Chapitre 1 : Rappels sur la théorie du signal

1.1 Introduction

Le signal est la représentation physique d'un phénomène qui évolue dans le temps ou dans l'espace.

Le traitement du signal est une discipline technique qui a pour objet l'évolution, la détection, et l'interprétation des signaux porteurs d'information. Cette discipline s'appuie sur la théorie du signal qui donne une description mathématique des signaux. Les applications du traitement du signal sont nombreuses : télécommunication, géophysique, reconnaissance des formes, biomédical,…

1.2 Signaux à temps continu et signaux à temps discret

Un signal qui prend des valeurs à chaque instant t est un signal continu, et un signal qui n'ont de valeurs qu'à certains instants $t_n = nT_e (n = \cdots, -1,0,1,2,3, \ldots)$ est un signal discret. Dans la figure 1.1 on a pris la valeur $T_e = 0.25$ et $4 \leq n \leq 20$ avec n un entier relatif.

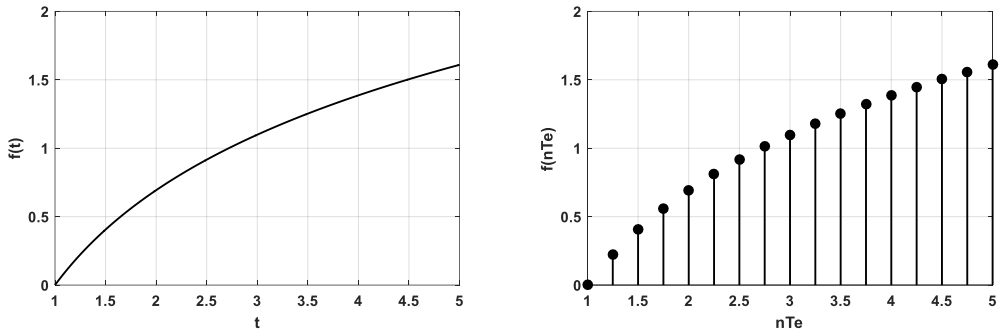


Fig.1.1 signal à temps continu à gauche et signal à temps discret à droite

1.3 Séries de Fourier

1.3.1 Série de Fourier complexe :

Soit $f(t)$ une fonction T-périodique de $L^2[0,T]$, alors :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Les coefficients C_n sont appelés les coefficients de la série de Fourier complexe, le calcul de ces coefficients peut se faire grâce au produit scalaire :

$$C_n = < f(t), e^{jn\omega t} > = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Les séries de Fourier peuvent être vues de deux points de vue. Dans le premier on connait la fonction $f(t)$ et on cherche les coefficients C_n, c'est une analyse dans laquelle on passe de la considération temporelle de $f(t)$ comme une fonction analytique à sa considération

fréquentielle à l'aide des coefficients C_n. Dans la pratique il existe des analyseurs à partir d'un signal, nous donnent la représentation dans le domaine des fréquences. La figure 2.1 représente un analyseur de spectre destiné à afficher les différentes fréquences contenues dans un signal ainsi que leurs amplitudes respectives.

Fig. 2.1 Analyseur de spectre

Le second point de vue est l'inverse du premier. C'est-à-dire qu'on connait le contenu fréquentiel C_n et on cherche à retrouver l'expression analytique de la fonction $f(t)$. Les appareils qui font ceci sont des synthétiseurs.

1.3.2 Quelques définitions :

- Nous noterons $f(t) \leftrightarrow C_n$ la fonction $f(t)$ qui admet un développement en série de Fourier complexe C_n.
- C_0 est la valeur moyenne de $f(t)$. En effet nous avons :

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

- $C_{-1}e^{-j\omega t} + C_1 e^{j\omega t}$ est appelé la fondamentale (la première harmonique) du signal $f(t)$
- $C_{-n}e^{-jn\omega t} + ne^{jn\omega t}$ est appelé la nième harmonique du signal.
- La représentation cartésienne des coefficients de Fourier :

$$C_n = A_n + jB_n$$

- La représentation polaire des coefficients de Fourier :

$$C_n = |C_n|e^{j\theta_n}$$

- $|C_n|$: est le spectre d'amplitude du signal $f(t)$. Dans l'exemple suivant le spectre d'amplitude de la porte périodisée est donné par :

$$|C_n| = \left|\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n\pi}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin \pi\frac{n}{2}}{\pi\frac{n}{2}}\right| = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

La figure 2.2 représente le spectre d'amplitude de la porte périodisée.

- θ_n : est le spectre de phase du signal $f(t)$

Exemple (porte périodisée) :

Soit $f(t)$ la fonction porte périodisée, son graphe est représenté sur la figure 2.3.

On a : $T = 4$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

L'expression analytique de $f(t)$ sur une période :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -2 \le t < -1 \\ 2 & -1 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

Les coefficients de Fourier C_n est donnés par :

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega t}dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-jn\omega t}dt = \frac{1}{4}\left[-\frac{2}{jn\pi}e^{-jn\frac{\pi}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$C_n = \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n\pi}$$

Pour les valeurs paire de $n(n = 2k, k \in \mathbb{Z}^*)$: $C_n = C_{2k} = \frac{\sin k\pi}{2k\pi} = 0$

Pour $n = 0$, on a :

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dt = \frac{1}{4}[t]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}$$

Pour les valeurs impaire de n $(n = 2k+1, k \in \mathbb{Z})$: $C_n = C_{2k+1} = \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2k+1)\pi} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}$

Donc en peut écrire :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{jn\frac{\pi}{2}t} = C_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{2k+1}\, e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2}t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2}t}$$

