Partie Algèbre

Contenu de la matière :

Algèbre 1

Rappels : *Lois de décomposition internes, groupes, anneaux et corps.*

Espaces vectoriels *: Bases et dimensions finies.*

Applications linéaires *: noyau, image.*

Opérations sur les applications linéaires : *théorème sur le rang d'une application linéaire.*

Partie 1 :

Structures Algébrique usuelles

1. Loi de composition internes :

1.1. Définition : Soit E un ensemble. Une loi de composition interne sur E est une application de E×E dans E. Si on la note $\begin{matrix} E\times E \to E \\ (a,b)\mapsto a*b \end{matrix}$, on parle de la loi $*$ et on dit que a$*$b est le compose de a et b pour la loi $*$.

Exemples : Sur E=Z, l'addition définie par $\begin{matrix} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ (a,b)\mapsto a+b \end{matrix}$, la multiplication $\begin{matrix} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ (a,b)\mapsto a\times b \end{matrix}$ et la soustraction $\begin{matrix} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ (a,b)\mapsto a-b \end{matrix}$ sont des lois de composition internes. Ce n'est pas le cas de la division car a/b n'est pas défini pour tous les couples (a, b) d'entiers.

1.2. Propriétés : dans tout ce paragraphe (E,*) désigne un ensemble muni d'une L.C.I

a) **Associativité :** on dit que * est associative lorsque, pour tout x, y, z de E : $x*(y*z)=(x*y)*z$

b) **Commutativité :** on dit que * est commutativité lorsque, pour tout x, y de E : $x*y=y*x$.

c) **Elément neutre :** soit $e\in E$,on dit que e est élément neutre pour * lorsque pour tout $x\in E$, $x*e=e*x=x$ (les deux égalités doivent être vérifiée lorsque * n'est pas commutative)

d) **Symétrique :** on suppose ici que E admet un neutre e pour *.
Soit x, x' deux élément de E. en dit que x' est symétrique de x (pour *), x est inversible (symetrisable) lorsque $x*x'=x'*x=e$.

e) **Distribution :** on suppose que E est muni d'une deuxième l.c.i notée ♯, on dit que * est distributive sur ♯ lorsque pour tous x, y, z de E :$x*(y♯z)=(x*y)♯(z*x) et$

f) $(y♯z)*x=(y*x)♯(z*x)$ *

g) **Monoïde :** soit (E ,*) un monoïde (ainsi* est associative alors l'ensemble s des éléments symétrisable de E est stable par *.

1.3. Stabilité :

(E,*) désigne toujours un ensemble muni d'une l.c.i. soit F une partie de E. on dit que F est stable par * lorsque pour tous x, y de F, $x*y$ est encore dans F. dans ce cas, on pourra dire que * définit par restriction une l.c.i sur F.

Exemple : voir le td 04 exercice n01

2. Groupes :

Un groupe est un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne (G, *) tels que :

- * est associative ;
- * admet un neutre e ;

- Tout élément de G est symétrisable (admet un symétrique) pour *.

Si * est commutative, on dit que (G, *) est commutatif, ou encore abélien.

2.1. Sous-groupes :

Soit (G,*) un groupe. On dit qu'une partie H de G est un sous-groupe de G si :

i) $H \neq \varnothing$ et $x * y \in H, \forall x, y \in H$

ii)(H,*) est un groupe

Proposition : soit (G,*) un groupe et $H \subset G$. Alors H est un sous-groupe de

$$G \Leftrightarrow \begin{cases} H \text{ est non vide} : (H \neq \varnothing) \\ x * y^{-1} \in H, \forall x, y \in H \end{cases}$$

Exemple : $\{e\}$ est un sous-groupe de G.

3. Structure d'anneaux :

Définition : on appelle anneau, tous ensemble A muni de deux lois de composition interne + et $\times$ telles que :

- (A,+) est un groupe abélien (on notera 0 ou 0_A l'élément neutre de +)
- $\times$ est associative et distribution par rapport à +

Si de plus $\times$ est commutative, on dit que (A,+, $\times$) est un anneau commutatif.

4. Corps : on dit qu'un anneau unitaire $(\mathrm{K}, +, \times)$ est un corps si tout élément non nul de K est inversible pour la loi $\times$.

