TD N° ~~5~~ 2 Convolution et corrélation

Exercice 1 :

Soit les deux signaux rectangulaire $x(t)$ et $h(t)$ telle que :

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) \text{ et } h(t) = t \cdot \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

1. Représenter les deux signaux.
2. Déterminer le produit de convolution

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

3. Représenter le signal $y(t)$

Exercice 2 :

Soit un signal défini par :

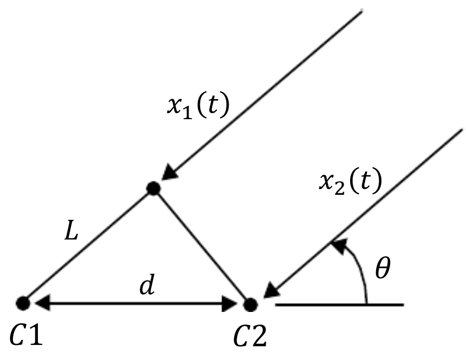
$$x(t) = 4t\big(u(t) - u(t-2)\big)$$

1. Représenter ce signal
2. Calculer sa fonction d'auto-corrélation.
3. Déterminer son énergie à partir de sa fonction d'auto-corrélation.

Exercice 3 : (Estimation de la direction d'une source)

Soit une source que l'on peut considérer comme étant à l'infini. Il est possible, à l'aide de deux capteurs $C1$ et $C2$ (fig. 1) d'estimer la direction θ de cette source.

Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$, les deux signaux reçu par les capteurs $C1$ et $C2$.



On peut considérer que le signal reçu par le capteur $C2$ est identique à celui reçu par le capteur $C1$ mais retardé du temps t_0 mis par l'onde pour parcourir la différence de trajet.

1. Trouver la relation qui permet d'exprimer t_0 en fonction de d, V et θ

Avec

d : distance entre les deux capteurs

V : la vitesse de l'onde

θ : direction de la source

2. On suppose que la source est un signal $x(t)$ ayant la forme :

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$$

On pose $x_1(t) = x(t)$ et $x_2(t) = x(t - t_0)$.

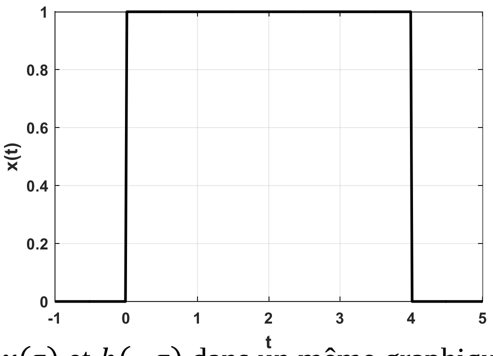
Calculer la fonction d'intercorrélation $R_{x_1x_2}(\tau)$ entre les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

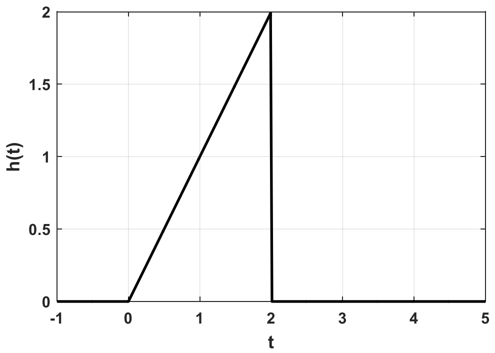
3. Comment la fonction d'intercorrélation nous permet-elle de déterminer la valeur t_0 ?

Solutions

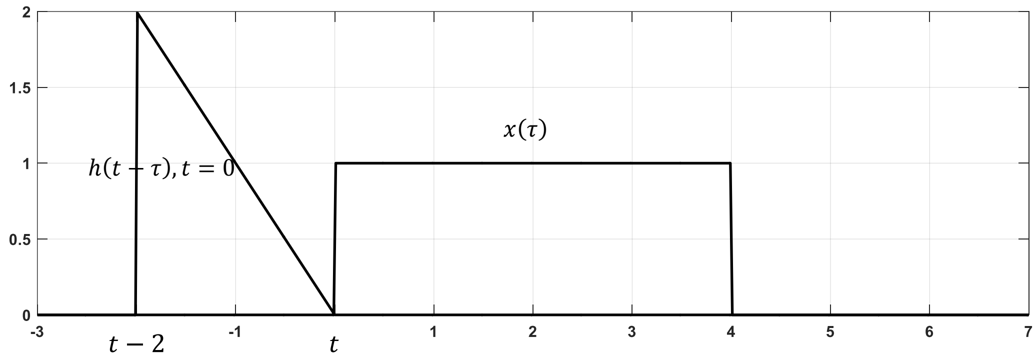
Exercice 1 :

