INFORMATION :

Matière: ***Mathématiques 1/ Analyse & Algèbre 1***

Crédits : 6

Coefficient : 3

Contenu de la matière :

Analyse 1 :

Théorie des ensembles.

Applications : image directe, image réciproque, injection, surjection et bijection.

Relations d'équivalences, Relations d'Ordres.

Structure de corps des nombres réels sur IR : *Relation d'ordre total sur IR, valeur absolue, intervalle, ensemble borné, raisonnement par récurrence.*

Fonctions réelles d'une variable réelle : Domaine de définition, *composition des fonctions, fonctions périodiques, fonctions paires, fonction impaires, fonction bornées, sens de variations des fonctions.*

Limites des fonctions : *Définition de limite, limite à droite, limite à gauche, limites infinies et limite à l'infini, les formes indéterminées, opérations algébriques sur les limites, limite d'une fonction composée.*

Fonctions continues : *Définition de la continuité en un point, continuité à droite, continuité à gauche, prolongement par continuité, opérations algébriques sur les fonctions continues, continuité d'une fonction composée, fonction continue sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires, fonctions monotones continues.*

Fonctions réciproques : *existence et propriétés, fonctions trigonométriques réciproques, fonctions hyperboliques.*

Chapitre 1 :

Théorie des ensembles

I. *Définition :*

*Un **ensemble** est un objet mathématique représentant une collection d'objet, appelés **éléments** de l'ensemble.*

II. *Notation :*

II.1. Nombres entiers naturels

*Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif. L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté* $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$= *{0 ;1;2 ;3;4...}.*

Exemples :

$4 \in \mathbb{N}$

$-2 \notin \mathbb{N}$

II.2. Nombres entiers relatifs

*Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif. L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté* $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} =\{\dots-3;-2\,;-1;\,0\,;1;\,2\,;\,3\dots\}$.

Exemples :

$-2 \in \mathbb{Z}$

$5 \in \mathbb{Z}$

$0{,}33 \notin \mathbb{Z}$

II.3. Nombres décimaux

*Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. L'ensemble des **nombres décimaux** est noté* $\mathbb{D}$.

Exemples :

$0{,}56 \in \mathbb{D}$

$3 \in \mathbb{D}$

¼ $\notin \mathbb{D}$ *mais* $3/4 \in \mathbb{D}$

II.4. Nombres rationnels

Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ *avec a un entier et b un entier non nul. L'ensemble des **nombres rationnels** est noté* $\mathbb{Q}$.

Exemples :

$1/3 \in \mathbb{Q}$

$4 \in \mathbb{Q}$

$-4,8 \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

II.5. Nombres réels

L'ensemble des **nombres réels** *est noté* $\mathbb{R}$. *C'est l'ensemble de tous les nombres que nous utiliserons en classe de seconde.*

Exemples :

2, 0, -5, 0.67,1/3, $\sqrt{3}$ *ou* π *appartiennent à* $\mathbb{R}$.

II.6. Ensemble vide

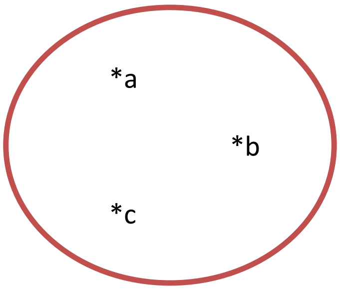
*Un ensemble qui ne contient pas de nombre s'appelle l'***ensemble vide** *et se note* $\emptyset$.

II.7. Symbole d'exclusion

*Le signe * exclu le nombre 0 d'un ensemble. Par exemple,* $\mathbb{R}^*$ *est l'ensemble des nombres réels privé de 0.*

III. Représentation d'un ensemble

a) *Graphique : les éléments de l'ensemble sont placés dans une délimitée par une courbe fermé.*



Exemple : cet ensemble A contient trois éléments a ,b et c

b) *En extension : tous les éléments que l'ensemble fini contient, sont énumérés accolades {....}.*

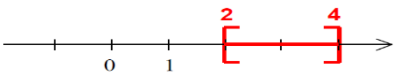
Exemple : A= { a,b,c}

c) *En compréhension : l'ensemble est défini à partir des éléments d'un autre ensemble E qui satisfont une certain propriété P.*

Forme générale : $A=\{x \in E / P(x)\}$.

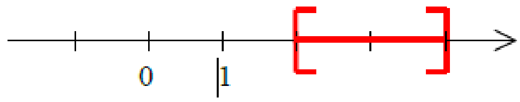
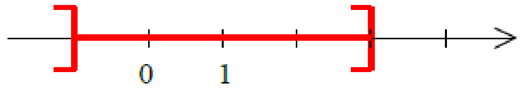
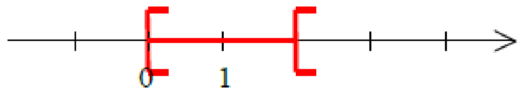
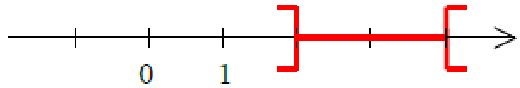
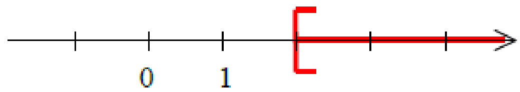
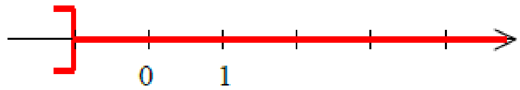
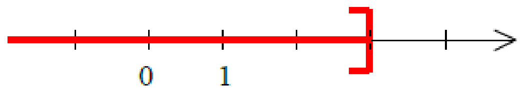
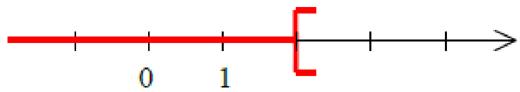
A contient tous les éléments x de E, qui vérifient la propriété P.

d) *Intervalles d'un ensemble : L'ensemble de tous les nombres réels x tels que* $2 \leq x \leq 4$ *peut se représenter sur une droite graduée.*



Cet ensemble est appelé un intervalle et se note : **[2 ; 4]**

Exemple :

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	$[\,2\,;\,4\,]$	
$-1 < x \leq 3$	$]-1\,;\,3\,]$	
$0 \leq x < 2$	$[\,0\,;\,2\,[$	
$2 < x < 4$	$]\,2\,;\,4\,[$	
$x \geq 2$	$[\,2\,;\,+\infty\,[$ ∞ désigne l'infini	
$x > -1$	$]-1\,;\,+\infty\,[$	
$x \leq 3$	$]-\infty\,;\,3\,]$	
$x < 2$	$]-\infty\,;\,2\,[$	

IV. <u>Opération sur les ensembles</u>

a) ***<u>Egalité :</u>*** *deux ensembles A et B sont égaux* ***si et seulement si*** *ils sont composés des mêmes éléments. En d'autre mots, si tous les éléments de A se trouvent également dans B et réciproquement. On écrit : A= B* ***ssi*** $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$