La première harmonique est donnée par : (voir figure 2.3)

$$h_1(t) = C_{-1}e^{-j\omega t} + C_1 e^{j\omega t} = \frac{1}{\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{\pi}e^{j\frac{\pi}{2}t} = \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t$$

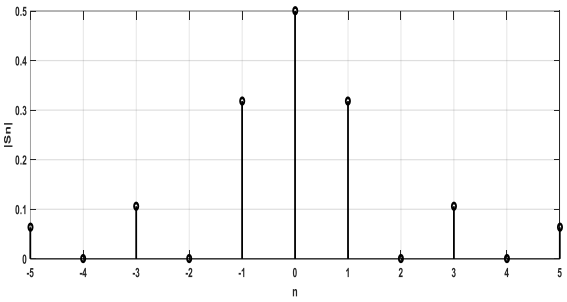


Fig. 2.2 Spectre d'amplitude du signal porte

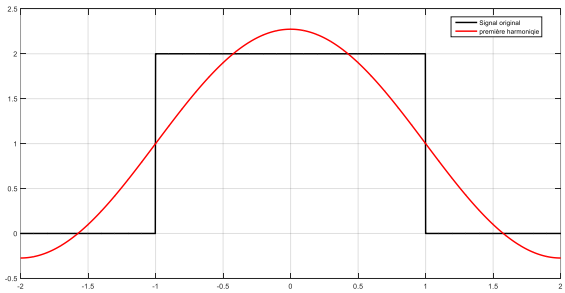


Fig. 2.3 signal original $f(t)$ et sa 1ère harmonique $h_1(t)$

1.3.3 Propriétés de la série de Fourier complexe :

Supposons $f(t)$ une fonction périodique à valeurs réelles et admet un développement en série de Fourier à coefficients complexe C_n :

1) Si $f(t)$ est réelle $\Leftrightarrow {C^*}_n = C_{-n}$

2) $A_n$et $|C_n|$ sont paires, $B_n$et θ_n sont impaires.
3) C_n est réel et paire $\Leftrightarrow f(t)$ est paire.
4) C_n est imaginaire pur et impaire $\Leftrightarrow f(t)$ est impaire.

1.3.4 Série de Fourier réelle :

Si la fonction $f(t)$ est T-périodique à valeur réelle on peut la mettre sous la forme d'une série réelle :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Les coefficients de la série de Fourier réelle sont :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, dt \text{ et } b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\, dt$$

1.3.5 Propriétés de la série de Fourier réelle :

- Si la fonction $f(t)$ est paire alors :

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, dt \text{ et } a_0 = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

- Si la fonction $f(t)$ est impaire alors :

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\, dt \text{ et } a_0 = 0$$

1.3.6 Egalité de Parseval :

Soit $f(t)$ une fonction de $L^2[0,T]$ (c.-à-d. une fonction T-périodique de puissance finie) qui admet un développement en série de Fourier. La puissance moyenne peut s'exprimer en fonction :

- Des coefficients de Fourier complexe :

$$\|f(t)\|^2 = P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \qquad \text{égalité de Parseval}$$

- Des coefficients de Fourier réelle :

$$\|f(t)\|^2 = P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = {a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2 + {b_n}^2 \quad \text{égalité de Parseval}$$

$$P = \frac{3}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 16dt + \frac{3}{2\pi}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 16\cos 3t\, dt}_{=0} + \frac{3}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 4\cos^2 3t\, dt$$

$$P = \frac{24}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} dt + \frac{6}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 6t}{2} dt = 16 + \frac{3}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} dt + \frac{3}{\pi}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 6t\, dt}_{=0} = 16 + 2 = 18$$

1.4 Transformée de Fourier :

On définit la transformée de Fourier d'un signal $f(t)$ par :

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Et la transformée de Fourier inverse, notée par :

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Nous adoptons la notation suivante $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ pour dire que $F(\omega)$ est la transformée de Fourier de $f(t)$ et que $f(t)$ est la transformée de Fourier inverse de $F(\omega)$.

Exemple :

On veut calculer la transformée de Fourier du signal porte

Le signal porte est défini par :

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \le \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

On détermine la TF du signal porte :

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}dt = \left[-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{2j}\right) = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\tau}{2}\omega = \tau\frac{\sin\frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega} = \tau\mathrm{sinc}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)$$

La figure 3.4 représente la transformée de Fourier du signale porte pour $\tau = 1$ et $\tau = 2$

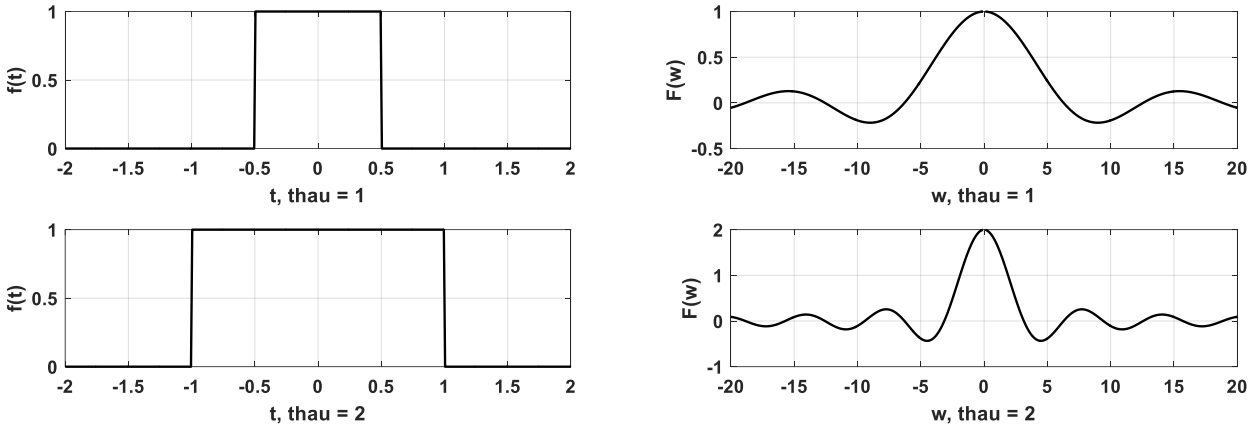


Fig. 3.4 Transformée de Fourier du signal porte pour $\tau = 1$ et $\tau = 2$

1.4.1 Spectre d'amplitude et de phase :

- Représentation cartésienne de la TF :

