Chapitre 2 : Analyse et synthèse des filtres analogiques

2.1 Introduction

Les filtres sont des systèmes qui laissent passer une gamme de fréquences sans atténuation et rejeter les autres fréquences du signal de l'entrée. Dans ce chapitre on va étudier deux types des filtres analogiques : les filtres idéaux et les filtres réalisables.

2.2 Les filtres idéaux

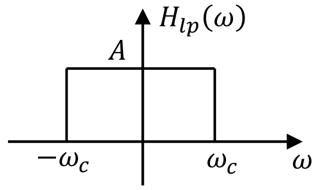
Les filtres idéaux ne sont pas physiquement réalisables, elles sont théoriques.

2.2.1 Filtre idéal passe-bas

Sont des filtres qui laissent passer des basses fréquences et rejeter des hautes fréquences au-dessus de la fréquence de coupure. La fonction de transfert du filtre passe-bas est donné par :

$$H_{lp}(\omega) = \begin{cases} A & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

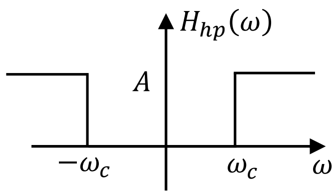
ω_c : est la fréquence de coupure



2.2.2 Filtre idéal passe-haut

Sont des filtres qui laissent passer des hautes fréquences et rejeter des basses fréquences au-dessous de la fréquence de coupure. La fonction de transfert du filtre passe-haut est donné par :

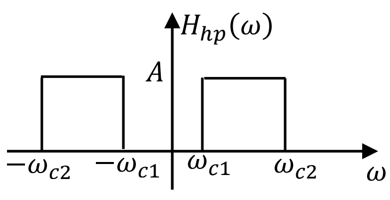
$$H_{hp}(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| \leq \omega_c \\ A & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



2.2.3 Filtre idéal passe-bande

Sont des filtres qui laissent une bande de fréquence entre les deux fréquences de coupures ω_{c1} et ω_{c2} et rejeter les fréquences en dehors la bande. La fonction de transfert du filtre passe-bande est donné par :

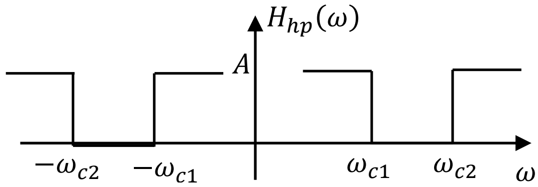
$$H_{bp}(\omega) = \begin{cases} A & \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 0 & |\omega| < \omega_{c1} \vee |\omega| > \omega_{c2} \end{cases}$$



2.2.4 Filtre idéal stop-bande

Sont des filtres qui rejettent une bande de fréquence entre les deux fréquences de coupures ω_{c1} et ω_{c2} et laissent passer les fréquences en dehors la bande. La fonction de transfert du filtre passe-bande est donné par :

$$H_{sp}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2} \\ A & |\omega| < \omega_{c1} \vee |\omega| > \omega_{c2} \end{cases}$$



2.2 Les filtres réalisables

Les filtres réalisables (réels) peuvent être effectués aux laboratoires.

2.2.1 Exemple (filtre passif passe-bas RC)

La figure ci-dessous représente un filtre RC et régi par l'équation différentielle suivante

$$RC\frac{dv_{out}(t)}{dt} + v_{out}(t) = v_{in}(t)$$

On applique la Transformée de Fourier :

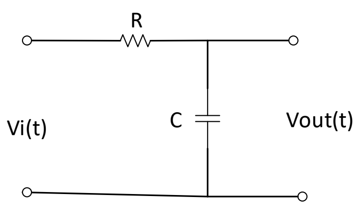
$$\mathcal{F}\left\{RC\frac{dv_{out}(t)}{dt} + v_{out}(t)\right\} = \mathcal{F}\{v_{in}(t)\}$$

$$RCj\omega V_{out}(\omega) + V_{out}(\omega) = V_{in}(\omega)$$

La fonction de transfert du filtre est donnée par :

$$H(\omega) = \frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)} = \frac{1}{1 + RCj\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{1/RC}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Avec $\omega_c = \frac{1}{RC}$ la fréquence de coupure du filtre



La réponse fréquentielle :

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\Phi(\omega)}$$

$|H(\omega)|$: Spectre d'amplitude

$\Phi(\omega)$: Spectre de phase

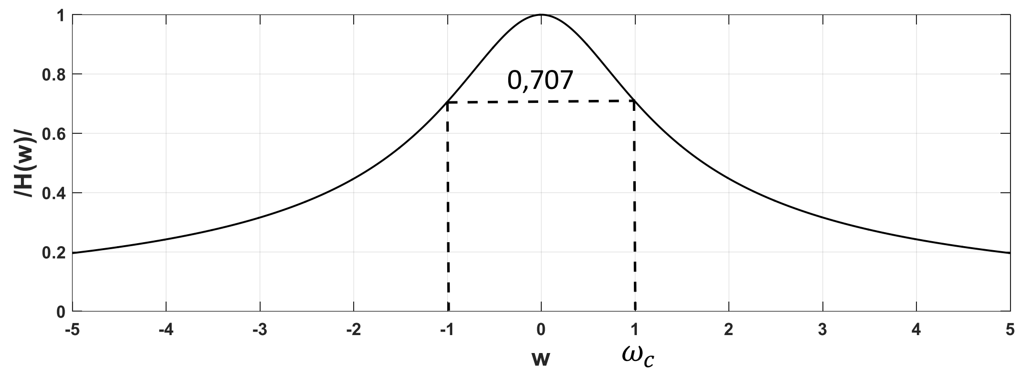
On a

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \qquad\qquad \Phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Si $\omega = \omega_c$ alors

$$|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

La figure ci-dessous représente le spectre d'amplitude du filtre passe-bas pour une fréquence de coupure $\cancel{\omega_c = 1}$



2.2.2 Filtre de Butter Worth

Le filtre de Butter Worth est un filtre réalisable sa fonction de transfert est donnée par

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

N : est l'ordre du filtre

Le filtre passe-bas RC est un filtre de Butter Worth d'ordre 1 (N=1).

La figure suivante représente le filtre LRC de Butter Worth du second-ordre