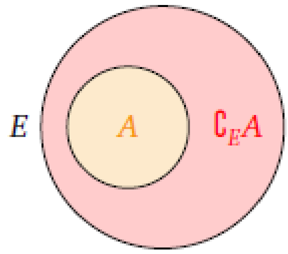
<u>Exemple</u> : Si $A = \{\,0,1,2,3,4,5,6,7\}; B = \{x \in N / \, 0 \leq x \leq 7\}$ *alors A=B*

b) L'***inclusion***. $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. Autrement dit : $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in$ **E** $(\, \mathbf{x} \in \boldsymbol{F})$ **.** On dit alors que E est un ***sous-ensemble*** de F ou une ***partie*** de F.

c) ***Ensemble des parties*** de E. On note P (E) l'ensemble des parties de E. Par exemple si E = {1,2,3} : P({1,2,3}) = $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

d) ***Complémentaire***. Si $A \subset E$,

$$\boldsymbol{C_E A = \{x \in E /\ x \notin A\}}$$

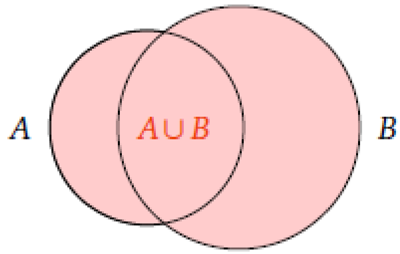


On le note aussi E /A et juste CA s'il n'y a pas d'ambiguïté (et parfois aussi A^c ou A)

e) ***Union***. Pour A, $B \subset E$,

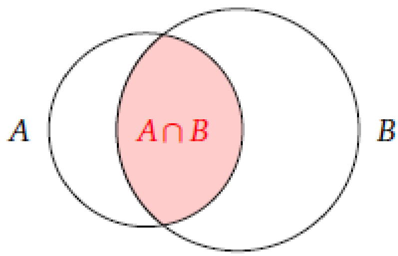
$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \; ou \; x \in B\}$$

Le « *ou* » n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en même temps.



f) ***Intersection*.**

$$A \cap B = \{x \in E / x \in Aet \; x \in B\}$$



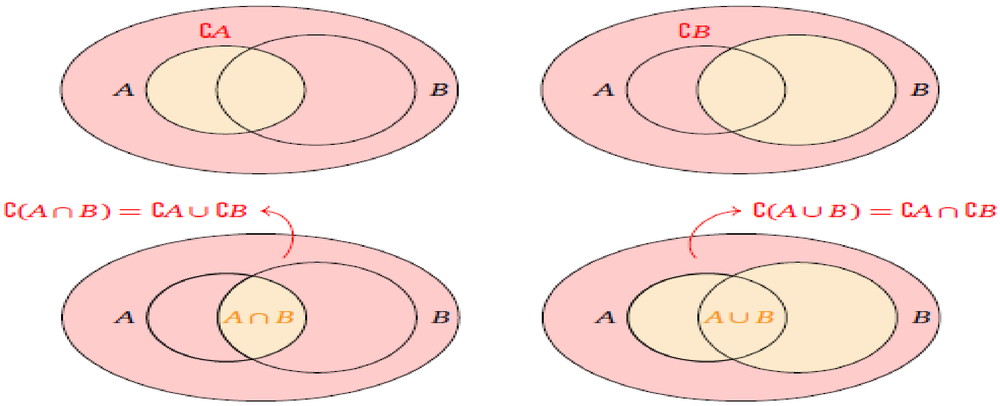
V. ***Règles de calculs***

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

- $A \cap B = B \cup A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut donc écrire $A \cap B \cap C$ sans ambigüité)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$, $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$
- $A \cup B = B \cup A$

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut donc écrire $A \cup B \cup C$ sans ambiguïté)
- $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$, $A\_ B \leftrightarrow A \cup B = B$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $C(CA)$=A et donc $A \subset B \leftrightarrow CB \subset CA$
- $C(A \cap B) = CA \cup CB$
- $C(A \cup B) = CA \cap CB$

Voici les dessins pour les deux dernières assertions



VI. Produit Cartésien :

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien**, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$

$$E \times F = \{ (x,y) \; ; \; x \in E \text{ et } y \in F \}$$

Si *Card E = m et Card B =n alors*

$Card\ E \times F = m.n$

Exercice :

Soient A={ 1,2,3} et B ={0,1,2,3}

D'écrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$.

Solution :

$A \cap B = \{1,2,3\}$; ,$A \cup B = \{0,1,2,3\}$

Remarque

Comme $A \subset B$ on a $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

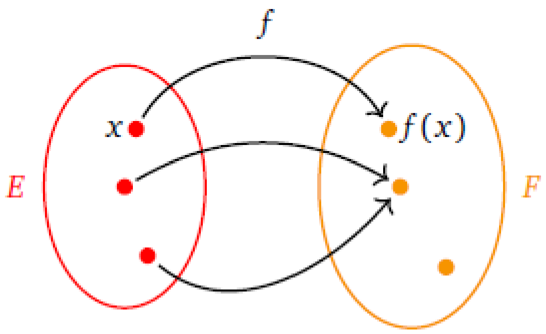
$A \times B = \{(1,0), (1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3), (3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

Remarque Card $(A \times B)$ = Card $(A) \times$ Card $(B) = 3\times4= 12$

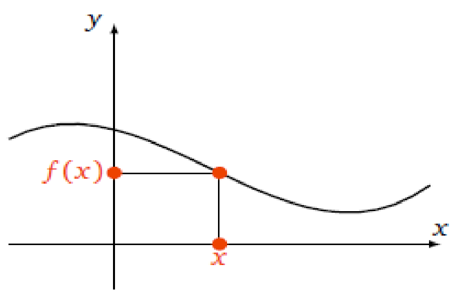
VII. Applications

VII.1. Définition :

*Une **application** (ou une **fonction**) $f : E \to F$, c'est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de F noté $f(x)$. Nous représenterons les applications par deux types d'illustrations : l'ensemble de départ (et celui d'arrivée) est schématisé par un ovale ses éléments par des points. L'association $x \to f(x)$ est représentée par une flèche.*



L'autre représentation est celle des fonctions continues de R dans R (ou des sous-ensembles de R). L'ensemble de départ R est représenté par l'axe des abscisses et celui d'arrivée par l'axe des ordonnées. L'association $x \to f(x)$ est représentée par le point $(x, f(x))$.



Notation : l'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E.

- ***Egalité de deux applications :** on dit que deux application f et g sont égales lorsque :*
- *F et g ont le même ensemble de définition E*
- *Fet g ont le même ensemble d'arrivée F*
- *Si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$ on note alors $f = g$*

- ***Composée de deux applications :*** *soit E,F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g est une application de F dans G. on appelle composée de f par g et on note g ∘ f*

  f: E → F et g : F→G alors g ∘ f : E →G est l'application définie par g ∘ f(x)= g(f(x))

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

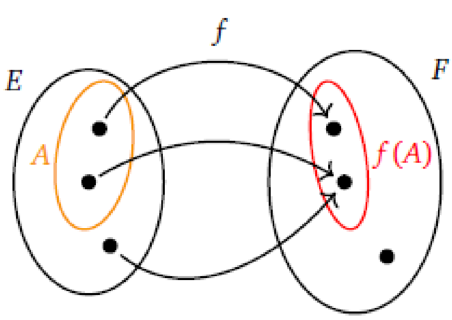
- ***<u>Identité</u> :*** *soit E un ensemble. on appelle application identité de E et on note Id_E l'application de E dans E (**E →E**) définie par **x →x***
  - ***Pour toute application f de E dans E, on a*** $f \circ Id_E = f$ ***et*** $Id_E \circ f = f$
- ***Prolongements d'une application :*** *soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F et G un ensemble contenant E. on appelle prolongement de f à G toute application g de G dans F telle que, pour tout x ∈ E , g(x) = f(x)*
-