1. Représentation des signaux $x(t)$ et $h(t)$



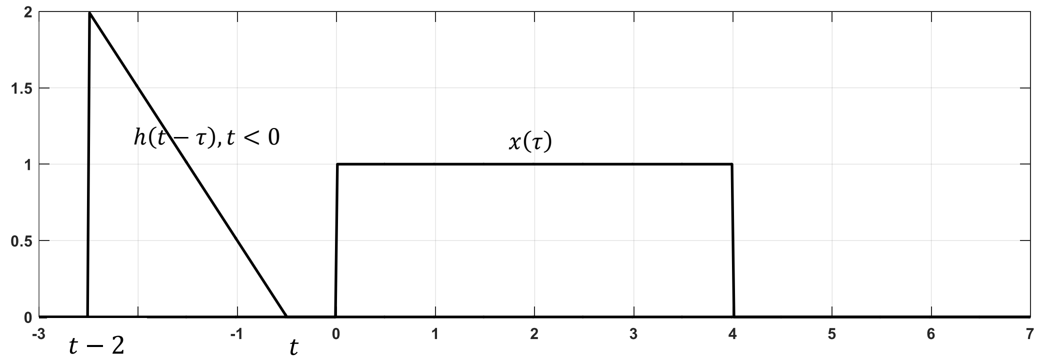


2. On trace $x(\tau)$ et $h(-\tau)$ dans un même graphique



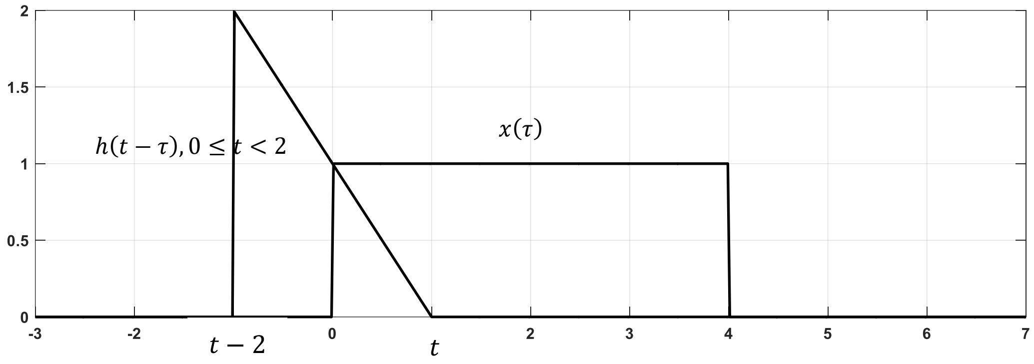
- Pour $t < 0$ pas de chevauchement entre les signaux $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$



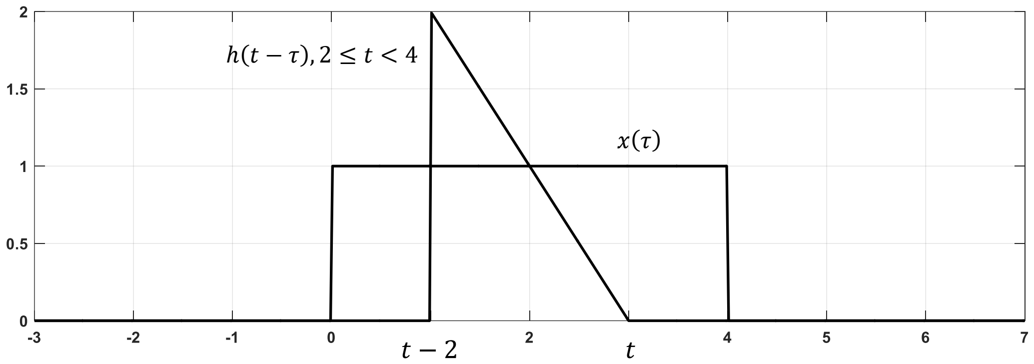
- Pour $0 \leq t < 2$ il y'a chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} 1(t-\tau)d\tau = \left[t\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2$$