$$F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

- Représentation polaire de TF :

$$F(\omega) = |F(\omega)|.\, e^{j\theta(\omega)}$$

- Pour visualiser le spectre d'amplitude et de phase on utilise la forme polaire :

  $|F(\omega)|$: Le spectre d'amplitude

  $\theta(\omega) = \arg\big(F(\omega)\big)$: Le spectre de phase

Dans notre exemple précèdent, le spectre d'amplitude du signal porte est donné par :

$$|F(\omega)| = |\tau| \cdot \left|\text{sinc}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)\right| \qquad \text{voir figure 3.5}$$

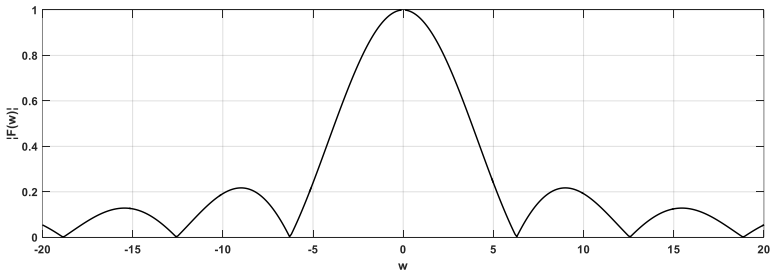


Fig. 3.5 spectre d'amplitude du signal porte

1.4.2 Propriétés de la transformée de Fourier :

- **Linéarité :**

Si $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ et $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$ alors pour tout constants a_1 et a_2 on ait

$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$

- **Changement d'échelle :**

Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ alors pour tout constant $a \neq 0$ on ait $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

- **Translation en temps :**

Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ alors pour tout constant t_0 on ait $f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$

- **Translation en fréquence :**

Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ alors $f(t)e^{j\omega_0 t} = \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$

- **Dérivation :**

Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ alors $\frac{df}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$

- **Intégration :**

Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ alors $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

- **Dualité :**

Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ alors $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

- **Convolution :**

Si $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ et $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$ alors $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

Et $f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\big(F_1(\omega) * F_2(\omega)\big)$

On rappelle que le produit de convolution de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est défini par :

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

1.4.3 Théorème de Parseval :

Pour tout signal f à énergie fini on ait :

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

3.5 Table de la transformée de Fourier de quelques signaux usuels :

CT signals	Time domain $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}dt$	Frequency domain $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	Comments
(1) Constant	1	$2\pi\delta(\omega)$	
(2) Impulse function	$\delta(t)$	1	
(3) Unit step function	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
(4) Causal decaying exponential function	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$	$a > 0$
(5) Two-sided decaying exponential function	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	$a > 0$
(6) First-order time-rising causal decaying exponential function	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	$a > 0$
(7) Nth-order time-rising causal decaying exponential function	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$	$a > 0$
(8) Sign function	$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$	
(9) Complex exponential	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	
(10) Periodic cosine function	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$	
(11) Periodic sine function	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$	
(12) Causal cosine function	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	
(13) Causal sine function	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$	
(14) Causal decaying exponential cosine function	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	$a > 0$
(15) Causal decaying exponential sine function	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	$a > 0$
(16) Rectangular function	$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & \lvert t\rvert \le \tau/2 \\ 0 & \lvert t\rvert > \tau/2 \end{cases}$	$\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$	$\tau \neq 0$
(17) Sinc function	$\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$	$\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right) = \begin{cases} 1 & \lvert\omega\rvert \le W \\ 0 & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	
(18) Triangular function	$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1-\frac{\lvert t\rvert}{\tau} & \lvert t\rvert \le \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\tau\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$	$\tau > 0$
(19) Impulse train	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)$	$\omega_0\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-m\omega_0)$	angular frequency $\omega_0 = 2\pi/T_0$
(20) Gaussian function	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$	

1.5 Produit de convolution

1.5.1 Définition :

Le produit de convolution de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, noté $x * y$, est défini par :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

1.5.2 Propriétés :

- **Commutativité**

Soit deux signaux notés $x(t)$ et $y(t)$, leur produit de convolution est commutatif c.-à-d.