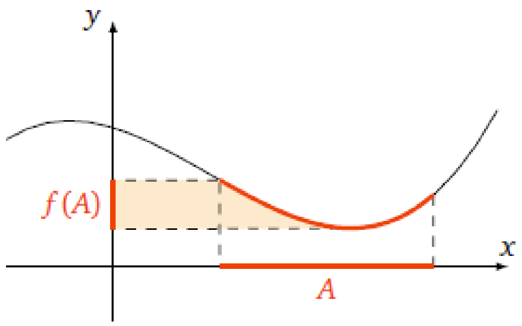
VII.2. <u>Image direct et image réciproque</u>

1) <u>Image direct</u>

Soit E et F deux ensemble, f une application de E dans F et A une partie de E. on appelle ***image direct*** *de A par f et on note f(A) le sous-ensemble de F défini par :*

$$f(A) = \{ f(x), x \in A\}$$

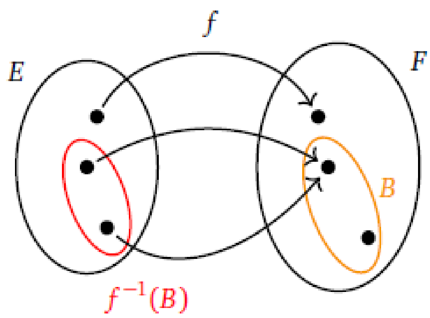


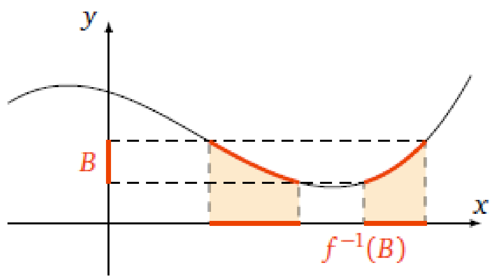


2) <u>Image réciproque</u>

Soit E et F deux ensemble, f une application de E dans F et B une partie de F. on appelle ***image réciproque*** *de B par f et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E défini par :*

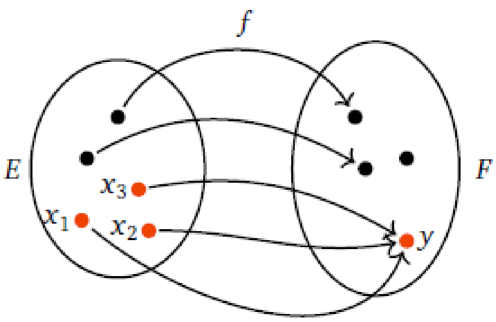
$$f^{-1}(B) = \{ x \in E , f(x) \in B\}$$

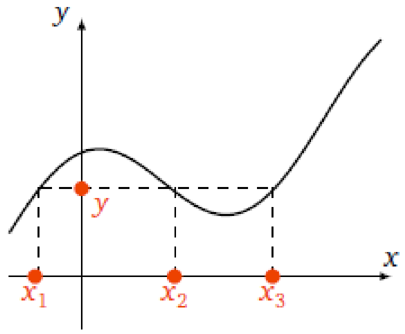




3) Image antécédents

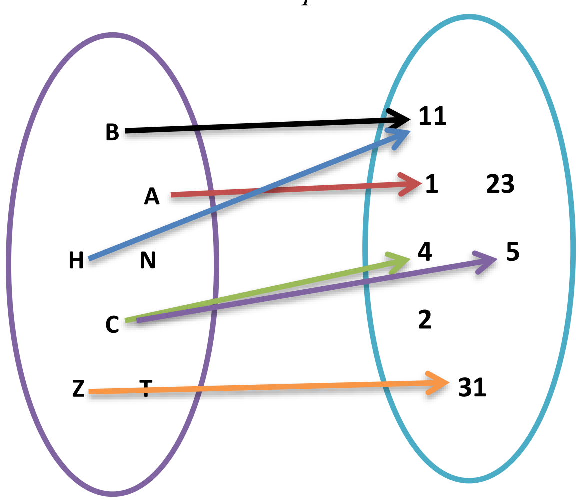
Fixons $y \in F$. tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un ***antécédent*** *de y. en termes d'image réciproque l'ensemble des antécédent de y est $f^{-1}(\{y\})$.*





Exercice :

trouvez l'image et l'antécédent de chaque élément ?



Solution :

Image d'un élément

- *A, B, H, Z ont chacun une seul image*
- *C deux images*
- *D, N, T n'ont pas d'image*

Antécédent d'un élément

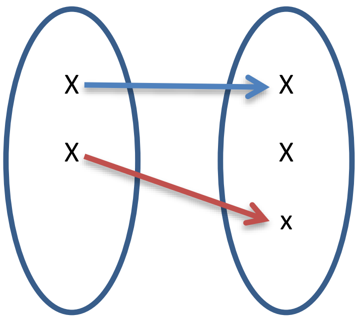
- *1, 4, 5, 31 ont chacun une seul antécédent*
- *11 deux antécédent*
- *23, 2 n'ont pas d'antécédent*

VIII. Applications injectives, surjectives et bijectives

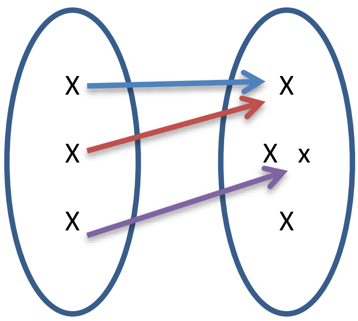
VIII.1. Application injective :

Soit f une application de E dans F. on dit que f est ***injective*** *lorsque tout élément de F posséde* ***ou plus*** *un antécédent par f ; c.a.d :*

$$\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\in \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$$



f est injective



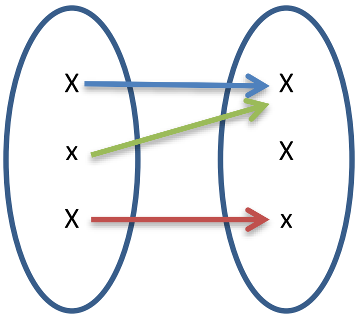
f n'est pas injective

- ***Composé de deux injections :*** *la composé de deux applications injectives est injective*

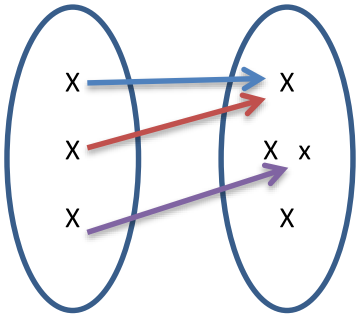
VIII.2. Application surjective :

