x, y)$ réponde aux conditions du théorème d'instabilité de Četaev.

$$\dot{V} = 6\alpha x^4 + (4\beta - 3\alpha)x^3 y + (2\gamma - \beta)x^2 y^2 + \gamma xy^3 + 3\delta y^4$$

On sait par ailleurs que $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4$; Par identification, on peut choisir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que :

$$\begin{cases} 3\delta = 1 \\ 4\beta - 3\alpha = 4 \\ 2\gamma - \beta = 6 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4/3 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 4 \\ \delta = 1/3 \end{cases}$$

Il vient :

$$\dot{V} = 8x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4 = 7x^4 + (x + y)^4 > 0$$

La fonction $V(x, y)$ est alors donnée par :

$$V(x, y) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 y + 4xy^2 + \frac{1}{3}y^3$$

- Le point 1. est vérifié puisque $V(x, y)$ est définie sur $\mathbb{R}^2$; on peut prendre pour D n'importe quel cercle de centre l'origine et de rayon r .
- Le point 3. est vérifié sans problème étant donnée l'expression de $\dot{V}$;
- Le point 4. est aussi vérifié.
- Le point 2. est vérifié car si $x = 0$, $V(x, y) = \frac{y^3}{3}$ qui est strictement positive pour $y > 0$, ainsi il existe sur l'axe des y des points arbitrairement près de l'origine tels que $V(x, y) > 0$. Idem pour $y = 0$ (Figure 7).

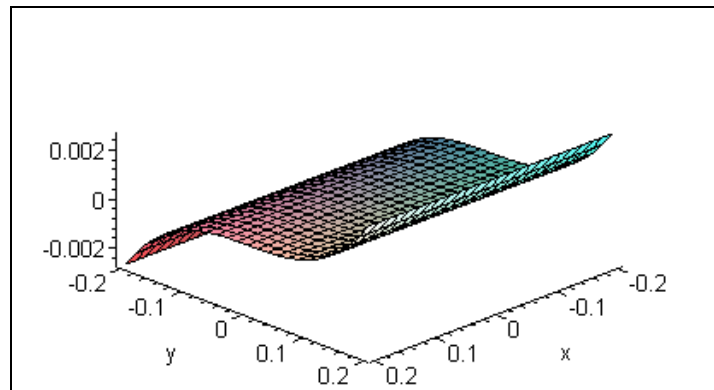


Figure 7 : Représentation 3D de la fonction $V(x, y) = -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2y + 4xy^2 + \frac{1}{3}y^3$ lorsque $x = 0$.

On en conclut, d'après le théorème d'instabilité de Četaev, que l'origine est instable.

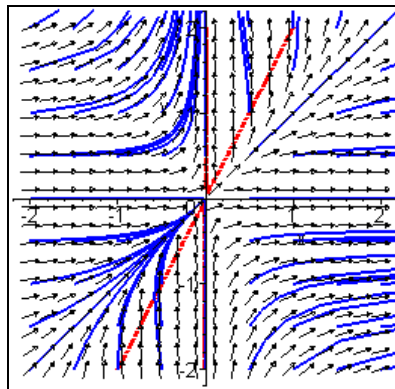


Figure 8 : Trajectoires associées au système $\dot{x} = 2x^2 - xy$; $\dot{y} = y^2$.

Exemple 5 :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y^2 \\ \dot{y} = 2xy - y^3 \end{cases}$$

$(0,0)$ est point d'équilibre. La matrice Jacobienne en $(0,0)$ s'écrit $\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, elle

possède une valeur propre nulle, le théorème de linéarisation ne s'applique pas.

Soit $V(x, y) = x^2 + y^2$ définie positive.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x(-x - 2y^2) + 2y(2xy - y^3) \\ &= -2x^2 - 4xy^2 + 4xy^2 - 2y^4 \\ &= -2(x^2 + y^4) \end{aligned}$$

$\dot{V} < 0$ pour toute valeur de x et y dans $\mathbb{R}^2$ et ne s'annule qu'en $(0,0)$. C'est donc une fonction de Lyapunov forte, on en conclut que l'origine est asymptotiquement stable. Le bassin d'attraction est $\mathbb{R}^2$.

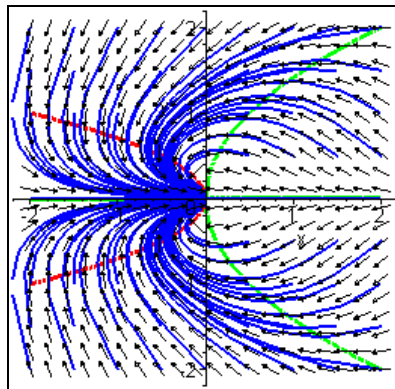


Figure 9 : Trajectoires associées au système $\dot{x} = -x - 2y^2$; $\dot{y} = 2xy - y^3$.

Exemple 6 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - (1 - x^2)y \end{cases}$$

$(0,0)$ est point d'équilibre. La matrice Jacobienne en $(0,0)$ s'écrit $\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

d'après le théorème de linéarisation, on en déduit directement que l'origine est un foyer asymptotiquement stable. On va utiliser une fonction de Lyapunov pour déterminer le bassin d'attraction. Soit $V(x, y) = x^2 + y^2$ définie positive.

$$\dot{V} = 2xy + 2y(-x - (1 - x^2)y) = -2y^2(1 - x^2)$$

On a cette fois une fonction de Lyapunov faible puisque $\dot{V} \leq 0$.

$\dot{V} = 0$ pour $y = 0$ ou bien $x = \pm 1$.

Si $y = 0$, alors $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ ne s'annule pas en dehors de $(0,0)$. On en conclut que l'origine

est asymptotiquement stable, d'après le théorème de Barbashin-Krasovskii-LaSalle pour fonctions faibles.

D'après l'expression de $\dot{V}$, on voit que $\dot{V} < 0$ pour $|x| < 1$. Le bassin d'attraction du point d'équilibre $(0,0)$ est donc défini par $|x| < 1$ (Figure 10).

