Chapitre 1 : Systèmes de numération

1. Définition

Un Système de numération décrit la façon avec laquelle les nombres sont représentés, il est est défini par :

- Un alphabet A: ensemble de symboles ou chiffres,
- Des règles d'écritures des nombres : Juxtaposition de symboles

2. Représentation dans une base

Un nombre: $(XXX)_b$ indique la représentation d'un nombre XXX dans la base b.

La base est le nombre qui sert à définir un système de numération.

La base du système décimal est dix alors que celle du système octal est huit.

Quelque soit la base numérique employée, elle suit la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^{i=n} (b_i a^i) = b_i a^n + ... + b_5 a^5 + b_4 a^4 + b_3 a^3 + b_2 a^2 + b_1 a^1 + b_0 a^0$$

ou : b_i : chiffre de la base de rang i, et : a^i : puissance de la base a d'exposant de rang i

Exemple: base 10

$1986 = (1 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (6 \times 10^0)$

Comment un nombre est représenté dans une base b ?

1. Si $b \leq 10$, on utilise simplement les chiffres de 0 à b-1

Exemple: base 8 (système octal) : n'importe quel nombre sera la combinaison de chiffres appartenant à l'ensemble {0,…, 7}

2. Si b >10, on utilise simplement les chiffres de 0 à 9 ensuite des lettres dans l'ordre alphabétique.

Exemple: base 16 (système hexadécimal) : n'importe quel nombre sera la combinaison de symboles appartenant à l'ensemble {0,…, 9, A, B, C, D, E, F} tel que : (A=10, ….., F=15)

Remarque :

la base du système de numération est égale au cardinal (Le nombre de ces chiffres) de l'ensemble des symboles utilisés dans cette base.

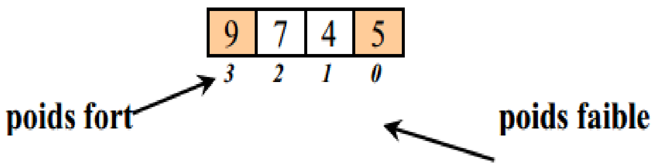
Exemple: en binaire, base du système binaire= 2 ; ensemble des symboles utilisés : A = {0,1}, Card (A)=2=base du système binaire.

en octal, base du système octal = 8 ; ensemble des symboles utilisés : A ={0,1,2,3,4,5,6,7}, Card (A)=8=base du système octal.

3. Le système décimal

- C'est le système de numération le plus pratiqué actuellement.
- L'alphabet est composé de dix chiffres : A = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
- Le nombre 10 est la base de cette numération
- C'est un système positionnel. Chaque position possède un poids. Par exemple, le nombre 4134 s'écrit comme :

$9745 = 9 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$



Remarque :

Cette façon d'écrire les nombres est appelée système de numération de position. Elle est valable pour tous les systèmes de numération que nous verrons dans ce cours (décimal, binaire, octal et hexadécimal).

4. Représentation binaire, Octale et Hexadécimale

- Système binaire (b=2) utilise deux chiffres : {0,1}

- C'est avec ce système que fonctionnent les ordinateurs

- Système Octale (b=8) utilise huit chiffres :{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

- Utilisé il y a un certain temps en Informatique.
- Elle permet de coder 3 bits par un seul symbole

- Système Hexadécimale (b=16) utilise 16 chiffres:{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A=$10_{(10)}$,B=$11_{(10)}$,C=$12_{(10)}$,D=$13_{(10)}$,E=$14_{(10)}$,F=$15_{(10)}$}

- Cette base est très utilisée dans le monde de la micro informatique.
- Elle permet de coder 4 bits par un seul symbole.

Exemple: Représentions des nombres de 0 à 16 en décimal et leurs équivalents en binaire et octal et hexadécimal

Système décimal	Système octal	Système hexadécimal	Système binaire
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	10
3	3	3	11
4	4	4	100
5	5	5	101
6	6	6	110
7	7	7	111
8	10	8	1000
9	11	9	1001
10	12	A	1010
11	13	B	1011
12	14	C	1100
13	15	D	1101
14	16	E	1110
15	17	F	1111
16	20	10	10000

5. Conversion et changement de base (Transcodage)

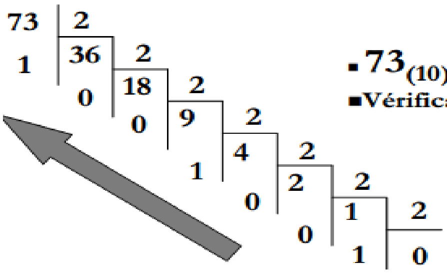
Le transcodage (ou conversion de base) est l’opération qui permet de passer de la représentation d’un nombre exprimé dans une base à la représentation du même nombre mais exprimé dans une autre base.