Soit f une application de E dans F. on dit que f est ***surjective*** *lorsque tout élément de F possède* ***au moins*** *un antécédent par f ; c.à.d :*

$$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}, \exists\ \boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$



f est surjective

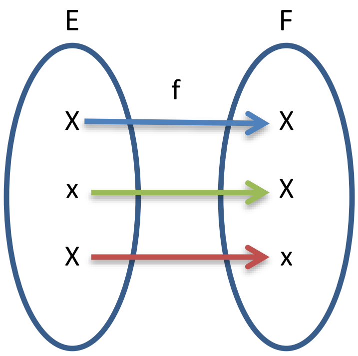


f n'est pas surjective

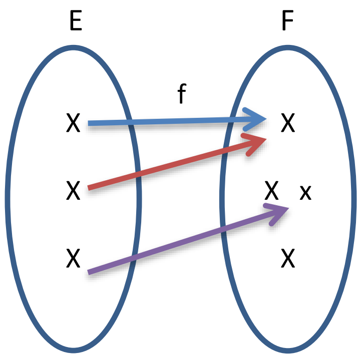
- ***Composé de deux surjectives :*** *la composé de deux applications surjectives est surjective.*

VIII.3. <u>Application bijective :</u>

Soit f une application de E dans F. on dit que f est ***bijective*** *lorsque f est à la fois injective et surjective. Autrement dit , f est bijective lorsque tout élément de F possède* ***au unique*** *un antécédent par f .*



f est bijective



f n'est pas bijective

- ***Application réciproque d'une bijection :*** *soit f une bijection de E dans F. on appelle application réciproque de f et on note* $\boldsymbol{f^{-1}}$ *l'application de F dans E qui, à tout élément y de F , associe son unique antécédent par f. par définition, on a :*

$$\forall\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E}\ \times \boldsymbol{F}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\ \leftrightarrow\ \ \boldsymbol{x} =\ \boldsymbol{f^{-1}}(\boldsymbol{y})$$

- ***Proposition :*** *soit f une bijection de E dans F et* $\boldsymbol{f^{-1}}$ ***:*** *F →E son application réciproque alors :* $\boldsymbol{f \circ f^{-1} = Id_F}$ ***et*** $\boldsymbol{f^{-1} \circ f = Id_E}$

- ***Caractérisation de la bijection réciproque :*** *une application f : E →F est bijection si et seulement si il existe une application g : F →E vérifiant f* $\circ\ f^{-1} = Id_F$ *et* $f^{-1} \circ f = Id_E$*. Dans ce cas, g est l'application de f : g =* f^{-1}

- ***Composé de deux bijections :*** *soit f une application de E dans F et g une application de F dans G. si f et g sont bijectives, alors* $g \circ f$ *est une bijective de E dans G et on a :* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

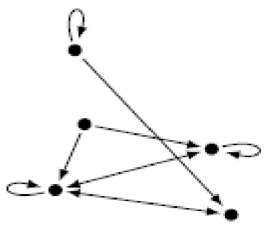
Exercice :

L'application $f : R/\{-2\} \to R$ *définie par* $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ *est-elle injective, surjective ? Quelle restriction doit-on faire sur l'ensemble d'arrivée pour que f devienne une bijection ? Dans ce cas, expliciter l'application réciproque.*

IX. Relation d'équivalence

1. Définition :

Une ***relation*** *sur un ensemble E, c'est la donnée pour tout couple (x, y) 2 E × E de « Vrai » (s'ils sont en relation), ou de « Faux » sinon.*
Nous schématisons une relation ainsi : les éléments de E sont des points, une flèche de x vers y signifie que x est en relation avec y, c'est-à-dire que l'on associe « Vrai » au couple (x, y).

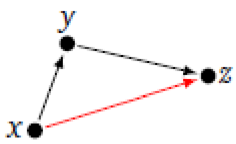


Soit *E* un ensemble et R une relation, c'est une ***relation d'équivalence*** si :

- $\forall x \in E, x\Re x$,(***réflexivité***)

- $\forall x, y \in E, x\Re y \Rightarrow y\Re x$ (***symétrie***)

- $\forall (x, y) \in E^2, x\Re y \text{ ou } y\Re x \Rightarrow x\Re z$ (***transitivité***)

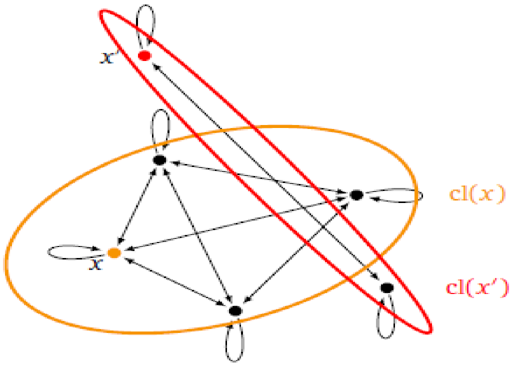


- $\forall x, y \in E, x\Re y \wedge y\Re x \Rightarrow x = y$ ***(anti-symétrique)***

2. Classes d'équivalence

Soit $\Re$ *une relation d'équivalence sur un ensemble E. Soit* $x \in E$, *la* ***classe d'équivalence*** de *x* est

$$cl(x)=\{y\in E\,/\,y\Re x\}$$



Remarque :

- *x est dit une* <u>*représentation*</u> *de la classe d'équivalence* $\dot{x}$
- *On appelle ensemble quotient de E par* $\Re$ *l'ensemble des classes d'équivalence tous les éléments de E il est noté* $E/\Re$.
- *L'application* $\begin{array}{l} E\to E/\Re \\ x\mapsto \dot{x}\end{array}$ *est appelée « **surjection canonique** »*

Exemple :

Dans $\mathbb{R}$ *on définit la relation* $\Re$ *par :* $\forall x,y\in E, x\Re y \Rightarrow x^2-1=y^2-1$

- *Montrer que* $\Re$ *est une relation d'équivalence et donner l'ensemble quotient* $\mathbb{R}/\Re$.

X. Relation d'ordre :

On dit qu'une relation binaire $\Re$ *sur E est une relation d'ordre si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.*

Remarque :

- *L'ordre est dit **total** s'il permet de comparer deux élément quelconques* $\forall(x,y)\in E^2, x\Re y$ *ou* $y\Re x$
- *L'ordre est dit **partiel** dans le cas contraire*

Exemple :

Soit $\Re$ *la relation défini sur* $\mathbb{N}^*$ *par la relation « x divisé y »vérifions qu'elle est antisymétrique*

$$\left.\begin{array}{l} x\Re y\Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}^*, y=kx \\ y\Re x\Rightarrow \exists k'\in\mathbb{N}^*, x=k'y\end{array}\right\}\Rightarrow kk'=1$$

Comme $k,k'\in\mathbb{N}^*$, *alors* $k=k'=1$ *c.à.d x=y*

Partie 2 :
Structure de corps des nombres réels sur $\mathbb{R}$

1. Corps des nombres réels :

*Il existe un ensemble, appelé **corps des nombres** réels et noté $\mathbb{R}$,muni de 2 lois (opérations) internes* **+** et **×**

$$"+":\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad\qquad "\times":\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto x+y \qquad\qquad (x,y)\mapsto x\times y$$

1.1. Addition

L'addition des réels possèdes les propriétés suivantes :

- *Commutativité : pour tous réels x et y ;* $x+y=y+x$.
- *Associativité : pour tous réels x,y et z :* $(x+y)+z=x+(y+z)$
- *0 est élément neutre : pour tout réel x :* $x+0=0+x$
- *Tout réel a un opposé :* $x+(-x)=(-x)+x=0$

En disant que ($\mathbb{R}$,+) est un groupe commutatif.