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} x(t-\beta)y(\beta)d\beta$$

$$= y(t) * x(t)$$

Où $\beta = t - \tau$, soit $\tau = t - \beta$ et $d\tau = -d\beta$

- **Associativité**

Soit trois signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, l'opération de convolution est associative :

$$\big(x(t) * y(t)\big) * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(\tau) * y(\tau)\big)z(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)y(\tau-\beta)d\beta \right) z(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)y(\tau-\beta)z(t-\tau)d\tau \right) d\beta \quad \text{(théorème de Fubini)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau-\beta)z(t-\tau)d\tau \right) d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(\rho)z(t-\beta-\rho)d\rho \right) d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)(y * z)(t-\beta)d\beta$$

$$= x(t) * \big(y(t) * z(t)\big)$$

Où $\rho = \tau - \beta$, soit $\tau = \rho + \beta$ et $d\tau = d\rho$

- **Distributivité**

L'operateur de convolution est distributif sur l'addition :

$$x(t) * \big(y(t) + z(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\big(y(t-\tau) + z(t-\tau)\big)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\big(y(t-\tau) + z(t-\tau)\big)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(\tau)y(t-\tau) + x(\tau)z(t-\tau)\big)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau$$

$$= x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

- **Elément neutre de convolution**

L'élément neutre du produit de convolution est l'impulsion de Dirac $\delta(t)$:

$$\delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t)$$

- **Convolution de deux signaux retardés**

Soit le produit de convolution de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

Alors le produit de convolution de ces deux signaux retardés $x_1(t-t_1)$ et $x_2(t-t_2)$ est donné par :

$$x_1(t-t_1) * x_2(t-t_2) = y\big(t-(t_1+t_2)\big)$$

En effet :

$$x_1(t-t_1) * x_2(t-t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau-t_1)x_2(t-\tau-t_2)d\tau \qquad (1)$$

On pose $\tau - t_1 = \alpha$ alors $d\alpha = d\tau$ et $\tau = \alpha + t_1$

L'équation 1 devient :

$$x_1(t-t_1) * x_2(t-t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\alpha)x_2(t-(\alpha+t_1)-t_2)d\alpha$$

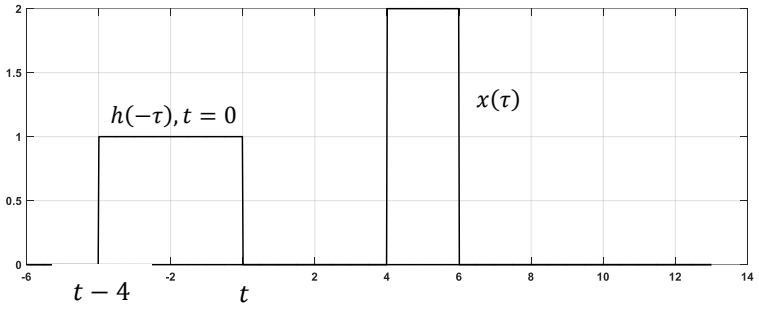
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\alpha)x_2(t-(t_1+t_2)-\alpha)d\alpha = y\big(t-(t_1+t_2)\big)$$

Exemple 1 :

On détermine la convolution de deux signaux porte définis par :

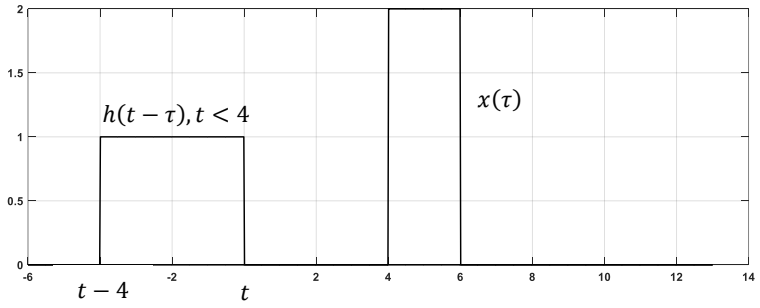
$$x(t) = 2\Pi\left(\frac{t-5}{2}\right) \text{ et } h(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)$$

On trace $x(\tau)$ et $h(-\tau)$ dans un même graphique



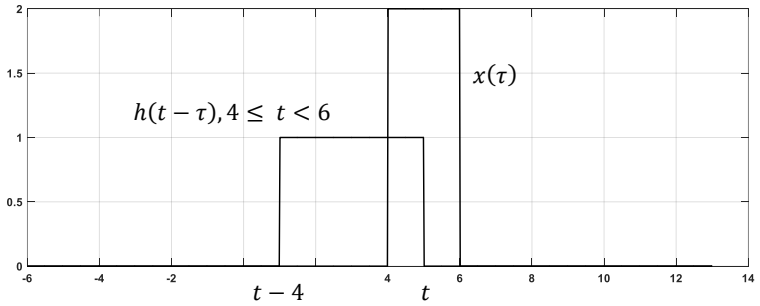
- Pour $t < 4$ pas de chevauchement entre les signaux $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$



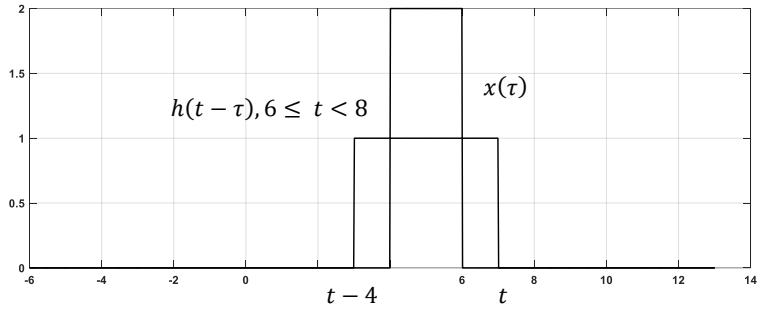
- Pour $4 \leq t < 6$ il y'a chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{4}^{t} 2 \cdot 1 d\tau = [2\tau]_4^t = 2t - 8$$