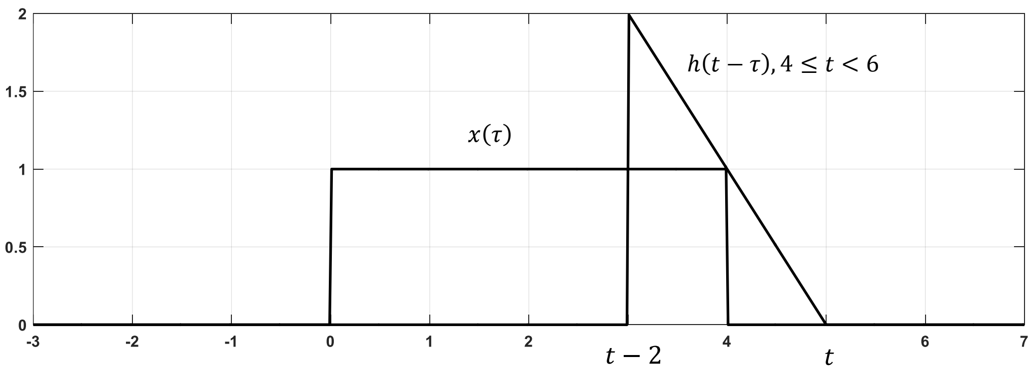
- Pour $2 \leq t < 4$ il y'a chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^{t} 1(t-\tau)d\tau = \left[t\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right]_{t-2}^{t} = 2$$



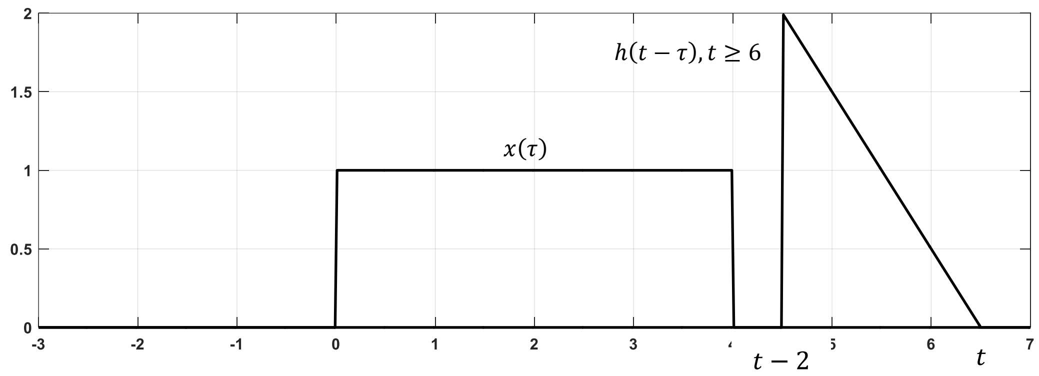
- Pour $4 \leq t < 6$ il y'a chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^{4} 1(t-\tau)d\tau = \left[t\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right]_{t-2}^{4} = -\frac{1}{2}t^2 + 4t - 6$$