1.2. Multiplication

La multiplication des réels possèdes les propriétés suivantes :

- *Commutativité : pour tous réels x et y ;* $x\times y=y\times x$.
- *Associativité : pour tous réels x, y et z :* $(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$
- *1 est élément neutre : pour tout réel x :* $x\times 1=1\times x=x$
- *Tout réel a un inverse :* $x\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\times x=1$

En disant que ($\mathbb{R}$,+,×) est un groupe commutatif.

1.3. Relation d'ordre :

La comparaison des réels possède les propriétés suivantes :

- *Réflexivité : pour tout réel x :* $x\leq x$
- *Antisymétrie : pour tout réel x et y :* $(x\leq y \text{ et } y\leq x)\Rightarrow x=y$
- *Transitivité : pour tout réel x, y et z :* $(x\leq y \text{ et } y\leq z)\Rightarrow x\leq z$

On dit que $\leq$ est une relation d'ordre

- *On a* $\forall x,y\in\mathbb{R}, x\leq y \text{ ou } y\leq x\Rightarrow y\leq x$ *: on dit que l'ordre est totale*

De plus l'ordre est compatible avec :

- *L'addition :* $\forall x,y,z\in\mathbb{R}^3, x\leq y \Rightarrow x+z\leq y+z$
- *La multiplication par les réels positifs :* $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall z\in\mathbb{R}_+: x\leq y \Rightarrow xz\leq yz$

En disant que $(\mathbb{R},+,\times,\leq)$ *est un corps commutatif totalement ordonné*

2. La propriété de la borne supérieure :

a. Majorant et minorant :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$:

- *Un réel M est un majorant de A lorsque : $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.*
- *Un réel $m \in R$ est un minorant de A lorsque : $\forall x \in A,\ m \leqslant x$.*
- *A est une partie majorée lorsqu'il existe un majorant de A.*
- *A est une partie minorée lorsqu'il existe un minorant de A.*
- *A est une partie bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.*

b. Plus grand et plus petit élément

Soit A une partie de E.

- *A possède un plus grand élément s'il existe un élément de A qui est aussi un majorant de A.*
- *Un tel élément est nécessairement unique et est appelé le plus grand élément de A. On le note max(A).*
- *A possède un plus petit élément s'il existe un élément de A qui est aussi un minorant de A. Un tel élément est nécessairement unique et est appelé le plus petit élément de A. On le note min(A).*

c. Borne supérieure et inférieure :

Soit A une partie de R.

- *On dit que A admet une borne supérieure lorsque l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément. Dans ce cas on appelle borne supérieure de A, qu'on note sup(A), le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A.*
- *On dit que A admet une borne inférieure lorsque l'ensemble des minorants de A possède un plus grand élément. Dans ce cas on appelle borne inférieure de A, qu'on note inf(A), le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A.*

Exemple :

Trouver min, max, inf et sup des partie de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$A_1=[0,1],\ A_2=[0.2[,\ A_3=]0,1[,\ A_4=[1,+\infty[,\ A_5=]-\infty,+\infty[,\ A_6=\left\{\frac{1}{n}-1, n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

3. Valeur absolue :

Définition : *Étant donné un réel x, on appelle valeur absolue de x, qu'on note $|x|$, le réel positif défini par :*

$$|x|=\begin{cases} x & si\ x\geq 0 \\ -x & si\ x\prec 0 \end{cases}$$

Proposition :

- $\forall x\in\mathbb{R}, |x|=0 \Rightarrow x=0$
- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, |x\times y|=|x|\times|y|$
- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, |x+y|\leq|x|+|y|$ *(Première inégalité triangulaire)*
- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, ||x|-|y||\leq|x-y|\leq|x|+|y|$*(Second inégalité triangulaire)*
- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}, (y\neq 0)$
- $\forall x\in\mathbb{R}, \sqrt{x^2}=|x|$

Devoir à la maison : *montrer les propriétés (2) et (3)*

4. Intervalles de $\mathbb{R}$:

Une partie I de $\mathbb{R}$ *est un intervalle si des qu'elle contient deux réels, elle contient tous les réels intermédiaire :* $\forall (c,d)\in I^2, \forall x\in\mathbb{R}, (c\le x\le d \Rightarrow x\in I)$

On peut avoir :

- $I=\{x\in\mathbb{R}, a\le x\le b\}=[a,b]$ *Intervalle fermé borné ou segment*
- $I=\{x\in\mathbb{R}, a\le x\prec b\}=[a,b[$ *Intervalle borné semi-ouvert à droite*
- $I=\{x\in\mathbb{R}, a\prec x\le b\}=]a,b]$ *Intervalle borné semi-ouvert à gauche*
- $I=\{x\in\mathbb{R}, a< x< b\}=]a,b[$ *Intervalle borné ouvert*
- $I=\{x\in\mathbb{R}, x\ge a\}=[a,+\infty[$ *Intervalle fermé non majoré*
- $I=\{x\in\mathbb{R}, x\succ a\}=]a,+\infty[$ *Intervalle ouvert non majoré*
- $I=\{x\in\mathbb{R}, x\le b\}=]-\infty,b]$ *Intervalle fermé non minoré*
- $I=\{x\in\mathbb{R}, x< b\}=]-\infty,b[$ *Intervalle ouvert non minoré*
- $I=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$ *Intervalle ni minoré ni majoré*

Théorème (densité des rationnels) : *tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un rationnel, c.à.d* $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, (a<b), \exists r\in / a\prec r\prec b$

5. Principe de récurrence :

Soit $P(n)$ *une propriété dépendant de* $n\in\mathbb{N}$, *et* $n_0\in\mathbb{N}$ *.on suppose que :*

- *La propriétés* $P(n_0)$ *est vraie ;*
- *Pour tout entier* $n\ge n_0$, $P(n)$ *implique* $P(n+1)$.

Alors, la propriété $P(n)$ *est vraie pour tout entier* $n\ge n_0$

6. Principe de récurrence forte (ou récurrence avec prédécesseurs):

Soit $P(n)$ *une propriété dépendant de* $n\in\mathbb{N}$, *et* $n_0\in\mathbb{N}$ *.on suppose que :*

- *La propriétés* $P(n_0)$ *est vraie ;*
- *Pour tout entier* $n\ge n_0$, $(P(n_0)$ *et* $P(n_0+1)$ et $P(n))$ *implique* $P(n+1)$

Alors, la propriété $P(n)$ *est vraie pour tout entier* $n\ge n_0$

Partie 3 :

Fonctions réelles d'une variable

1. Domaine de définition :

On appelle fonction réelle d'une variable réelle, toute application f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. D est appelé domaine de définition de f et est noté D_f .

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ existe } \}$

Exemples :
$$f(x)=\frac{1}{x}, D_f=\{x\in\mathbb{R}, x\neq 0\}=\mathbb{R}^*$$
$$g(x)=\sqrt{x}, D_g=\{x\in\mathbb{R}, x\geq 0\}=[a,+\infty[$$

2. Définition (Graphe d'une fonction) :

Dans un plan rapporté à un repère (o; i, j) (généralement orthonormé). Les points M(x; f(x)) avec x ∈ D_f constituent la courbe représentative de f, noté C_f .