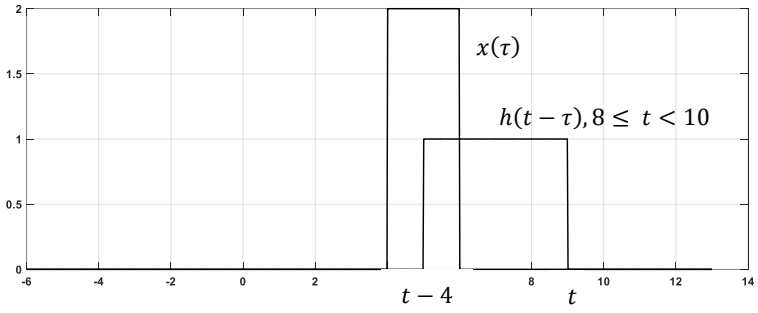
- Pour $t \geq 6$ et $t - 4 < 6$ ou $6 \leq t < 8$ il y'a chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{4}^{6} 2 \cdot 1 d\tau = [2\tau]_4^6 = 4$$



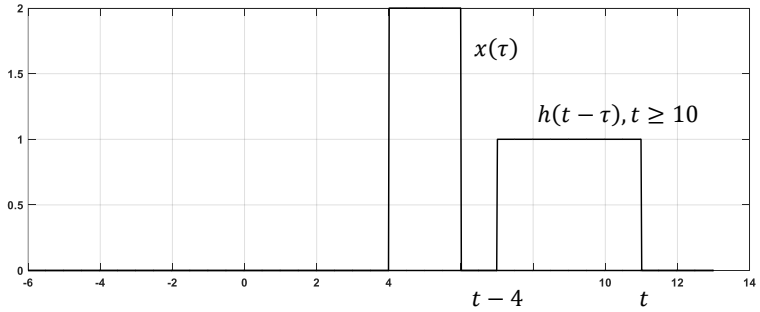
- Pour $4 \leq t-4 < 6$ ou $8 \leq t < 10$ il y'a chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-4}^{6} 2 \cdot 1 d\tau = [2\tau]_{t-4}^{6} = -2t + 20$$



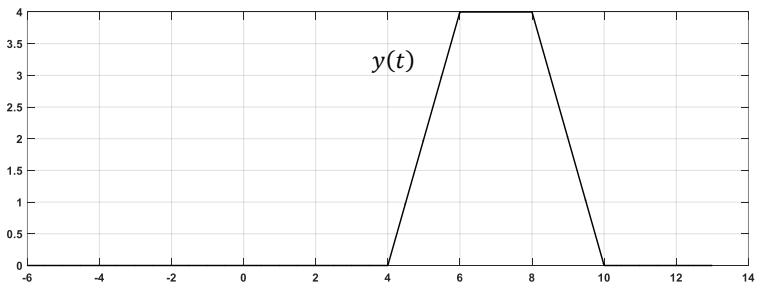
- Pour $t-4 \geq 6$ ou $t \geq 10$ pas de chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$



Finalement :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ 2t-8 & 4 \leq t < 6 \\ 4 & 6 \leq t < 8 \\ -2t+20 & 8 \leq t < 10 \\ 0 & t \geq 10 \end{cases}$$



Exemple 2 :

Le produit de convolution est très important en analyse des circuits, dans cet exemple en va déterminer la réponse d'un circuit électrique à une entrée donnée.

Soit un circuit R-L représenté dans la figure a, en applique à l'entrée de ce circuit un signal rectangulaire $v_s(t)$ illustré dans la figure b. La réponse $v_o(t)$ de ce circuit est donnée par le produit de convolution :

$$v_o(t) = v_s(t) * h(t)$$

Ou $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système (notre circuit)

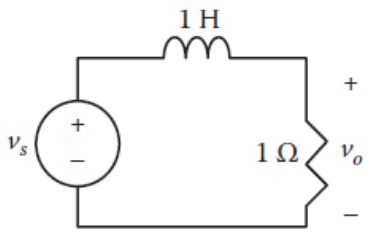


Fig. a

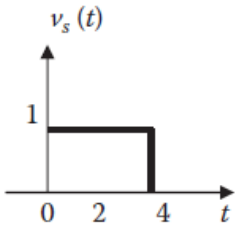


Fig. b

On peut déterminer la réponse impulsionnelle par la transformée de Laplace

On admet que :

$$h(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot u(t) = e^{-t} \cdot u(t)$$

L'entrée du système est donnée par :

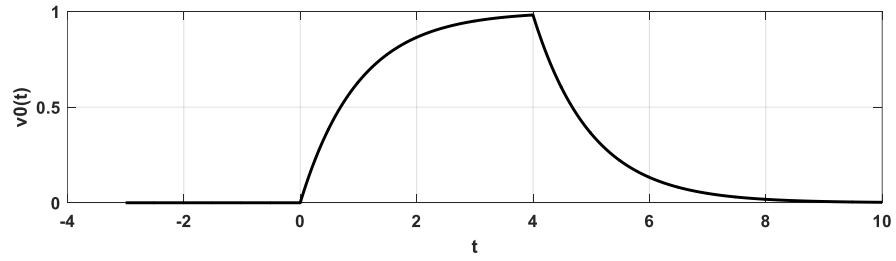
$$v_s(t) = u(t) - u(t-4)$$

Alors la sortie $v_o(t)$:

$$v_o(t) = v_s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_s(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

On procède comme dans l'exemple 1 et on trouve :

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-t} & 0 \le t < 4 \\ e^{4-t} - e^{-t} & t \ge 4 \end{cases}$$



1.6 Corrélation :

Les techniques de corrélations sont utilisées dans de nombreux domaines tels que les communications, le traitement du signal, les systèmes de contrôle, la détection Radar, et la médecine.