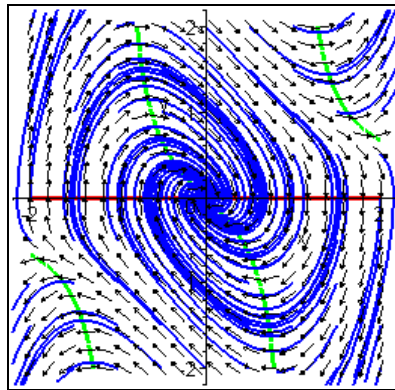


Figure 10 : Trajectoires associées au système $\dot{x} = y$; $\dot{y} = -x - (1 - x^2)y$.

3. La notion de cycle limite

3.1. Définition

Dans tout ce précède, nous avons étudié en détail les différents cas possibles où une solution tend vers un point d'équilibre : avec le théorème de linéarisation (chapitre 2, § 3), avec la notion d'intégrale première (chapitre 2, § 4) et les fonctions de Lyapunov (Chapitre 3, § 2).

Un autre comportement possible pour une trajectoire est de tendre vers un mouvement périodique : dans le cas d'un système planaire, cela signifie que les trajectoires tendent vers ce que l'on appelle un **cycle limite**.

Un cycle limite *attractif* (resp. *répulsif*) est une trajectoire fermée (donc une solution périodique) vers laquelle tendent (resp. de laquelle s'éloignent), lorsque t tend vers $+\infty$, les trajectoires voisines. Les cycles limites sont aussi des séparatrices : ils séparent des régions où les trajectoires ont des comportements différents.

Remarque : Par définition, un cycle limite est isolé de toute autre trajectoire, ce qui implique que les centres ne sont pas des cycles limites.

Exemple 7 : Cas d'un système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \text{ avec } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On est dans le cas où $\mathbf{A}$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle nulle et de partie imaginaire égale à -1 . On a donc des centres (Figure 11).

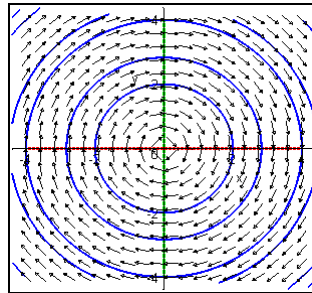


Figure 11 : Trajectoires associées au système $\dot{x} = y$; $\dot{y} = -x$.

Exemple 8 : Considérons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + \alpha(1 - x^2 - y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

La partie linéaire de ce système au point d'équilibre $(0,0)$ est identique au système linéaire de l'exemple 7 précédent. Comme le montre la Figure 12, la partie non linéaire conduit à la « perte » des centres, et à l'apparition d'un cycle limite stable.

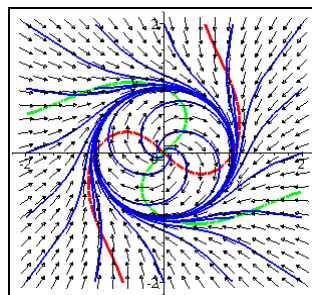


Figure 12 : Trajectoires associées au système $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + \alpha(1 - x^2 - y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ avec $\alpha = 1$.

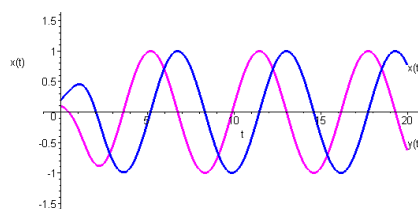


Figure 12bis : Chroniques associées au système $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + \alpha(1 - x^2 - y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ avec $\alpha = 1$. Les conditions initiales sont : $x(0) = 0.2$ et $y(0) = 0.1$.

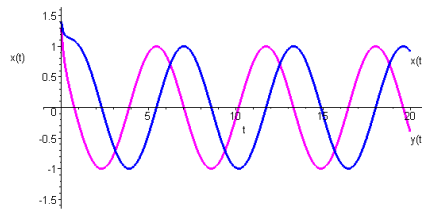


Figure 12ter : Chroniques associées au système $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + \alpha(1-x^2-y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ avec $\alpha=1$. Les conditions initiales sont : $x(0)=1.4$ et $y(0)=1.3$.

Pour montrer l'existence des cycles limites, et établir leur stabilité, nous ne disposons pas de beaucoup d'outils. Nous allons cette année parler d'un théorème fondamental, celui de Poincaré-Bendixson, nous en verrons d'autres l'année prochaine.

3.2. Le passage en coordonnées polaires

Si nous reprenons l'exemple précédent, la formulation du système permet de passer des coordonnées cartésiennes (x, y) aux coordonnées polaires (r, θ) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + \alpha(1-x^2-y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y + \alpha(1-x^2-y^2)x \\ \dot{y} = -x + \alpha(1-x^2-y^2)y \end{cases}$$

On rappelle que $r^2 = x^2 + y^2$ et que $\tan \theta = y/x$.

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$$

$$r\dot{r} = x[y + \alpha(1-x^2-y^2)x] + y[-x + \alpha(1-x^2-y^2)y]$$

$$r\dot{r} = \alpha(1-x^2-y^2)(x^2 + y^2)$$

$$\boxed{\dot{r} = \alpha(1-r^2)r}$$

$$\tan \theta = y/x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2}$$

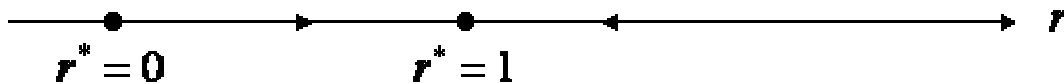
$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{[-x + \alpha(1-x^2-y^2)y]x - y[y + \alpha(1-x^2-y^2)x]}{x^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{-x^2 - y^2}{x^2}$$

$$\dot{\theta} = -1$$

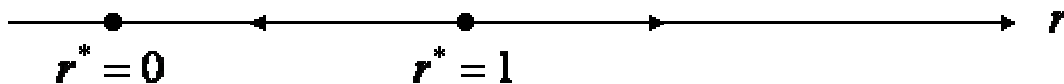
L'étude de ce système montre qu'un cycle limite candidat est le cercle de rayon $r=1$ qui correspond à $\dot{r}=0$, et qui est bien décrit dans son entier puisque $\dot{\theta} \neq 0$. On voit que la stabilité va dépendre du signe de α .