$C_f = \{M(x; f(x)) : x \in D_f\}$

On appelle graphe de f, l'ensemble des couples (x; f(x)) où x ∈ D_f

3. Composition des fonctions :

Trois cas génériques : Soient P(x) et Q(x) deux fonctions

1er cas *: fonction du type* $f(x)=\dfrac{P}{Q}$ — *f est définie pour tout* $Q \neq 0$

2éme cas : *fonction du type* $f(x) = \sqrt{Q}$ — *f est définie pour tout* $Q \geq 0$

3éme cas *: fonction du type* $f(x) = \dfrac{P}{\sqrt{Q}}$ — *f est définie pour tout* $Q > 0$

4. Fonctions périodiques :

La fonctions est dite paire lorsque : $\exists p\in\mathbb{R}^* : f(x+T)=f(x), \forall x\in D_f$

(La plus petite valeur positive de p est appelée la période f)

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ *et tout* $k\in\mathbb{Z}$ *on a :* $\cos(x+2k\pi)=\cos x$

$T=2\pi$ *est la période de la fonction cos(x) définie sur* $\mathbb{R}$

Remarque :
Si f est de période T alors ∀ x ∈ N : (x + nT))∈ Df ; f(x + nT) = f(x)

5. Fonctions paires :

La fonctions est dite paire lorsque : $\forall x\in D_f : f(-x)=f(x)$

$f(x)=\cos x$ *est paire car on a* $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$

6. Fonctions impaires :

la fonction f est impaire Si : $\forall x \in D_f$ *,* $f(-x) = -f(x)$

$g(x) = \sin x$ *est impaire car on a :* $\sin(-x) = \sin x$

7. Fonctions bornées :

La fonction est dite bornée si : $\exists a, A \in \mathbb{R} : a \leq f(x) \leq A \forall x \in D_f$

Comme : $-1 \leq \cos x \leq 1$ *alors la fonctions cos(x) est bornée.*

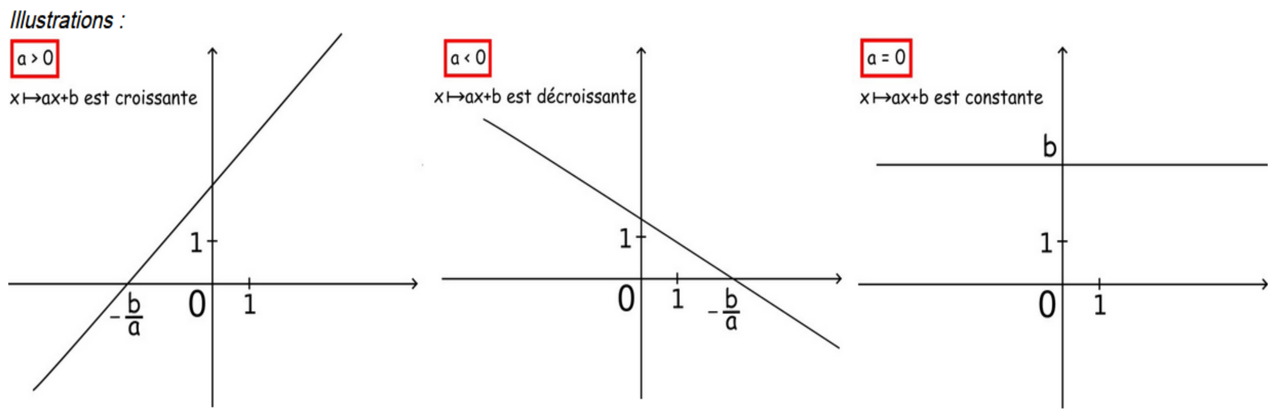
8. Sens de variation des fonctions :

Soit f la définie par ***f(x) = ax + b****.*

•* *Si* ***a>0****, alors f est croissante sur* $\mathbb{R}$.

• *Si* ***a<0****, alors f est décroissante sur* $\mathbb{R}$.

• *Si* ***a=0****, alors f est constante sur* $\mathbb{R}$.



On générale :

La fonction f définie sur D est dite :

- ***Croissante si :*** $\forall (x, x') \in D^2, (x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$
- ***Décroissante si :*** $\forall (x, x') \in D^2, (x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x'))$
- ***Strictement croissante si:*** $\forall (x, x') \in D^2, (x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))$
- ***Strictement décroissante si:*** $\forall (x, x') \in D^2, (x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'))$
- ***Monotone si*** *: elle est croissante ou décroissante*
- ***Strictement monotone si*** *: elle est strictement croissante ou strictement décroissante*
- ***Majorée si*** *:* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \leq M$
- ***Minorée si*** *:* $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \geq m$.

9. Opération sur les fonctions :

Soit f, g deux fonctions définies sur D :

- ***Une addition :*** $\forall x \in D : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- ***Une multiplication*** *:* $\forall x \in D : (f.g)(x) = f(x).g(x)$
- ***Une multiplication externe par réels*** *:* $\forall x \in D : (\alpha.f)(x) = \alpha.f(x)$
- ***Une relation d'ordre :*** $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in D; f(x) \leq g(x)$

Partie 4 :

Limites des fonctions

1. Limites :

Soit f une fonction y = f (x) définie sur un intervalle I contenant le point x_0. On dit que f admet pour limite en ce point x_0 le nombre réel L ssi :

$\forall \varepsilon > 0, \forall n > 0$ *tels que* $\forall x \in I : 0 < |x - x0| < n \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

On note : $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = l$

Remarque *: Si une fonction a une limite, cette limite est unique.*

2. Limite à droite, limite à gauche :

- *On dit que f admet une limite à droite en* x_0 *si la restriction de f à* $]x_0, +\infty[\cap I$ *admet une limites en* x_0

Notation : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *ou* $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x)$

- *On dit que f admet une limite à gauche en* x_0 *si la restriction de f à* $]-\infty, x_0[\cap I$ *admet une limites en* x_0

Notation : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ *ou* $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x)$

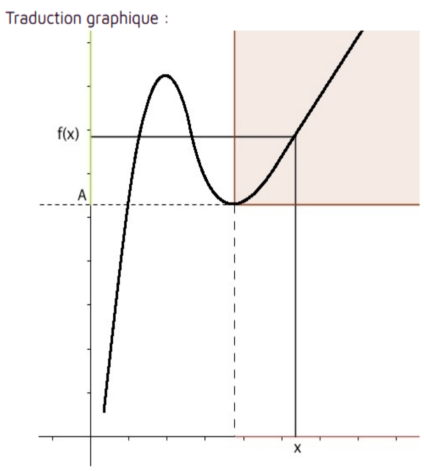
Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1 \end{cases}$

3. Limite infinies et limite à l'infini :

a. En plus l'infini :

« f(x) tend vers +∞ lorsque x tend vers +∞ » ou « f a pour limite +∞ en +∞ » signifie que tout intervalle]A ; +∞[, avec A > 0, contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$



b. En moin l'infini :

« f(x) tend vers -∞ lorsque x tend vers +∞ » ou « f a pour limite -∞ en +∞ » signifie que tout intervalle]-∞ ;B[, avec B > 0, contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

c. Limites des fonctions élémentaires

c.1. Limites en l'infini

$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	non défini	non défini

c.2. Limites en 0

$f(x)$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non défini

4. Les formes indéterminées :

Il existe des formes indéterminées tel que : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, (+\infty-\infty), 0\times\infty$

5. Operations algébrique sur les limites :

5.1. Somme de fonctions :

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

Exemple

1. *Limite en* $+\infty$ *de la fonction f définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $f(x)=x+3+\frac{1}{x}$
2. *Limite en* $+\infty$ *et* $-\infty$ *de la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=x^2+x$

5.2. Produit de fonctions :

Si f a pour limite	ℓ	$\ell\neq0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f\times g$ a pour limite	$\ell\times\ell'$	∞*	F. ind.	∞*

*Appliquer la règle des signes

Exemple :

1. *Limite en* $-\infty$ *de la fonction précédente :* $f(x)=x^2+x$
2. *Limite en* $+\infty$ *de la fonction définie sur* $\mathbf{R}+$ *par :* $f(x)=x-\sqrt{x}$

5.3. Quotient de fonctions :

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 (1)	0	∞	ℓ' (1)	∞
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞*	F. ind.	0	∞*	F. ind.