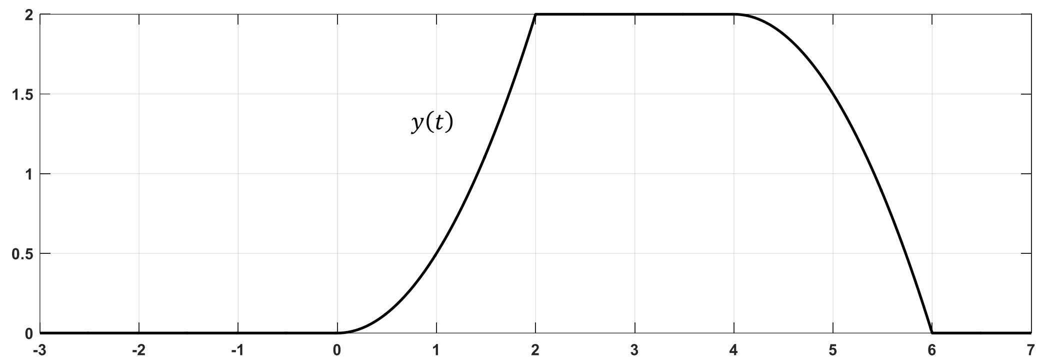
- Pour $t \geq 6$ il n'existe pas de chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$



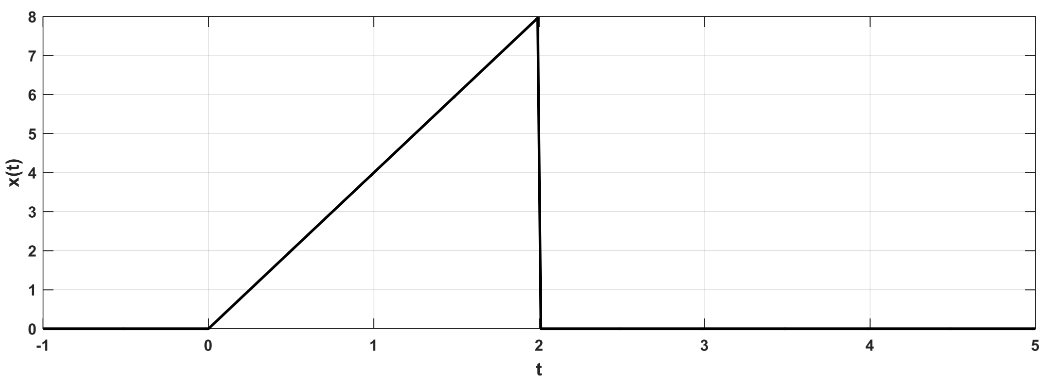
Finalement :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0 \leq t < 2 \\ 2 & 2 \leq t < 4 \\ -\frac{1}{2}t^2 + 4t - 6 & 4 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$



Exercice 2 :

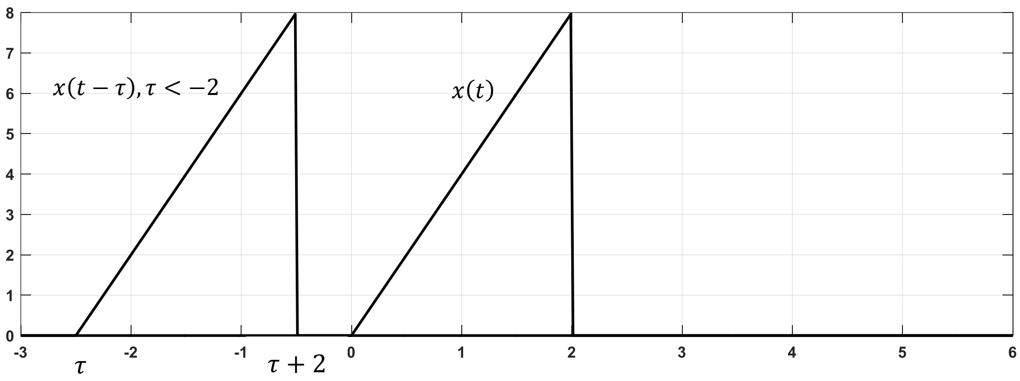
1. Représentation des signaux $x(t)$



2. On trace dans un même graphique les signaux $x(t)$ et $x(t-\tau)$

- Si $\tau + 2 < 0 \Rightarrow \tau < -2$ pas de chevauchement entre les signaux $x(t)$ et $x(t-\tau)$, alors