Mathématiquement, la corrélation est une opération similaire à la convolution. Elle consiste à faire glisser une fonction sur l'autre et de trouver la zone sous la région de chevauchement. La corrélation peut être divisée en deux cas : l'intercorrélation (la corrélation de deux signaux différents) et l'autocorrélation (la corrélation d'un signal avec lui-même).

1.6.1 Intercorrélation :

L'intercorrélation entre deux signaux $x(t)$ et $h(t)$ est défini par :

$$R_{xh}(\tau) = x(\tau) ** h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt$$

Cet intégrale mesure le degré de similitude entre les signaux $x(t)$ et $h(t+\tau)$. Dans la plupart des cas le signal $h(t)$ est le signale $x(t)$ noyé dans le bruit défini par le signal $n(t)$ c.-à-d. $h(t) = x(t) + n(t)$, par exemple pour identifier un individu en fonction de son modèle de parole, nous pouvons stocker son discours dans un ordinateur. Lorsqu'il présente dans une zone sécurisée en lui demande de parler et de calculer l'intercorrélation entre le signal stocké et le signal enregistré. L'opération d'intercorrélation nous aide à identifier cet individu. Généralement un individu est identifié si le pic de l'intercorrélation est proche de la valeur maximale d'autocorrélation.

1.6.2 Autocorrélation :

Lorsque $x(t) = h(t)$, l'intercorrélation devient autocorrélation c.-à-d. l'autocorrélation est la corrélation entre un signal avec lui-même :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

- L'autocorrélation en $\tau = 0$ correspond à l'énergie totale du signal, on effet

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

- L'autocorrélation est une fonction paire en effet

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

Par changement de variable $t - \tau = s$

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s+\tau)x(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)x(s+\tau)ds = R_x(\tau)$$

1.6.3 Propriétés de la fonction d'intercorrélation :

- Soit $x(t)$ et $h(t)$ deux signaux, alors :

$$R_{xh}(\tau) = R_{hx}(-\tau)$$

En effet

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt \qquad (*)$$

On pose $t + \tau = \alpha$, l'équation $(*)$ devient

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha - t)h(\alpha)d\alpha = R_{hx}(-\tau)$$

- La fonction intercorrélation et liée à la convolution par la relation suivante :

$$R_{xh}(\tau) = x(\tau) ** h(\tau) = x(-\tau) * h(\tau)$$

$$R_{hx}(\tau) = h(\tau) ** x(\tau) = h(-\tau) * x(\tau)$$

En effet par changement de variable $t = -\alpha$,

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\alpha)h(\tau - \alpha)d\alpha = x(-\tau) * h(\tau)$$

Exemple :

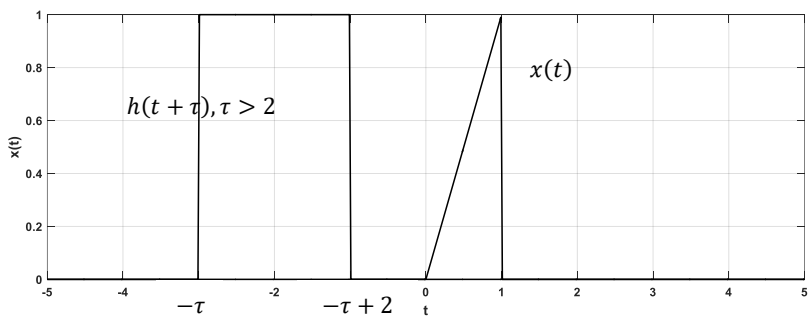
On détermine l'intercorrélation entre les signaux suivants :

$$x(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big), \;\; h(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

On trace dans un même graphique les signaux $x(t)$ et $h(t+\tau)$

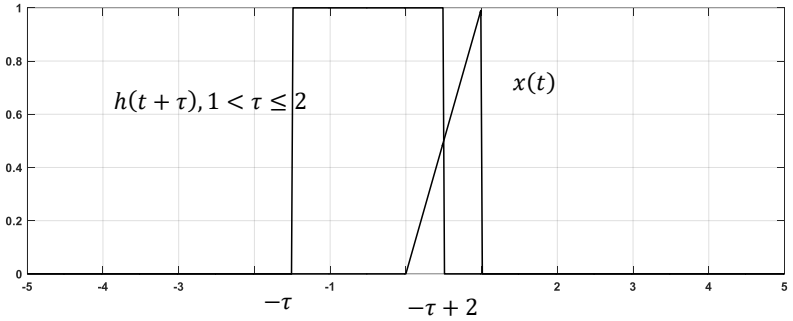
- Si $-\tau + 2 < 0 \Rightarrow \tau > 2$ pas de chevauchement entre les signaux $x(t)$ et $h(t+\tau)$, alors

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = 0$$



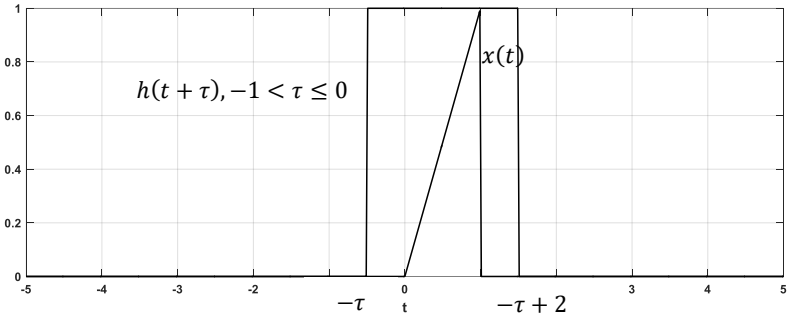
- Si $0 \leq -\tau + 2 < 1 \Rightarrow 1 < \tau \leq 2$ il existe de chevauchement entre les signaux