*Appliquer la règle des signes (1) doit avoir un signe constant

Exemple :

1. *Limite en* -2 *de la fonction définie sur* $\mathbf{R}-\{-2\}$ *par :* $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$

6. Limite d'une fonction composée :

Théorème : soit deux fonctions, f,g. Soient a,b et c des reéls ou $+\infty$ *ou* $-\infty$ *si :*

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} g(x)=c \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} g\left[f(x)\right]=c$$

Exemple :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ *avec* $h(x)=\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ *avec* $k(x)=\cos(\dfrac{1}{x^2+1})$

Partie 4 :

Fonctions continues

1. Définition de la continuité en un point :

Soit $f: I \to R$ une fonction et $a \in I$.

- *On dit que f est continue en a si f admet pour limite f(a) en a :*

  $\forall \varepsilon > 0, \forall n > 0$ *tels que* $\forall x \in I : |x-a| < n \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

2. Continuité à droite, continuité à gauche :

- *f est continue à droite en* $x_0 \in I$, *lorsque :* $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = f(x_0)$
- *f est continue à gauche en* $x_0 \in I$, *lorsque :* $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0)$
- *f est continue en* $x_0 \in I$, *lorsque :* $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0)$

3. Prolongement par continuité :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, *une fonction définie sur I, peut être en* x_0 $f : I \to \mathbb{R}$ *et l un nombre réel supposons que :* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$ *et définissons la fonction* $\tilde{f} : I \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *en posant*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in I (x \neq x_0) \\ l & si\ x = x_0 \end{cases}$$

ainsi la fonction $\tilde{f}$ *est continue en* x_0

- *La fonction* $\tilde{f}$ *s'appelle le prolongement par continuité de f en* x_0.

4. Opérations algébriques sur les fonctions continues :

Soient f et g des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ *supposons que f et g sont continue en* $x_0 \in I$.

- *Les fonctions* $f + g$, $f.g$ *et* λf *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *sont continuités en* x_0.
- *Si* $g(x_0) \neq 0$ *alors la fonctions* $\dfrac{f}{g}$ *est continue en* x_0.

5. Continuité d'une fonction composée :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & g(x) \arrow[r, "f"] & f(g(x)) \end{tikzcd}$$

- *Si **g** est continue en x_0 et si **f** est continue en **g** (x_0) alors $f \circ g$ est continue en x_0*

  Continuité sur un intervalle
- *Si **g** est continue sur **I** et si **f** est continue sur **g** (I) alors $f \circ g$ est continue sur I*

6. Fonction continue sur un intervalle :

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$,une fonction. Si f est continue, alors f(I) est un intervalle

Théorème : *soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue et strictement et strictement monotone, alors la bijection réciproque f^{-1}de f est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.*

7. Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit $f:[a,b]\to R$ une fonction continue. Soit $\gamma\in R$ tel que γ est compris entre f(a) et f(b) ($f(a) < \gamma < f(b)$). Alors il existe $c\in[a,b]$ tel que : $f(c)=\gamma$.

8. Fonctions monotones continues :

- *On dit que f est monotone sur I si son sens de variation ne change pas sur I. Autrement dit si elle est croissante sur tout I ou décroissante sur tout I.*
- *f est dite strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur tout I, ou strictement décroissante sur tout I.*

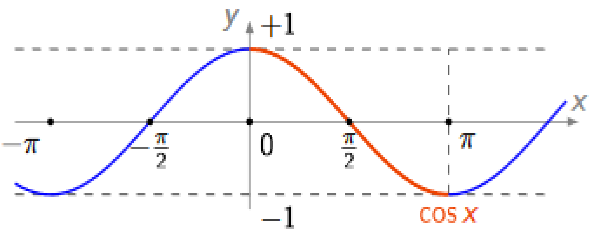
Partie 5 :
Fonctions réciproques

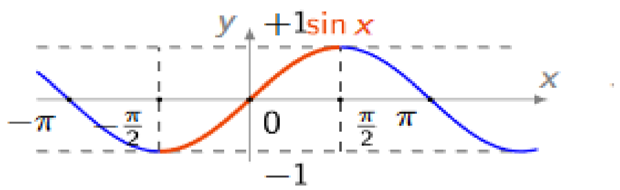
: existence et propriétés, fonctions trigonométriques réciproques, fonctions hyperboliques.

1. Définition :

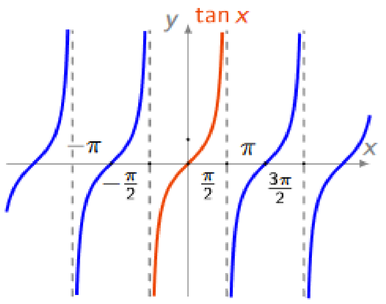
Les fonctions sinus, cosinus définies de r dans l'intervalle [-1 ;1] sont des applications surjectives par définition, c'est à dire :

$$\forall y \in [-1\,;1],\ \exists x \in \mathbb{R},\ \text{ tel que } \sin(x) = y \text{ et } \cos(x) = y\ .$$





La fonction tangente définie de $\mathbb{R}$ *{x ∈* $\mathbb{R}$ */x =2 π + k π , k ∈ z } dans* $\mathbb{R}$ *est une application surjective par définition.*



2. Fonctions trigonométriques réciproques :

- *Pour la fonction sinus, on restreint son domaine de définition à l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *et on a :*

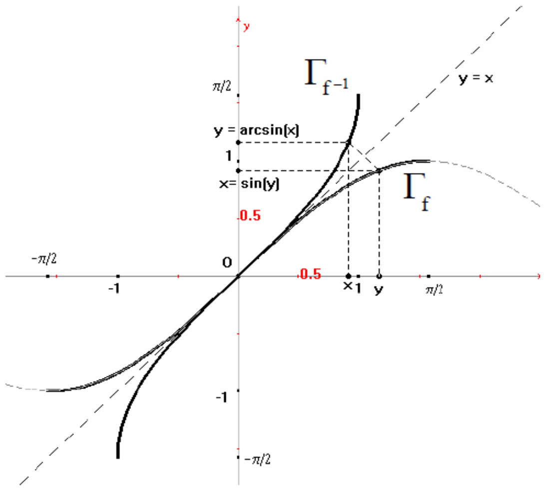
$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto \sin x$$

Alors cette fonction " sin " est bijective et on peut définir sa fonction réciproque appelée arc sinus ainsi :