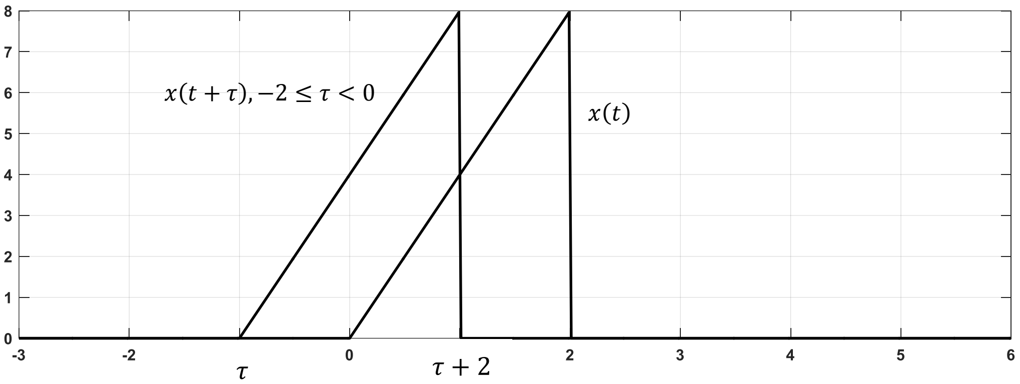
$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt = 0$$



- Si $0 \leq \tau + 2 < 2 \Rightarrow -2 \leq \tau < 0$ il existe de chevauchement entre les signaux

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt = \int_{0}^{\tau+2} 4t\big(4(t-\tau)\big)dt = 16\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}\tau t^2\right]_0^{\tau+2}$$

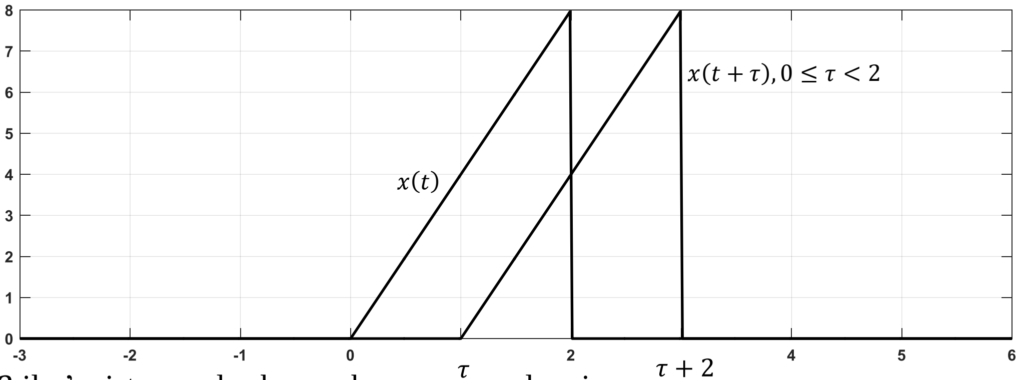
$$R_x(\tau) = -\frac{8}{3}\tau^3 + 32\tau + \frac{128}{3}$$



- Si $0 \leq \tau < 2$ il existe de chevauchement entre les signaux

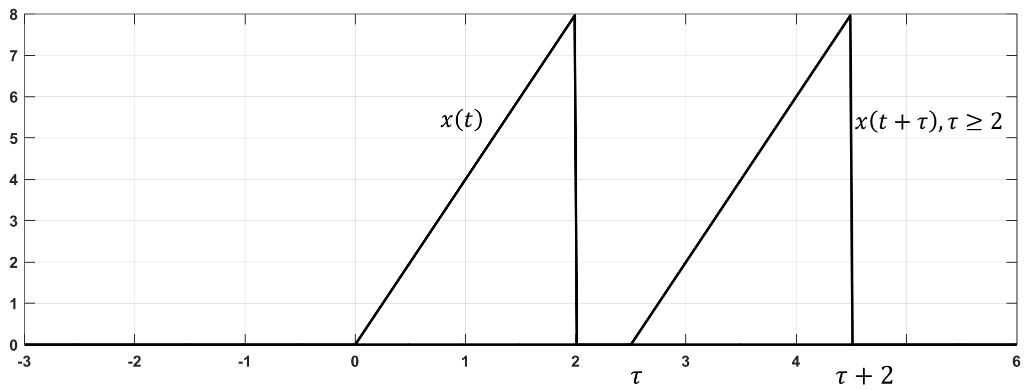
$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \int_{\tau}^{2} 4t\big(4(t+\tau)\big)dt = 16\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}\tau t^2\right]_\tau^{2}$$

