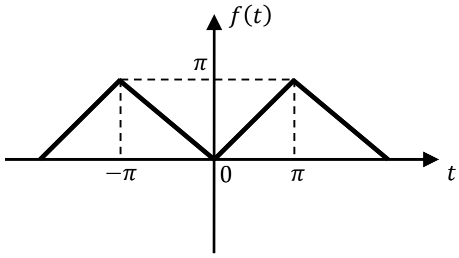
TD N°1

Exercice 1 :

1. Développer en série de Fourier réelle le signal $2\pi -$ périodique définie sur $[-\pi \quad \pi]$ par :

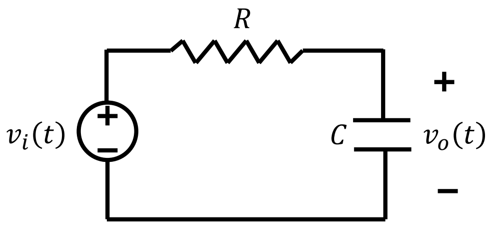
$$f(t) = |t|$$



2. Déduire la valeur moyenne du signal et la fondamentale
3. Tracer le spectre d'amplitude de ce signal
4. Déterminer la puissance moyenne de ce signal

Exercice 2 :

Soit le circuit-RC de la figure ci-contre :



1. Déterminer l'équation différentielle qui relie la tension d'entrée $v_i(t)$ el la tension de sortie $v_o(t)$.
2. Appliquer la transformée de Fourier pour donner la fonction de transfert du circuit :

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}$$

3. On excite le circuit par une tension d'entrée $v_i(t) = 2e^{-3t}u(t)$, déduire la tension de sortie $v_o(t)$. (on suppose que le condensateur est déchargé).

4. Utiliser la table de transformée de Fourier pour déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce circuit.

5. Donner le produit de convolution :

$$v_o(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau) d\tau$$

On donne $R = 2\Omega, C = 1F$

Solutions

Exercice 1 :

1) Les coefficients de Fourier :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos nt\, dt, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

Intégration par partie en trouve :

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \\ -\dfrac{4}{(2k+1)^2\pi} & n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$b_n = 0,$ car la fonction est paire

Finalement :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\big((2k+1)t\big)}{(2k+1)^2}$$

2) La valeur moyenne :

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

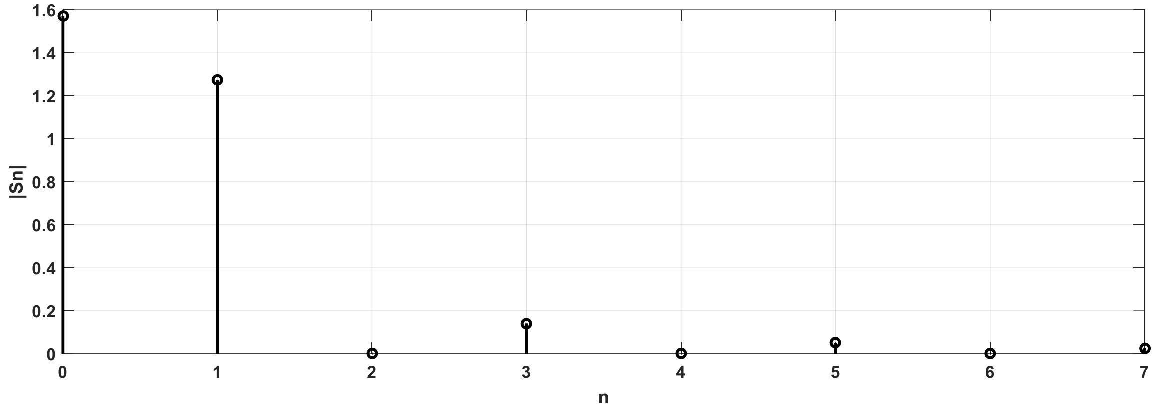
La fondamentale ($1^{\text{ère}}$ harmonique) pour $n = 1, k = 0$:

$$h_1(t) = -\frac{4}{\pi}\cos t = \frac{4}{\pi}\cos(t \pm \pi)$$

3) Spectre d'amplitude :

$$S_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} = |a_n|$$

$$S_0 = |a_0| = \frac{\pi}{2}, S_1 = \frac{4}{\pi}, S_2 = 0, S_3 = \frac{4}{9\pi}, S_4 = 0, S_5 = \frac{4}{25\pi}$$



Spectre d'amplitude pour 7 harmoniques

4) Puissance moyenne du signal :

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$$

Exercice 2 :

1. Equation différentielle :

$$\begin{cases} v_i(t) = Ri(t) + v_o(t) \\ \dfrac{dv_o}{dt} = \dfrac{1}{c} i(t) \end{cases} \Rightarrow RC\frac{dv_o}{dt} + v_o(t) = v_i(t)$$