Si de plus $\times$ est commutatif, on dit que K est un corps commutatif

Partie 2 :

Espaces vectoriels

1.1.Espace vectoriel :

Définition : *un espace vectoriel (en abrégé e.v) sur un corps* $\mathbb{K}$ *est un ensemble E, muni de deux lois + et* $*$, *la loi + étant une application de* $E\times E\to E$, *la loi* $*$ *(multiplication par un scalaire) étant une l'application* $\mathbb{K}\times E\to E$ *telles que :*

1. $(E,+)$ *est un groupe commutatif (avec élément neutre noté* 0_E
2. $\forall\alpha\in\mathbb{K}, v_1,v_2\in E, \alpha*(v_1+v_2)=\alpha*v_1+\alpha*v_2$
3. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}, v_1\in E, v_1*(\alpha+\beta)=\alpha*v_1+\beta*v_1$
4. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}, v_1\in E, v_1*(\alpha\bullet\beta)=\alpha*(\beta\bullet v_1)$
5. $\forall v_1\in E, 1\bullet v_1=v_1$ *(*$1_{\mathbb{K}}$ *est l'élément unité de* $\mathbb{K}$ *)*

- *Les éléments de E sont appelés : vecteurs et de* $\mathbb{K}$ *scalaires*

Exemple :

1.2.Sous espace vectoriel :(s.e.v)

Si E est un e.v sur $\mathbb{K}$ *on dit que F est* ***sous espace vectoriel*** *de E*

1. $F\neq\varnothing$ $(0_E\in F)$
2. *Stable par addition c.a.d* $\forall v_1,v_2\in F, v_1+v_2\in F$
3. *Stable par multiplication par scalaires* $\forall v\in F,\forall\alpha\in\mathbb{K},\alpha v\in F$

Proposition : *soit* $F\in E$ *, alors F est un sous-groupe vectoriel de E si et seulement si on a*

1. $0_E\in F$ $(F\neq\varnothing)$
2. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall x,y\in F,\alpha x+\beta y\in F$

Exemple :

1) $\{0_E\}$ *et E sont des s.e.v de E*
2) *Si* $\varnothing\neq A\subset E$ et $0_E\notin A\Rightarrow A$ *n'est pas un s.e.v de E*

Proposition : *si F et G sont deux s.e.v de E, alors* $F\cap G$ *n'est pas un s.e.v de E par contre* $F\cup G$ *n'est pas un s.e.v en général)*

3.1. Bases et dimension :

3.1.1. Familles libres, génératrices, bases :

1. Définitions :

- **Définition de famille libre, liée, indépendance linéaire** :

Une famille (une collection) $F=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,......,\vec{v}_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E est dite liée s'il existe des nombres $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que :

$\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+.....+\lambda_n\vec{v}_n=\vec{0}$

On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1,\vec{v}_2,......,\vec{v}_n$ sont linéairement dépendants.

Dans le cas contraire, on dit que la famille est libre. Dire qu'une famille $F=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,......,\vec{v}_n)$ est libre signifie que si $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ vérifient $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+.....+\lambda_n\vec{v}_n=\vec{0}$, alors on a forcément $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

- **Définition de famille génératrice :**

On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de E est génératrice de E si $E=Vect(\mathcal{F})$, i.e. tout vecteur $\vec{u}$ de E est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.

- **Définition de base :**

Une famille $\mathcal{F}$ de E est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de E.

2. Bases et coordonnées :

- Proposition : *La famille $B=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,......,\vec{v}_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur $\vec{v}$ de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $\vec{v}_i \in B$. Autrement dit :*

$$\forall \vec{v}\in E, \exists! \lambda_1,\lambda_2,....\lambda_n \in \mathrm{K} \text{ tel que } \vec{v}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+.....+\lambda_n\vec{v}_n$$

Les nombres $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ s'appellent les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base B.

- La base canonique de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n$...) :

Définition *: La base $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,......,\vec{e}_n)$ s'appelle la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

*Les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}=x_1+x_2+...+x_n \in \mathbb{K}^n$ dans cette base sont simplement les composantes x_i de $\vec{v}$. **Attention**, cela ne se produit que dans cette base particulière.*

-Famille libre de $\mathbb{R}^n$:

Toute famille libre $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base de $B=Vect(\mathcal{F})$.

Par exemple, deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$ forment une base du plan engendré par ces deux vecteurs.

II – Dimension d'un espace vectoriel :

1. Définitions :

- **Théorème fondamental : dimension et cardinal des bases :**

*Soit E un espace vectoriel $\neq\{\vec{0}\}$ et engendré par n vecteurs. Alors toutes les bases de E possèdent le même nombre d'éléments. Ce nombre entier (ou le cardinal) s'appelle la dimension de E et se note dim E. On a de plus **dim $E\leq n$** dans ce cas.*

Par convention, on pose dim$\{\vec{0}\}$=0.