- En effet, si $\alpha > 0$, $\dot{r} > 0$ pour $0 < r(0) < 1$, ce qui conduit au portrait de phase suivant :



Le cercle de rayon $r=1$ est donc un cycle limite stable (Figure 12, ci-dessus, avec $\alpha=1$).

- Par contre, si $\alpha < 0$, $\dot{r} < 0$ pour $0 < r(0) < 1$, ce qui conduit au portrait de phase suivant :



Le cercle de rayon $r=1$ est cette fois-ci un cycle limite instable (Figure 13).

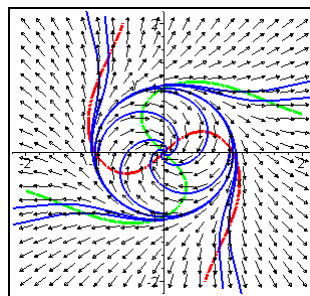


Figure 13 : Trajectoires associées au système $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + \alpha(1-x^2-y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ avec $\alpha = -1$.

Exemple 9 : Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (2 - x^2)y - x \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation de Van Der Pol, qui peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 2 :

$$\ddot{x} + (x^2 - 2)\dot{x} + x = 0$$

Cette équation est très utilisée pour décrire l'évolution dans le temps de certains phénomènes électriques.

La figure 13bis montre le portrait de phase de ce système. On y voit un cycle limite attractif : les trajectoires situées à l'intérieur proviennent d'un nœud instable (l'origine), celles situées à l'extérieur proviennent de l'infini. On remarque au passage qu'un cycle limite n'est pas nécessairement un cercle.

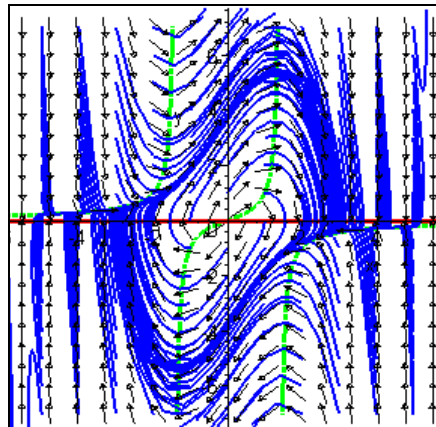


Figure 13bis : Trajectoires de l'oscillateur de Van der Pol, dont le système d'équation est

$$\dot{x} = y ; \dot{y} = (2 - x^2)y - x$$

3.3. Le théorème de Poincaré-Bendixson

3.3.1. Définitions

Définition 1 :

Un **compact** de $\mathbb{R}^2$ est un ensemble fermé et borné :

Fermé signifie que la frontière est incluse ;

Borné signifie qu'il est délimité par des bornes finies ($\neq \pm\infty$)

Exemple :

- Le carré de côté $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ est un compact ;
- Le disque de rayon r est un compact (Figure 14) ;
- $\mathbb{R}^2$ n'est pas un compact car il n'est pas borné.



Figure 14 : (a) Carré de côté $[a, b]$; (b) Cercle de rayon r .

Définition 2 :

Un ensemble est dit **connexe** (« *connected region* ») s'il est constitué « d'un seul morceau ». Il est de plus **simplement connexe** s'il n'a pas de « trous ».

Exemple :

- $\mathbb{R}^2$ est connexe et simplement connexe ;
- Le disque de rayon 1 privé du disque de rayon $\frac{1}{2}$ est connexe mais n'est pas simplement connexe (Figure 15).

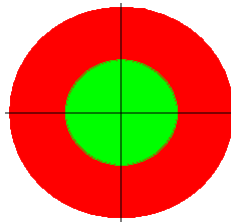


Figure 15 : L'anneau rouge est un ensemble connexe mais pas simplement connexe

Définition 3 :

Un domaine D de $\mathbb{R}^2$ est un **ensemble positivement invariant** (« *positively invariant* ») pour le système dynamique $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$, ~~s'il est simplement connexe, et~~ si pour toute condition initiale $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0) \in D$, la trajectoire issue de $\mathbf{X}_0$ est contenue dans D .

.....

Remarques :

- Un ensemble positivement invariant n'est pas nécessairement borné.
- Le terme « positivement » vient du fait que l'on regarde la trajectoire dans le sens des t croissants (*i.e.* pour $t \geq 0$).
- Les trajectoires peuvent éventuellement être tangentes à la frontière d'un ensemble positivement invariant.

Exemple 1 : Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y-1) \\ \dot{y} = y(x-1) \end{cases}$$

On voit immédiatement que les droites $x=0$ et $y=0$ sont isoclines nulle verticale et horizontale respectivement. Toute trajectoire issue d'une condition initiale dans l'un des quatre quadrant de $\mathbb{R}^2$ reste dans ce quadrant lorsque $t \rightarrow +\infty$. Chaque quadrant est donc un ensemble positivement invariant pour ce système (Figure 16).

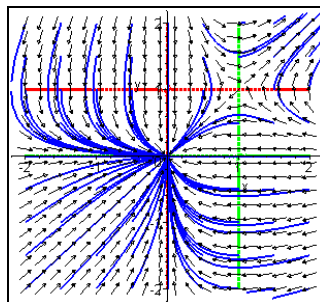


Figure 16 : Trajectoires associées au système $\dot{x} = x(y-1)$; $\dot{y} = y(x-1)$. Les quatre quadrants de $\mathbb{R}^2$ sont positivement invariants pour ce systèmes.

Exemple 2 : Retour sur le modèle de Lotka-Volterra (Chapitre 2, § 4.1).

$$\begin{cases} \dot{N} = aN - bNP \\ \dot{P} = -dP + cNP \end{cases}$$

Les axes $N=0$ et $P=0$ son respectivement isoclines nulles verticales et horizontale. Ici, le domaine de $\mathbb{R}^2$ d'intérêt d'un point de vue biologique est le quadrant dit positif, $D = \{(N, P) / N \geq 0, P \geq 0\}$, qui est positivement invariant pour le modèle de Lotka-Volterra (Figure 17).