2. Fonction de transfert :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}\left\{RC\frac{dv_o}{dt} + v_o(t) = v_i(t)\right\} = RCj\omega V_o(\omega) + V_o(\omega) = V_i(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{1}{1 + RCj\omega}$$

3. La tension de sortie $v_o(t)$:

- La TF de la tension d'entrée :

$$V_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-3t}u(t)e^{-j\omega t} = \frac{2}{3 + j\omega}$$

Alors en peut écrire :

$$V_o(\omega) = H(\omega)V_i(\omega) = \frac{2}{(1 + RCj\omega)(3 + j\omega)}$$

$$V_o(\omega) = \frac{2}{3RC - 1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega} - \frac{2}{3RC - 1} \cdot \frac{1}{3 + j\omega}$$

$$v_o(t) = \frac{2}{3RC - 1}\left(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega}\right\} - \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\left\{\frac{1}{(3 + j\omega)}\right\}\right)$$

D'après la table de la TF :

$$v_o(t) = \frac{2}{3RC-1}\left(e^{-t/RC} - e^{-3t}\right)u(t) = 0.4\left(e^{-t/2} - e^{-3t}\right)u(t)$$

4. La réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$h(t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\left\{\frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{1/_{RC} + j\omega}\right\} = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

5. Produit de convolution :

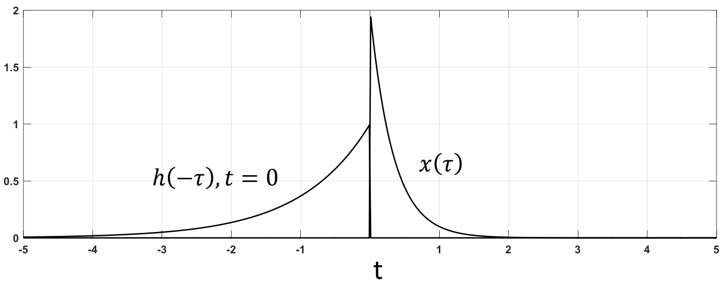
On détermine graphiquement le produit de convolution :

$$v_0(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Avec

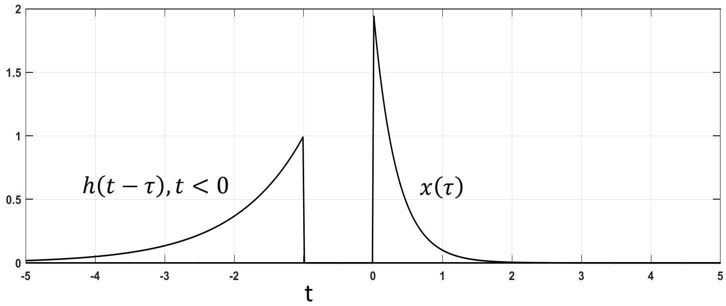
$$x(\tau) = 2e^{-3\tau}u(\tau), h(\tau) = \frac{1}{RC}e^{-\tau/RC}u(\tau)$$

On trace $x(\tau)$ et $h(-\tau)$ dans un même graphique



- Pour $t < 0$ pas de chevauchement entre les signaux $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$

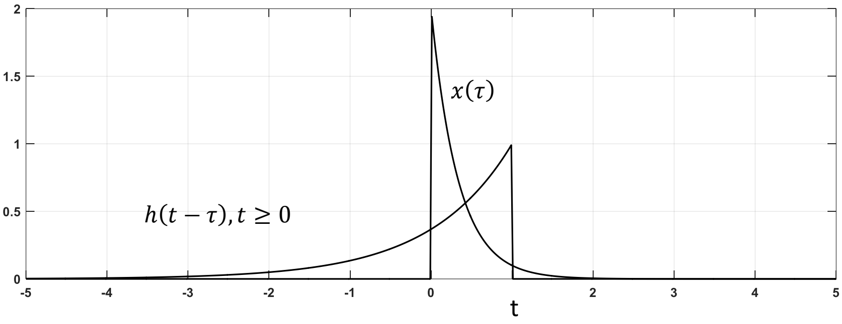
$$v_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$



- Pour $t \geq 0$ il y'a chevauchement

$$v_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{2}{RC}\int_0^t e^{-3\tau}e^{-t/RC}e^{\tau/RC}d\tau$$

$$v_o(t) = \frac{2}{3RC-1}\left(e^{-t/RC} - e^{-3t}\right)$$



$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{2}{3RC-1}\left(e^{-t/RC} - e^{-3t}\right) & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow v_o(t) = \frac{2}{3RC-1}\left(e^{-t/RC} - e^{-3t}\right)u(t)$$