2. Conséquences importantes

Théorème : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :*

i) *Toute famille libre $\mathcal{F}$ de E vérifie **card($\mathcal{F}$) ≤ dim$E$** et **card($\mathcal{F}$)=dim$E$** implique que $\mathcal{F}$ est une base de E.*

ii) *Toute famille génératrice de E a au moins dim E éléments. Si une famille génératrice de E a exactement dim E éléments, alors c'est une base de E.*

3. Rang des systèmes de vecteurs :

- **Définition :** Soit $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\ldots, \vec{v}_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Le rang de $\mathcal{F}$ est la dimension de $Vect(\mathcal{F})$.
- **Attention** de ne pas confondre le rang et le cardinal d'une famille !
  Le cardinal est simplement le nombre d'éléments de la famille (se voit), alors que le rang est une notion plus abstraite basée sur la dimension.
- **Proposition :**
  i) On a toujours $rang(\mathcal{F}) \leq card(\mathcal{F})$.
  ii) Cas d'égalité : on a $rang(\mathcal{F}) = card(\mathcal{F})$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.

Partie 3 :

Applications linéaires

1. Définition :

On appelle application linéaire $f : E \to E$, une application possédant les propriétés suivantes :

- $f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad \forall u, v \in E$
- $f(\lambda u) = \lambda f(u), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

- Une application linéaire bijective est dite **Isomorphisme**
- Une application linéaire de E vers E est dite **Endomorphisme**
- Un isomorphisme de E vers E est dite **Automorphisme**
- Une application linéaire de E vers K est dite **Forme linéaire**

Remarque :

F est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

2. Noyau d'une application linéaire :

Si $f:E \to F$ est une application linéaire, son noyau, noté **Kerf** est l'ensemble des vecteurs de E que f annule : $Kerf := \{v \in E \mid f(v) = 0\}$.

3. Image d'une application linéaire :

Si $f:E \to F$ est une application lineaire, son image, notée Imf est l'ensemble des vecteurs de F de la forme f(v) avec $v \in E$: $Imf := \{f(v) \mid v \in E\}$.

4. . Opérations générales sur les applications linéaires :

Notation : On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F .

Proposition : $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

$\to$ Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\lambda f + g \in \mathcal{L}(E, F)$

Restriction à un sous espace vectoriel : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et G est un sous espace vectoriel de E, alors $f : G \to F$ est une application linéaire

$$x \mapsto f(x)$$

Composition : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

$$\text{En effet, } (g \circ f)(\lambda x + y) = g(f(\lambda x + y))$$
$$= g(\lambda f(x) + f(y))$$
$$= \lambda g(f(x)) + g(f(y))$$
$$= \lambda (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y).$$

Exemple du chapitre : voir la série n 04

Partie 4 :
Opérations sur les applications linéaires

1. Matrice : une application linéaire

1.1. Définition :

Soient $e_1, e_2, ..., e_n$ *une base de* E^n *et une base de* F^n *et* $f : E \mapsto F$ *une application linéaire, alors* $f(e_j) = a_{ij} f_1 + ... + a_{mj} f_n$ *et* $j = 1, ..., n$ *définit la matrice de f dans les bases* $B = (e_1, e_2, ..., e_n), B' = (f_1, f_2, ..., f_m)$ *comme* $Mat(f(B),(B')) := a_{ij}$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_i) & & f(e_m) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & .... & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & .... & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mj} & .... & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_i \\ f_m \end{array} \end{array}$$

Exemple 1 :

Soit E,F deux e.v sur K de dimension 3 et 2 respectivement et soit (e_1, e_2, e_3) *une base de E et* (u_1, u_2) *une base de F et* $f : E \mapsto F$ *une application linéaire définie*

$f(e_1) = u_1 + u_2,\ f(e_2) = 2u_1,\ f(e_3) = u_1 - u_2$

$$\text{donc } \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \end{array}$$

1.2. Rang d'une matrice :

Une matrice peut être vue comme une juxtaposition de vecteurs colonnes.

Définition :

On définit le rang d'une matrice comme étant le rang de ses vecteurs colonnes.

Exemple 2.

Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, M_{2,4}(K)$ *est par définition le rang de la famille de vecteurs de* K^2 : $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ *Tous ces vecteurs sont colinéaires à* v_1*, donc le rang de la famille* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *est 1 et ainsi rgA = 1.*