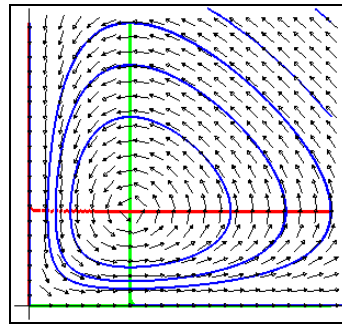


Figure 17 : Trajectoires du modèle de Lotka-Volterra pour $a = b = c = d = 1$.

Définition 4 :

Un domaine D de $\mathbb{R}^2$ est un **domaine attractant** (« *trapping region* ») pour le système dynamique $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$, si D est compact et positivement invariant, et si toute trajectoire issue d'une condition initiale dans D reste **strictement** dans D lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Exemples :

- Dans le modèle de Lotka-Volterra précédent, tout domaine D ayant comme frontière un des centres, est un ensemble positivement invariant mais pas attractant.
- Si on revient au système de la Figure 16, on voit que le domaine D défini comme $\{(x, y) / -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ est un domaine attractant.

3.3.2. Théorème et corollaires

Définition :

Soit le système dynamique $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ défini sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Soit $\mathbf{X} \in \Omega$. On appelle ω -limite de $\mathbf{X}$, que l'on note $\omega(\mathbf{X})$, l'ensemble des $\mathbf{Y} \in \Omega$ tels que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$.

On dit qu'un point d'équilibre est attractif (asymptotiquement stable) si, dans un voisinage, toutes les trajectoires s'en rapprochent. Si on se donne un point $\mathbf{X}$ dans ce voisinage, son ω -limite est alors constituée par le point d'équilibre attractif lui-même. On peut alors définir le bassin d'attraction du point d'équilibre attractif, comme l'ensemble des $\mathbf{X}$ qui

ont pour ω -limite le point d'équilibre attractif : ce bassin d'attraction est un ensemble positivement invariant.

➔ Le théorème de Poincaré-Bendixson permet de décrire tous les ensembles ω -limites compacts d'un système dynamique **plan**.

Théorème de Poincaré-Bendixson²

Soit D un domaine **attractant** du plan pour le système dynamique **plan** $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$. Alors, pour tout $\mathbf{X} \in D$, son ω -limite est soit :

- (i) Un point d'équilibre attractif ;
- (ii) Une trajectoire périodique (un cycle limite) ;
- (iii) Une réunion de points d'équilibre reliés par des trajectoires régulières.

Conséquence : Un ensemble limite $\omega(\mathbf{X})$ non vide compact d'un système dynamique plan, qui ne contient pas de point d'équilibre, est une trajectoire périodique.

Corollaire 1 :

S'il existe dans le plan un domaine attractant pour un système dynamique, et *qui ne contient pas de point d'équilibre*, alors il existe au moins un cycle limite entièrement contenu dans ce domaine.

Corollaire 2 :

S'il existe dans le plan un domaine attractant pour un système dynamique, et *qui contient un unique point d'équilibre instable*, alors il existe au moins un cycle limite entièrement contenu dans ce domaine.

²

Jules Henri POINCARÉ (1854 – 1912, Nancy, France)

Ivar Otto BENDIXSON (1861 – 1935, Bergshyddan, Suède)

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html>

Nous verrons que, dans la pratique, il n'est pas toujours facile d'obtenir un domaine attractant (on dit une « boîte » de Poincaré-Bendixson) qui permette d'appliquer le théorème ou ses corollaires.

Selon les systèmes, il sera parfois possible d'utiliser une fonction de Lyapunov pour arriver à nos fins.

Exemple 1 : Reprenons le système dynamique suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + (1 - x^2 - y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

La fonction $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ est une fonction de Lyapunov pour ce système.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= x[y + (1 - x^2 - y^2)x] + y[-x + (1 - x^2 - y^2)y] \\ &= (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Si on considère le domaine D délimité par le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et le cercle de rayon 2, c'est-à-dire défini par $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$, on obtient un domaine attractant pour notre système : toutes les trajectoires sont strictement entrantes dans D (Figure 18).

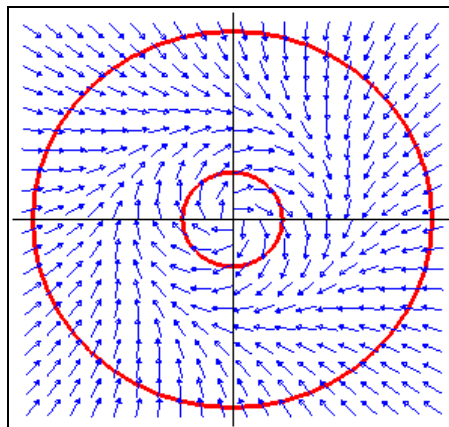


Figure 18 : Champ de vecteurs du système $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + (1 - x^2 - y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Les deux cercles rouges de rayons $\frac{1}{2}$ et 2 délimitent un domaine attractant pour ce système.

Le domaine D ne contient pas de point d'équilibre, on peut donc en conclure d'après le corollaire 1 du théorème de Poincaré-Bendixson qu'il existe au moins un cycle limite entièrement contenu dans D .

Remarque : Dans cet exemple, on arrive au même résultat, si on utilise comme domaine attractant $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 2\}$ qui contient un unique point d'équilibre instable (l'origine).

Exemple 2 : Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x - x^3 \\ \dot{y} = -x + y - y^3 \end{cases}$$

Le point $(0, 0)$ est point d'équilibre. La matrice Jacobienne au point $(0, 0)$ est égale à :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \det \mathbf{A}_0 = 2, \operatorname{tr} \mathbf{A}_0 = 2 \text{ et } \Delta = -4$$

$(0, 0)$ est donc un foyer instable.