5.1. Changement de la base 10 vers une base b

Le principe consiste à faire des divisions successives du nombre sur b, et prendre le reste des divisions dans l’ordre inverse.

Exemple: Décimale vers binaire

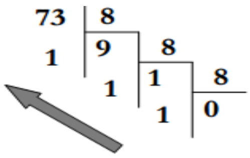
$(73)_{10} = (\ ?)_2$



- $73_{(10)} = 1001001_{(2)}$
- Vérification

Exemple : Décimale vers octale

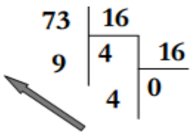
$(73)_{10} = (\ ?)_8$



- $73_{(10)} = 111_{(8)}$
- Vérification

Exemple: Décimale vers Hexadécimale

$(73)_{10} = (\ ?)_{16}$



- $73_{(10)} = 49_{(16)}$
- **Vérification**

5.2. Conversion d'un nombre de base b quelconque en nombre décimal

Tout nombre entier naturel peut se coder comme la somme pondérée des puissances de sa base b, quel que soit cette base

Exemple

$(\mathbf{1011})_2 = (\mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0)_{10} = (\mathbf{1} \times 8 + \mathbf{0} \times 4 + \mathbf{1} \times 2 + \mathbf{1} \times 1)_{10} = (\mathbf{11})_{10}$

$$(\mathbf{16257})_8 = \mathbf{1} \times 8^4 + \mathbf{6} \times 8^3 + \mathbf{2} \times 8^2 + \mathbf{5} \times 8^1 + \mathbf{7} \times 8^0 = \mathbf{1} \times 4096 + \mathbf{6} \times 512 + \mathbf{2} \times 64 + \mathbf{5} \times 8 + \mathbf{7}$$
$$= 4096 + 3072 + 128 + 40 + 7$$
$$= \mathbf{7343}$$

$(\mathbf{F53})_{16} = \mathbf{15} x 16^2 + \mathbf{5} \times 16^1 + \mathbf{3} \times 16^0 = \mathbf{15} x 16^2 + \mathbf{5} \times 16^1 + \mathbf{3} \times 16^0 = \mathbf{15} x 256 + \mathbf{5} \times 16 + \mathbf{3} = 3840 + 80 + 3 = \mathbf{3923}$

5.3. Conversion d'un nombre de la base binaire vers une base b

-Solution 1- convertir le nombre en base binaire vers la base décimale puis convertir ce nombre en base 10 vers la base b.

Exemple :

$10010_{(2)} = ?_{(8)}$

$10010_{(2)} = 2^4+2_{(10)}=18_{(10)}=2*8^1+2*8^0{}_{(10)}=22_{(8)}$

-Solution 2-:

- Binaire vers décimale : par définition $\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i\right)$
- Binaire vers octale : regroupement des bits en des sous ensemble de trois bits puis remplacé chaque groupe par le symbole correspondant dans la base 8.
- Binaire vers Hexadécimale : regroupement des bits en des sous ensemble de quatre bits puis remplacé chaque groupe par le symbole correspondant dans la base 16.

Exemple :

1) **binaire vers décimale**

$N = (1010011101)_2= (?)_{10}$

$N=1.2^9+0.2^8+1.2^7+0.2^6+0.2^5+1.2^4+1.2^3+1.2^2+0.2^1+1.2^0$

=512 + 0 + 128 + 0 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 +1 =512 + 0 + 128 + 0 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 +1