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = \int_{0}^{-\tau+2} t(1)dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{-\tau+2} = \frac{1}{2}(-\tau+2)^2$$



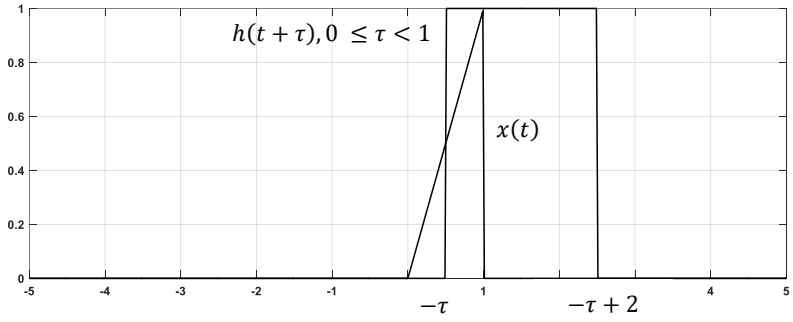
- Si $-\tau + 2 \geq 1$ et $-\tau < 0 \Rightarrow 0 < \tau \leq 1$ il existe de chevauchement entre les signaux

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = \int_{0}^{1} t(1)dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{1} = \frac{1}{2}$$



- Si $0 \leq -\tau < 1 \Rightarrow -1 < \tau \leq 0$ il existe de chevauchement entre les signaux

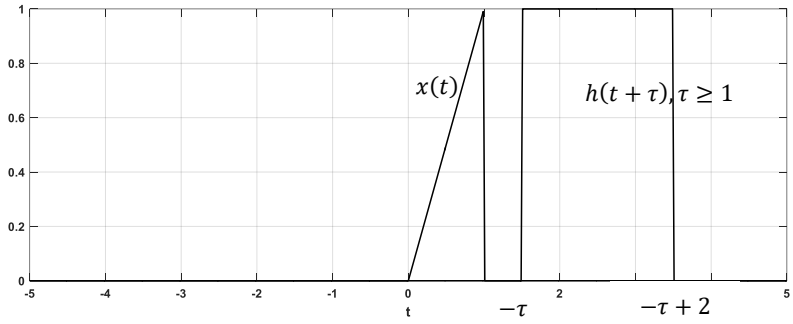
$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = \int_{-\tau}^{1} t(1)dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\tau}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tau^2$$



.

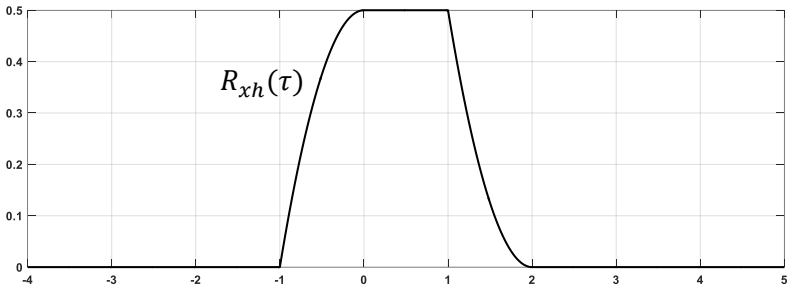
- Si $-\tau \geq 1 \Rightarrow \tau \leq -1$ il n'existe pas de chevauchement entre les signaux

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = 0$$



Finalement :

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = \begin{cases} 0 & \tau > 2 \\ \frac{1}{2}(-\tau+2)^2 & 1 < \tau \leq 2 \\ \frac{1}{2} & 0 < \tau \leq 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tau^2 & -1 < \tau \leq 0 \\ 0 & \tau \leq -1 \end{cases}$$



1.6.4 Intercorrélation et autocorrélation des signaux périodiques :

Si les signaux $x(t)$ et $h(t)$ sont périodique et de même période T, alors l'intercorrélation entre ces deux signaux et donnée par :

$$R_{T,xh}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{T} x_T(t)h_T(t+\tau)dt$$

On définit ainsi l'autocorrélation entre ces deux signaux par :

$$R_{T,x}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{T} x_T(t)x_T(t+\tau)dt$$

Chapitre 2 : Analyse et synthèse des filtres analogiques

2.1 Introduction

Les filtres sont des systèmes qui laissent passer une gamme de fréquences sans atténuation et rejeter les autres fréquences du signal de l'entrée. Dans ce chapitre on va étudier deux types des filtres analogiques : les filtres idéaux et les filtres réalisables.

2.2 Les filtres idéaux

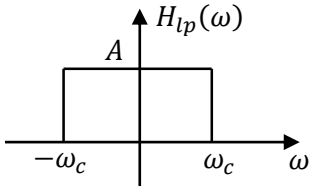
Les filtres idéaux ne sont pas physiquement réalisables, elles sont théoriques.