Comme dans l'exemple ci-dessus, la fonction $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ est une fonction de Lyapunov pour ce système.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= x[y + x - x^3] + y[-x + y - y^3] \\ &= x^2 + y^2 - (x^4 + y^4) \end{aligned}$$

Le signe de $\dot{V}$ n'est pas clair, toutefois par minoration, majoration, on arrive à quelque chose :

- Si $x^2 + y^2 < 1$, alors $x < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x^4 < x^2$ et $y < 1 \Rightarrow y^2 < 1 \Rightarrow y^4 < y^2$. Par conséquent un cercle de rayon $r < 1$ délimite une zone dans laquelle $\dot{V} > 0$.
- Si $x^2 + y^2 > 2$, alors on obtient par un raisonnement analogue au précédent, le fait que $x > \sqrt{2} \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow x^4 > 2x^2 > x^2$ et que $y > \sqrt{2} \Rightarrow y^2 > 2 \Rightarrow y^4 > 2y^2 > y^2$. Par conséquent un cercle de rayon $r > \sqrt{2}$ délimite une zone dans laquelle $\dot{V} < 0$.

Ainsi, l'anneau délimité par un cercle de rayon $r < 1$ et un cercle de rayon $r > \sqrt{2}$ forme un domaine attractant pour le système considéré (Figure 19).

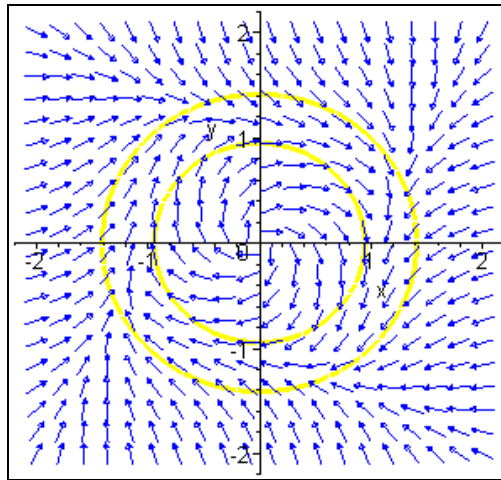


Figure 19 : Champ de vecteurs du système $\dot{x} = y + x - x^3$; $\dot{y} = -x + y - y^3$. Les deux cercles jaunes de rayons < 1 et $> \sqrt{2}$ délimitent un domaine attractant pour ce système.

Le domaine attractant ainsi construit ne contient pas de point d'équilibre, on en conclut que le système admet au moins un cycle limite entièrement inclus dans ce domaine (Figure 20).

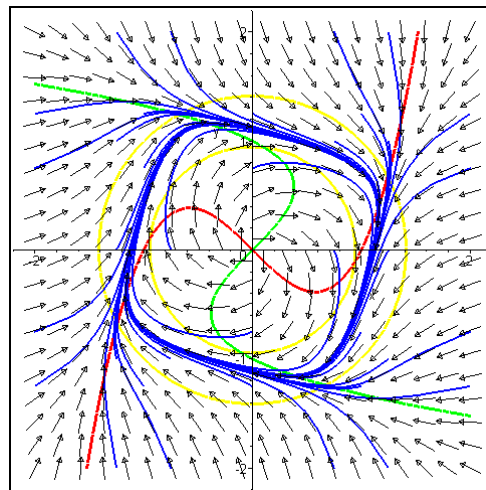


Figure 20 : Trajectoires associées au système $\dot{x} = y + x - x^3$; $\dot{y} = -x + y - y^3$. Les deux cercles jaunes de rayons < 1 et $> \sqrt{2}$ délimitent un domaine attractant contenant un cycle limite stable.

Exemple 3 : Retour sur le modèle de Van der Pol (Exemple 9, §3.1.) :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (2 - x^2)y - x \end{cases}$$

Le point $(0,0)$ est point d'équilibre. La matrice Jacobienne au point $(0,0)$ est égale à :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \det \mathbf{A}_0 = 1, \operatorname{tr} \mathbf{A}_0 = 0.$$

La linéarisation prévoit des centres autour de $(0,0)$. Comme nous l'avons constaté sur la Figure 13bis, le point d'équilibre $(0,0)$ est en fait instable, et entouré d'un cycle limite stable.

Comme le montre la Figure 21, on peut s'appuyer pour partie sur des trajectoires pour construire une boîte de Poincaré-Bendixson. Il faut par contre que ces trajectoires soient, à un moment donné, rentrantes strictement dans le domaine considéré.

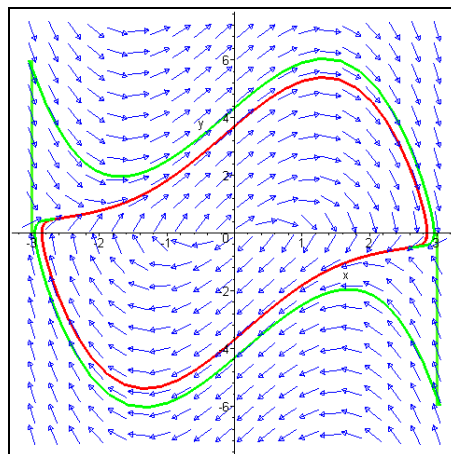


Figure 21 : En vert, « boîte » de Poincaré-Bendixson pour l'oscillateur de Van der Pol ; En rouge, le cycle limite stable pour ce système.

Remarque 2 : avec le théorème de Poincaré-Bendixson, on montre l'existence d'au moins un cycle limite, mais on ne sait pas combien il y en a, ni s'ils sont stables ou instables.

Exemple 4 : Considérons le système dynamique suivant, écrit directement en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r)(r-2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Il y a deux cycles limites définis par les cercles de rayon $r=1$ et $r=2$. Une rapide étude du signe de la fonction $r(1-r)(r-2)$ indique que le cercle de rayon $r=1$ est instable, tandis que le cercle de rayon $r=2$ est asymptotiquement stable (Figure 22).

Un tel résultat n'aurait pas pu être obtenu avec le théorème de Poincaré-Bendixson.