$$R_x(\tau) = \frac{8}{3}\tau^3 - 32\tau + \frac{128}{3}$$



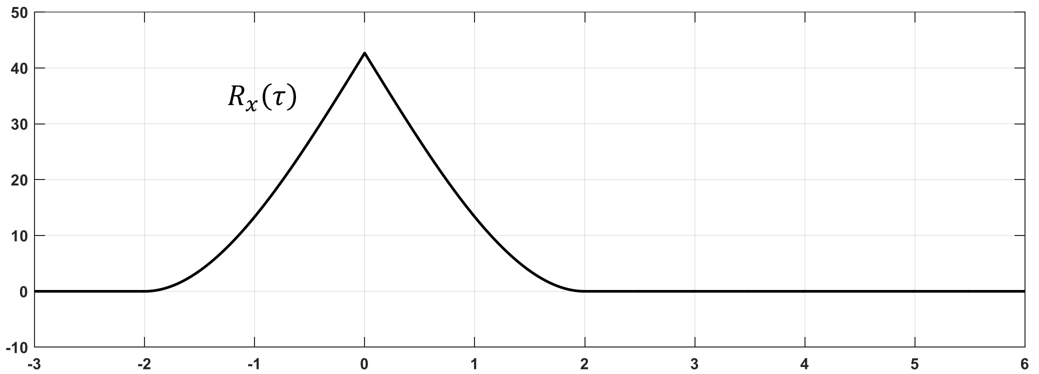
- Si $\tau \geq 2$ il n’existe pas de chevauchemer re les signa

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt = 0$$



Finalement :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \begin{cases} 0 & \tau < -2 \\ -\frac{8}{3}\tau^3 + 32\tau + \frac{128}{3} & -2 \leq \tau < 0 \\ \frac{8}{3}\tau^3 - 32\tau + \frac{128}{3} & 0 \leq \tau < 2 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases}$$



3. A partir de la fonction l'autocorrélation en calculer l'énergie totale du signal $x(t)$

$$E_x = R_x(0) = \frac{128}{3} \cong 42{,}67$$

Exercice 3 :

1. t_0 en fonction de d, V et θ

$$L = V \cdot t_0 \text{ et } \cos\theta = \frac{L}{d} \Rightarrow t_0 = \frac{d\cos\theta}{V}$$

d et V sont connus. Pour déterminer la direction θ, il suffit de calculer t_0

2. fonction d'intercorrélation entre les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$

$$R_{T,x_1x_2}(\tau) = \frac{1}{T}\int_T x_{1T}(t)x_{2T}(t+\tau)dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} x(t)x(t-t_0+\tau)dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} a\sin(\omega t+\varphi)a\sin(\omega(t-t_0+\tau)+\varphi)\,dt$$

$$= \frac{\omega a^2}{4\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \cos\big(\omega(\tau - t_0)\big)\, dt - \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \cos\big(2\omega t + 2\varphi + \omega(\tau - t_0)\big)\, dt\right)$$

Car

$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

Comme

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \cos\big(2\omega t + 2\varphi + \omega(\tau - t_0)\big)\, dt = 0$$

$$R_{T,x_1x_2}(\tau) = \frac{\omega a^2}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \cos\big(\omega(\tau - t_0)\big)\, dt = \frac{\omega a^2}{4\pi}\cos\big(\omega(\tau - t_0)\big)\,[t]_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} = \boldsymbol{\frac{a^2}{2}\cos\big(\omega(\tau - t_0)\big)}$$

3. La fonction d'intercorrélation des deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est tout simplement la fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$ retardée de t_0

$$R_{T,x_1x_2}(\tau) = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} x(t)x(t - t_0 + \tau)dt = R_{T,x}(\tau - t_0)$$

On peut estimer la valeur t_0 en calculant le maximum de la fonction $R_{T,x_1x_2}(\tau)$, alors

$$\cos\big(\omega(\tau - t_0)\big) = 1 \Rightarrow \tau = t_0$$