$=(669)_{10}$

$(1010011101)_2=(669)_{10}$

2) binaire vers octale

$N = (1010011101)_2= (?)_8$

$N =(001\ 010\ 011\ 101)_2$

$= (1\ 2\ 3\ 5\ )_8$

3) binaire vers Hexadécimale

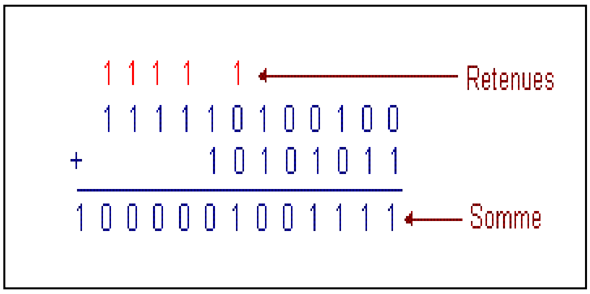
$N = (1010011101)_2 = (???)_{16}$

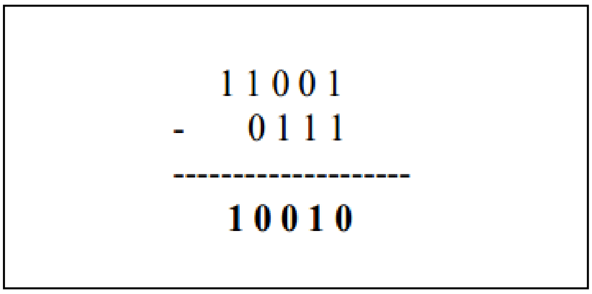
$N = (0010\ 1001\ 1101)_2$

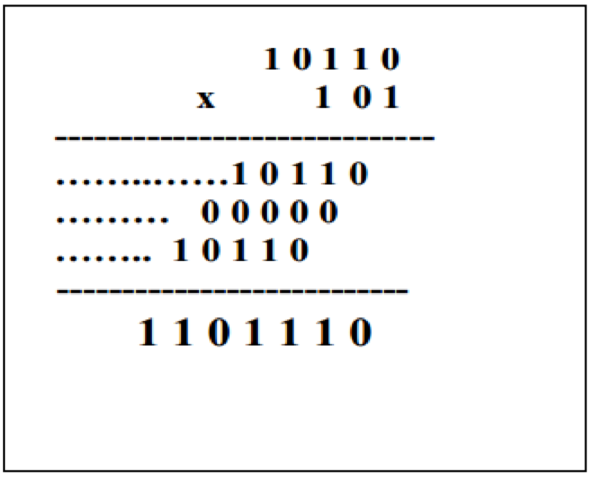
$= (2\ 9\ D)_{16}$

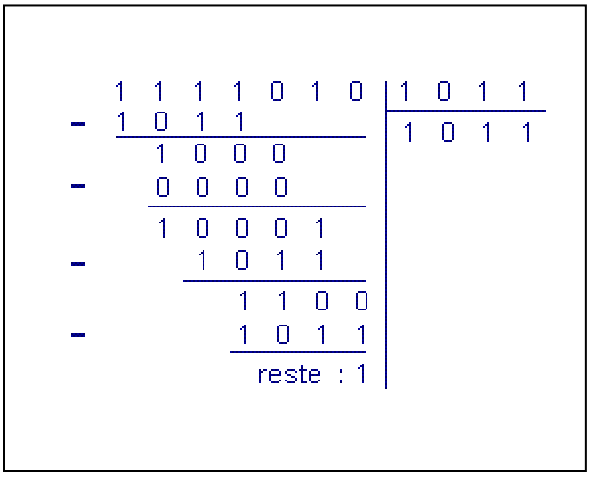
6. Opérations arithmétiques

En binaire

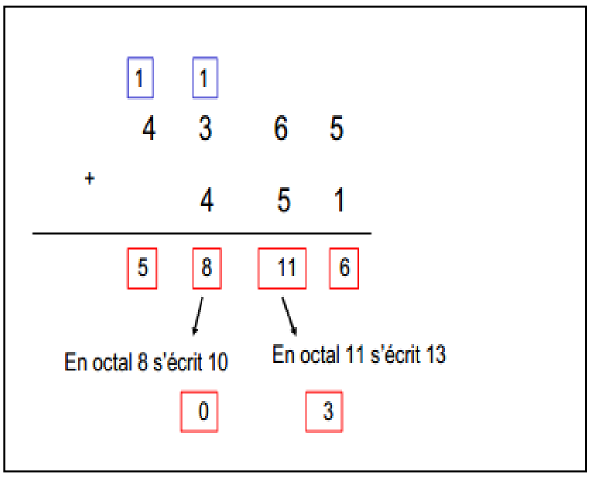


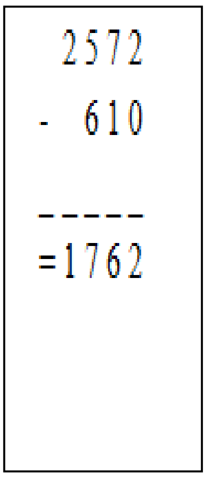


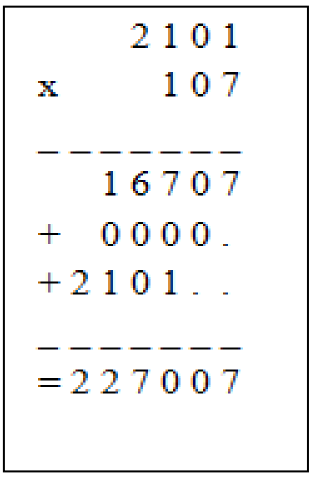




En octal







```
22605 | 125
- 125 |-----
 1010 | 161
- 776 |
  125 |
- 125 |
    0 |
```

En hexadécimal

```
        1
        4    8    6    5
+       7    A    5    1
      --------------------
       12   18   11    6
```

$\boxed{C}$

En hexa 18 s'écrit 12

$\boxed{2}$

En hexa 11 s'écrit B

$\boxed{B}$

```
   E  19 14
   F  A  4
-     A  B
  ---------
   E  F  9
```