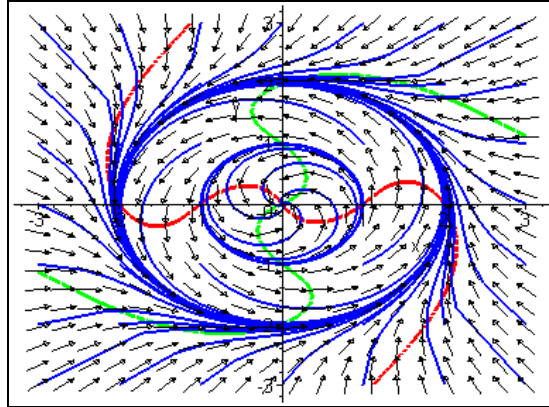


Figure 22 : Trajectoires associées au système $\dot{r} = r(1-r)(r-2)$; $\dot{\theta} = 1$, qui admet deux cycles limites.

3.4. Les critères négatifs de Dulac et Bendixson

Nous venons de voir, par l'application du théorème de Poincaré-Bendixson ou de ses corollaires, qu'il est possible de montrer l'existence d'au moins un cycle limite pour un système dynamique donnée. Nous allons maintenant voir deux critères qui permettent d'exclure l'existence de tout cycle limite, dans un certains domaine.

Théorème 1

Soit le système dynamique $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$.

Soit D un domaine simplement connexe de $\mathbb{R}^2$. Si la quantité $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ est non nulle et de signe constant sur D , alors le système $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ n'admet pas de cycle limite entièrement contenu dans D .

Exemple : Démontrons qu'un système dynamique linéaire ne peut admettre de cycle limite.

Soit $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ avec $a_{ij} > 0$ pour tout i et j . $(0,0)$ est le seul point d'équilibre.

$$f(x, y) = a_{11}x + a_{12}y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = a_{11}$$

$$g(x, y) = a_{21}x + a_{22}y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = a_{22}$$

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = a_{11} + a_{22} > 0$ en tout point de $\mathbb{R}^2$: il ne peut donc exister de cycle limite entièrement contenu dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2

Soit le système dynamique $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$. Soit $B(x, y)$ une fonction de classe C^1 sur D , un domaine simplement connexe de $\mathbb{R}^2$. Si la quantité $\frac{\partial Bf}{\partial x} + \frac{\partial Bg}{\partial y}$ est non nulle et de signe constant sur D , alors le système $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ n'admet pas de cycle limite entièrement contenu dans D .

Exemple : Considérons le modèle de compétition dont les équations sont :

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - u - av) \\ \dot{v} = rv(1 - v - bu) \end{cases} \text{ avec } a, b, r > 0$$

Les points d'équilibre sont $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et (u^*, v^*) qui vérifie les deux équations $1 - u^* - av^* = 0$ et $1 - v^* - bu^* = 0$.

Les droites $u = 0$ et $v = 0$ sont respectivement isoclines nulles verticale et horizontale : le quadrant positif $D = \{(u, v) / u \geq 0, v \geq 0\}$ est un domaine positivement invariant. S'il doit exister un cycle limite, il est nécessairement autour de (u^*, v^*) .

D est aussi simplement connexe, on le choisit pour appliquer les critères de Bendixson et Dulac.

$$f(u, v) = u(1 - u - av) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = 1 - 2u - av$$

$$g(u, v) = rv(1 - v - bu) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial v} = r(1 - 2v - bu)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} &= 1 - 2u - av + r(1 - 2v - bu) \\ &= 1 + r - u(2 + rb) - v(a + 2r) \end{aligned}$$

Le signe de la quantité $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ n'est pas clair, le critère de Bendixson ne permet pas de conclure et d'exclure la présence de cycle limite.

Soit $B(u, v) = \frac{1}{uv}$. Alors :

$$Bf(u, v) = \frac{u}{uv}(1 - u - av) \Rightarrow \frac{\partial Bf}{\partial u} = -\frac{1}{v}$$

$$Bg(u, v) = \frac{rv}{uv}(1 - v - bu) \Rightarrow \frac{\partial Bg}{\partial v} = -\frac{r}{u}$$

Ainsi, la quantité $\frac{\partial Bf}{\partial u} + \frac{\partial Bg}{\partial v} = -\frac{r}{u} - \frac{1}{v}$ est toujours strictement négative sur D . On peut donc exclure la présence d'un cycle limite dans D .

4. Applications en dynamique des populations

4.1. Le modèle de Holling

Nous avons vu au chapitre précédent qu'une amélioration du modèle de Lotka-Volterra était d'inclure une limitation de la croissance des proies (de type logistique), ou/et de modifier la réponse fonctionnelle du prédateur. La réponse fonctionnelle étudiée jusque là, $f(N) = bN$, était une réponse proie-dépendante de Holling Type I, qui suppose que le prédateur peut consommer un nombre illimité de proies.

Holling (1959) a lui-même amélioré cette hypothèse en proposant une réponse fonctionnelle de type II, de la forme :

$$f(N) = \frac{bN}{1+bhN}$$

où h représente ce qu'il a appelé le « handling time » (traduit souvent comme « temps de manipulation », qui représente le temps que met le prédateur pour trouver, manipuler, ingérer et digérer sa proie.

Le modèle de Holling avec une croissance logistique des proies et une réponse fonctionnelle de type II s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{bN}{1+bhN} P \\ \dot{P} = P \left(e \frac{bN}{1+bhN} - d \right) \end{cases}$$

• *Recherche des points d'équilibre*

Les trois points d'équilibre sont :

$$(0,0), (K,0) \text{ et } (N^*, P^*) = \left(\frac{d}{eb-dbh}, \frac{reK(eb-dbh)-red}{K(eb-dbh)^2} \right).$$

Le dernier point d'équilibre a un intérêt biologique si et seulement si $eb > dbh$ et

$$K > \frac{d}{eb-dbh} \Rightarrow K > N^*.$$

• *Étude de stabilité locale (linéarisation)*

La matrice Jacobienne est : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}N - \frac{b}{(1+bhN)^2}P & -\frac{bN}{1+bhN} \\ \frac{eb}{(1+bhN)^2}P & -d + \frac{ebN}{1+bhN} \end{pmatrix}$

$\mathbf{A}_{(0,0)}^* = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$ On a deux valeurs propres r et $-d$ de signe contraire.