2.2.1 Filtre idéal passe-bas

Sont des filtres qui laissent passer des basses fréquences et rejeter des hautes fréquences au-dessus de la fréquence de coupure. La fonction de transfert du filtre passe-bas est donné par :

$$H_{lp}(\omega) = \begin{cases} A & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

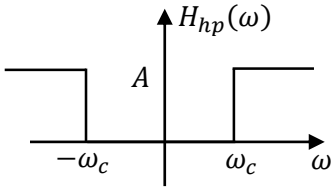
ω_c : est la fréquence de coupure



2.2.2 Filtre idéal passe-haut

Sont des filtres qui laissent passer des hautes fréquences et rejeter des basses fréquences au-dessous de la fréquence de coupure. La fonction de transfert du filtre passe-haut est donné par :

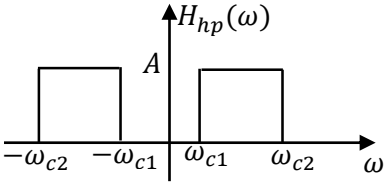
$$H_{hp}(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| \leq \omega_c \\ A & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



2.2.3 Filtre idéal passe-bande

Sont des filtres qui laissent une bande de fréquence entre les deux fréquences de coupures ω_{c1} et ω_{c2} et rejeter les fréquences en dehors la bande. La fonction de transfert du filtre passe-bande est donné par :

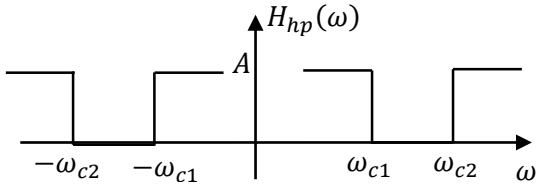
$$H_{bp}(\omega) = \begin{cases} A & \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 0 & |\omega| < \omega_{c1} \vee |\omega| > \omega_{c2} \end{cases}$$



2.2.4 Filtre idéal stop-bande

Sont des filtres qui rejettent une bande de fréquence entre les deux fréquences de coupures ω_{c1} et ω_{c2} et laissent passer les fréquences en dehors la bande. La fonction de transfert du filtre passe-bande est donné par :

$$H_{sp}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2} \\ A & |\omega| < \omega_{c1} \vee |\omega| > \omega_{c2} \end{cases}$$



2.2 Les filtres réalisables

Les filtres réalisables (réels) peuvent être effectués aux laboratoires.

2.2.1 Exemple (filtre passif passe-bas RC)

La figure ci-dessous représente un filtre RC et régi par l'équation différentielle suivante

$$RC\frac{dv_{out}(t)}{dt} + v_{out}(t) = v_{in}(t)$$

On applique la Transformée de Fourier :

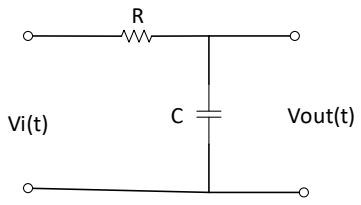
$$\mathcal{F}\left\{RC\frac{dv_{out}(t)}{dt} + v_{out}(t)\right\} = \mathcal{F}\{v_{in}(t)\}$$

$$RCj\omega V_{out}(\omega) + V_{out}(\omega) = V_{in}(\omega)$$

La fonction de transfert du filtre est donnée par :

$$H(\omega) = \frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)} = \frac{1}{1 + RCj\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{1/RC}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Avec $\omega_c = \frac{1}{RC}$ la fréquence de coupure du filtre



La réponse fréquentielle :

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\Phi(\omega)}$$

$|H(\omega)|$: Spectre d'amplitude

$\Phi(\omega)$: Spectre de phase

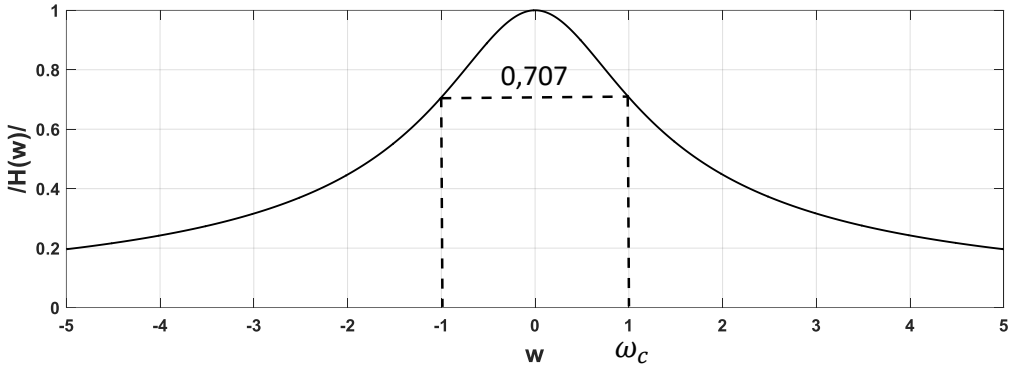
On a

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \qquad \Phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Si $\omega = \omega_c$ alors

$$|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

La figure ci-dessous représente le spectre d'amplitude du filtre passe-bas pour une fréquence de coupure $\omega_c = 1$

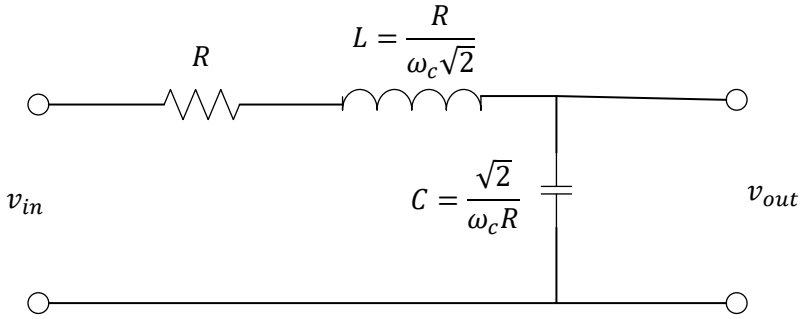


2.2.2 Filtre de Butter Worth

Le filtre de Butter Worth est un filtre réalisable sa fonction de transfert est donnée par

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

N : est l'ordre du filtre

Le filtre passe-bas RC est un filtre de Butter Worth d'ordre 1 (N=1).

La figure suivante représente le filtre LRC de Butter Worth du second-ordre