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \mapsto \arcsin x$$

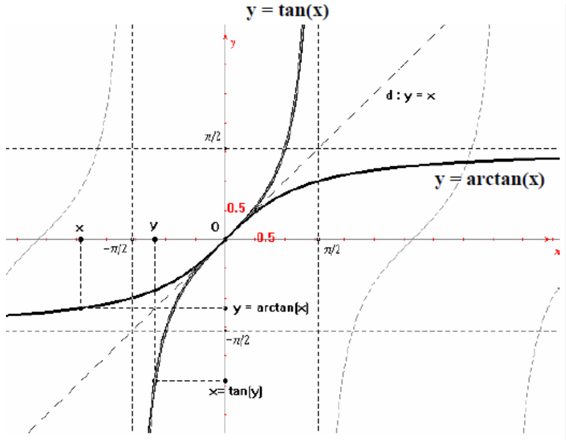
avec l'équivalence : ***y = arcsin(x) ⇔ x = sin(y)***

La représentation graphique $\Gamma_{f^{-1}}$ *d'une fonction* f^{-1}*, réciproque d'une application f bijective est toujours symétrique de* Γ_f *par rapport à la bissectrice d du premier et troisième quadrant d'équation d : y = x*



- *Pour la fonction cosinus, on restreint son domaine de définition à l'intervalle [0 ; π] et on a:*

$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto \cos x$$



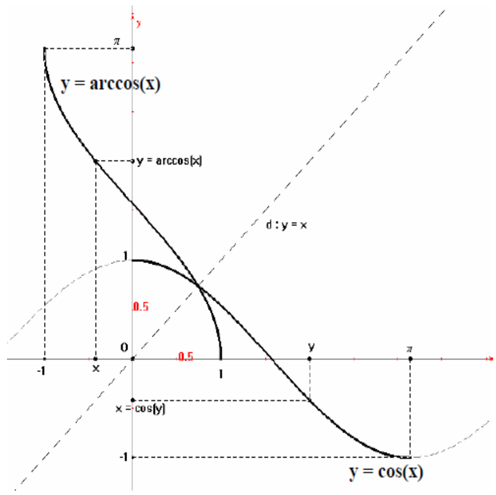
Alors cette fonction "cos" est bijective et on peut définir sa fonction réciproque appelée arc cosinus ainsi :

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$x \mapsto \arccos x$$

avec l'équivalence : ***y = arccos(x) ⇔ x = cos(y)***

- *Pour la fonction tangente, on restreint son domaine de définition à l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *et on a :*

$$\tan x : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan x$$



Alors cette fonction "tan" est bijective et on peut définir sa fonction réciproque appelée arc tangente ainsi :

$$\arctan x : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto \arctan x$$

avec l'équivalence : ***y = arctan(x) ⇔ x = tan(y)***

3. Fonctions hyperboliques directes :

a. Sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique :

On appelle fonction sinus hyperbolique la fonction :

$$shx : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto shx = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

On appelle fonction cosinus hyperbolique la fonction :

$$chx : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto chx = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

Remarques :

- *La fonction sh est impaire.*

En effet, elle est définie sur R et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $sh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2} = \frac{-e^{-x}+e^{x}}{2} = -shx$

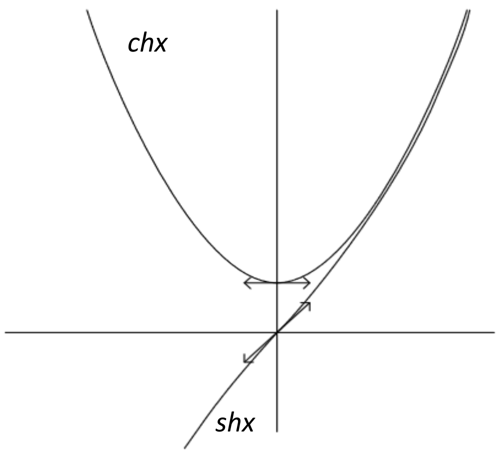
.

- *La fonction ch est paire.*

En effet, elle est définie sur R et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ *,*

on a : $ch(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = chx$

Le graphe de la fonction ch admet donc l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.



- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *, on a* $ch^2 x - sh^2 x = 1$.

Proposition :

- *La fonction sh est dérivable sur R et sa dérivée est ch.*
- *La fonction ch est dérivable sur R et sa dérivée est sh.*

b. Tangente hyperbolique :

On appelle fonction tangente hyperbolique la fonction:

$$thx : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto hx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

Remarques :

- *La fonction sh est impaire.*

En effet, elle est définie sur R et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ *, on a :* $th(-x) = \dfrac{sh(-x)}{ch(-x)} = \dfrac{-sh(x)}{ch(x)} = -thx$

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *, on a :* $1 - th^2(x) = \dfrac{1}{ch^2(x)}$

4. Fonctions hyperboliques réciproques :

1. Réciproque de la fonction sinus hyperbolique :

- *La fonction* ***sh*** *est continue et strictement croissante sur R, elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur son image R et on peut définir son application réciproque.*
- *On appelle fonction argument sinus hyperbolique, et on note :*

$$Argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto Argshx$$

L'application réciproque de la fonction sinus hyperbolique.

- *La fonction* ***Argsh*** *est dérivable sur R et Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *,* $Argsh'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2. Réciproque de la fonction cosinus hyperbolique :

- *La fonction* ***ch*** *est continue et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$ *,elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur son image* $[1, +\infty[$ *et on peut d´définir son application réciproque.*
- *On appelle fonction argument cosinus hyperbolique, et on note :*

$$Argch : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$$
$$x \mapsto Argchx$$

L'application réciproque de la restriction de la fonction cosinus hyperbolique à l'intervalle [0,+1[.

- La fonction **Argch** est d´dérivable sur]1,+1[et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Argch'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1^2}}$

3. Réciproque de la fonction tangente hyperbolique :

- La fonction th est continue et strictement croissante sur R, elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur son image] − 1, 1[et on peut d´définir son application réciproque.
- On appelle fonction argument tangente hyperbolique, et on note :

$$Argth : \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto Argthx$$

L'application réciproque de la fonction tangente hyperbolique.

- La fonction **Argth** est d´dérivable sur] − 1, 1[et pour tout $x \in$] − 1, 1[:

$$Argth'(x) = \frac{1}{th'(Argthx)} = \frac{1}{1-th^2(Argthx)}$$

et la conclusion vient du fait que th(Argth x) = x.

5. Identités et relations :

1. Quelques formules de trigonométrie hyperbolique :

Les formules de trigonométrie classiques ont des analogues en « trigonométrie hyperbolique ».

Outre la formule $\mathbf{ch^2 a - sh^2\ a = 1}$, on a par exemple

$$ch(a+b) = ch(a)\,ch(b) + sh(a)\,sh(b)$$
$$ch(a-b) = ch(a)\,ch(b) - sh(a)\,sh(b)$$
$$sh(a+b) = sh(a)\,ch(b) + ch(a)\,sh(b)$$
$$sh(a-b) = sh(a)\,ch(b) - ch(a)\,sh(b)$$
$$th(a+b) = \frac{th(a)+th(b)}{1+th(a)th(b)}$$
$$th(a-b) = \frac{th(a)-th(b)}{1-th(a)th(b)}$$

d'où l'on d´déduit

$$ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a) = 1 + 2sh^2(a)$$
$$sh(2a) = 2sh(a)ch(a)$$
$$th(2a) = \frac{2th(a)}{1+th^2(a)}$$

2. Expression des fonctions hyperboliques réciproques avec le logarithme népérien :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $Argshx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$
2. Pour tout $x \geq 1$, on a : $Argchx = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$
3. Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, on a : $Argthx = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$