Donc (0,0) est un Point Selle

$$\mathbf{A}_{(K,0)}^* = \begin{pmatrix} -r & \frac{bK}{1+bhK} \\ 0 & -d + \frac{ebK}{1+bhK} \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A}_{(K,0)}^*) = -r \left(-d + \frac{ebK}{1+bhK} \right)$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}_{(K,0)}^*) = -r - d + \frac{ebK}{1+bhK}$$

Si $K > \frac{d}{eb-dbh}$, $\det(\mathbf{A}_{(K,0)}^*) < 0$ donc $(K,0)$ est un Point selle

Si $K < \frac{d}{eb-dbh}$, $\det(\mathbf{A}_{(K,0)}^*) > 0$ et $\text{tr}(\mathbf{A}_{(K,0)}^*) < 0$ donc $(K,0)$ est stable (noeud

stable).

$$\mathbf{A}_{(N^*,P^*)}^* = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K} N^* - \frac{b}{(1+bhN^*)^2} P^* & -\frac{bN^*}{1+bhN^*} \\ \frac{eb}{(1+bhN^*)^2} P^* & -d + \frac{ebN^*}{1+bhN^*} \end{pmatrix}$$

$$\text{Or, } (N^*, P^*) \text{ vérifie } \begin{cases} \dot{N} = N^* \left(r \left(1 - \frac{N^*}{K} \right) - \frac{b}{1+bhN^*} P^* \right) = 0 \Rightarrow r \left(1 - \frac{N^*}{K} \right) = \frac{b}{1+bhN^*} P^* \\ \dot{P} = P^* \left(e \frac{bN^*}{1+bhN^*} - d \right) = 0 \end{cases}$$

Donc la jacobienne devient :

$$\mathbf{A}_{(N^*,P^*)}^* = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K} N^* - r \left(1 - \frac{N^*}{K} \right) \cdot \frac{1}{(1+bhN^*)} & -\frac{bN^*}{1+bhN^*} \\ \frac{eb}{(1+bhN^*)^2} P^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}_{(N^*,P^*)}^*) = \frac{bN^*}{1+bhN^*} \cdot \frac{eb}{(1+bhN^*)^2} P^* > 0$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}_{(N^*,P^*)}^*) = r - \frac{2r}{K} N^* - r \left(1 - \frac{N^*}{K} \right) \cdot \frac{1}{(1+bhN^*)}$$

Si $N^* < \frac{K}{2} - \frac{1}{2bh}$, $\text{tr}(\mathbf{A}_{(N^*,P^*)}^*) > 0$ et (N^*, P^*) est instable (foyer instable).

Si $N^* > \frac{K}{2} - \frac{1}{2bh}$, $\text{tr}(\mathbf{A}_{(N^*,P^*)}^*) < 0$ et (N^*, P^*) est stable (foyer stable).

• *Portraits de phase*

Isoclines nulles dans le plan (N,P) :

- Isoclines verticales :

$$\dot{N} = N \left(r \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{b}{1+bhN} P \right) = 0 \Leftrightarrow N = 0 \quad \text{ou} \quad P = \frac{r}{b} \left(1 - \frac{N}{K} \right) (1+bhN)$$

L'isocline $P = \frac{r}{b} \left(1 - \frac{N}{K} \right) (1+bhN)$ représente, dans le plan (N,P) , une parabole concave

passant par $\left(-\frac{1}{bh}, 0 \right)$ et $(K, 0)$, et qui a son sommet en $N^+ = \frac{K}{2} - \frac{1}{2bh}$.

- Isoclines horizontales :

$$\dot{P} = P \left(e \frac{bN}{1+bhN} - d \right) = 0 \Leftrightarrow P = 0 \quad \text{ou} \quad N = \frac{d}{eb-dbh}$$

Sens des flèches :

$$-\dot{N} > 0 \Leftrightarrow r \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{b}{1+bhN} P > 0 \Leftrightarrow P < \frac{r}{b} \left(1 - \frac{N}{K} \right) (1+bhN)$$

Donc en dessous de la parabole $P = \frac{r}{b} \left(1 - \frac{N}{K} \right) (1+bhN)$, la population de proies augmente ($\Rightarrow$), et inversement, au-dessus de cette droite, elle diminue ($\Leftarrow$).

$$-\dot{P} > 0 \Leftrightarrow N > \frac{d}{eb-dbh}$$

Donc à droite de la droite d'équation $N = \frac{d}{eb-dbh}$, la population de prédateurs augmente ($\Uparrow$), et inversement, à gauche de cette droite, elle diminue ($\Downarrow$).

Il y a donc trois portraits de phase possibles :

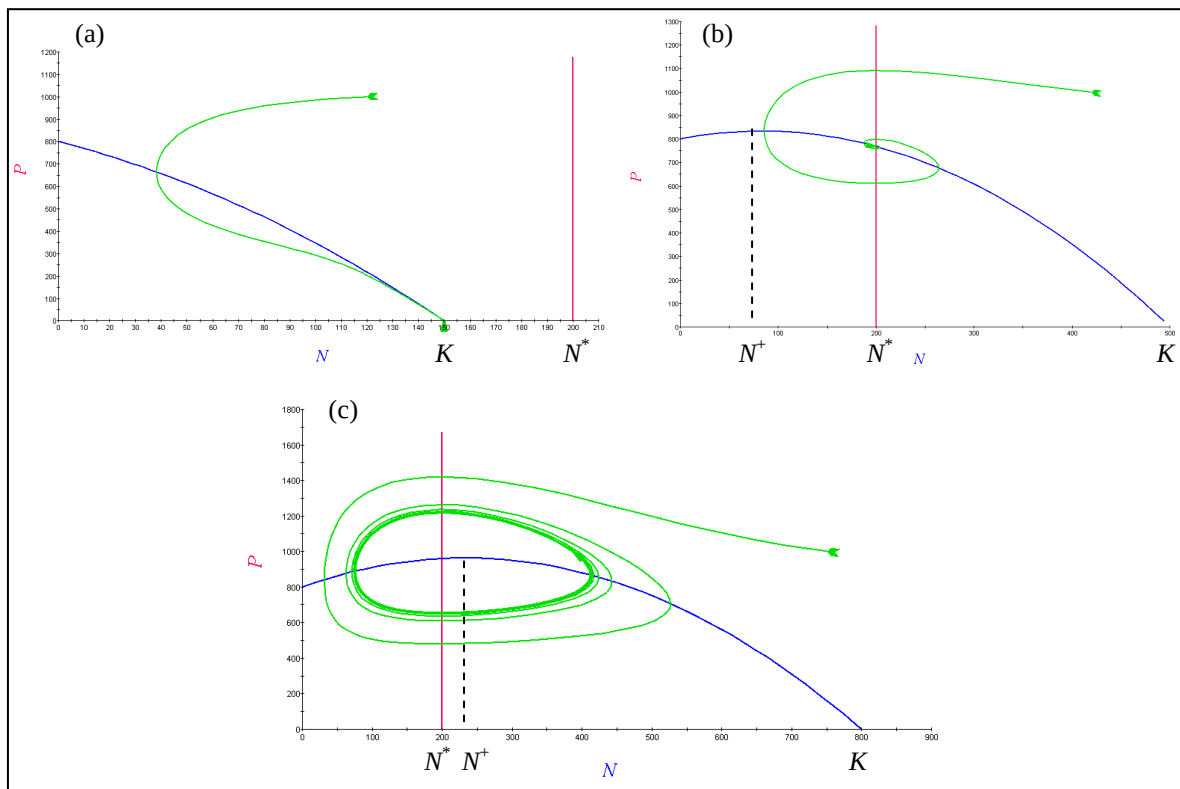


Figure 23 : Portraits de phase du modèle de Holling pour (a) $K < N^*$, (b) $N^+ < N^* < K$ et (c) $N^* < N^+$.

• Allure des chroniques

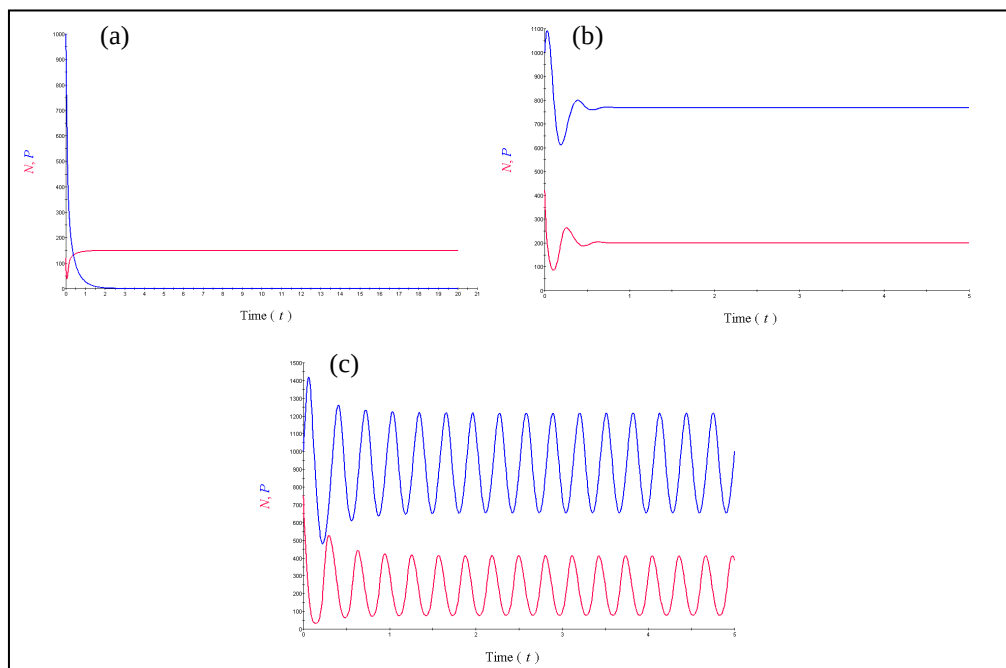


Figure 24 : Allures des chroniques du modèle de Holling pour (a) $K < N^*$, (b) $N^+ < N^* < K$ et (c) $N^* < N^+$.

Si la capacité limite de la proie est relativement faible $\left(K < \frac{d}{eb - dbh} \right)$, le modèle prédit,

comme avec une réponse fonctionnelle de type I, l'extinction du prédateur et la stabilisation de la proie à sa capacité limite (Fig. 23 (a) et Fig. 24 (a)).

Si la valeur de K augmente ($N^+ < N^* < K$), le modèle prédit la coexistence des proies et des prédateurs (Fig. 23 (b) et Fig. 24 (b)).

Enfin, si la valeur de K augmente encore et que N^* devient inférieur à N^+ , les trois points d'équilibre sont instables et on a un cycle limite stable autour de (N^*, P^*) (Fig. 23 (c)). Les densités de populations oscillent donc continuellement au cours du temps (Fig. 24 (c)).

La capacité limite K peut être vue comme la quantité de nourriture disponible pour les proies, et caractérise ainsi la « richesse » du milieu. Quand le milieu s'enrichit ou que la proie exploite plus efficacement son milieu (K augmente), l'analyse qualitative du modèle nous montre que le système devient instable. C'est ce qu'on appelle le « paradoxe de l'enrichissement » de Rosenzweig (1973). Quand le modèle de Rosenzweig a été publié, on pensait couramment que les milieux les plus riches étaient aussi les plus stables (par exemple les forêts tropicales). Or, ce travail a montré que l'inverse était possible en faisant une série de déductions logiques à partir d'hypothèses non aberrantes *a priori*.

Il ne faut pas forcément conclure que l'idée précédente est fausse, et que ce sont au contraire les milieux les plus pauvres qui sont les plus stables. Le débat n'est d'ailleurs pas clos aujourd'hui. Simplement, et c'est l'une des utilités d'un modèle, l'article de Rosenzweig a montré que l'idée communément admise pouvait être fausse dans certains cas.

4.2. Le modèle de Holling-Tanner

[..\HollingTanner_FisherJulienneRogues.pdf](#)