Resistance normale à la flexion

Introduction

La résistance normale d'une section à la flexion veut dire que les contraintes normales dans cette section ne dépassent pas les contraintes limites de traction et de compression. Du fait que la section est constituée essentiellement du béton et des armatures de précontrainte, sa résistance dépend non seulement de sa géométrie (aire, moment d'inertie, excentricité, etc.) mais aussi de sa résistance mécanique en traction et compression.

1. Principe de justification :

Les calculs justificatifs sont établis suivant la méthode des états limites. « Un état limite » est un état pour lequel une condition requise d'une construction (ou d'un de ses éléments) est strictement satisfaite et cesserait de l'être en cas de variation défavorable d'une des actions appliquées.

1.1. Etat limite ultime (ELU)

Le dépassement de cet état conduit à la ruine de la structure. Au delà de l'état limite ultime, la résistance des matériaux béton et acier est atteinte, la sécurité n'est plus garantie et la structure risque de s'effondrer. On distingue:

- Etat limite de résistance de l'un des matériaux.
- Etat limite de l'équilibre statique.
- Etat limite de stabilité de forme : flambement

1.2. Etat limite de service (ELS)

L'état limite de service atteint remet en cause l'aptitude au service de la structure (fissures, fuites, désordres divers). Cet état est défini en tenant compte des conditions d'exploitations et /ou de durabilité. On distingue :

- Etat limite d'ouverture des fissures : risque d'ouverture des fissures.
- Etat limite de compression du béton : on limite volontairement la contrainte de compression à une valeur raisonnable.
- Etat limite de déformation : flèche maximale.

NB : Un ouvrage devra satisfaire à la fois à des conditions d'état limite ultime et d'état limite de service.

2. Actions

2.1. Définition

Les actions sont l'ensemble des charges (forces, couples,…) appliquées à la structure, ainsi que les conséquences des déformations statiques ou d'état (retrait, tassement d'appuis, variation de température, etc.) qui entraînent des déformations de la structure.

2.2. Types d'actions

Les trois types d'actions appliquées à la structure sont les suivants :

2.2.1. Actions permanentes : Les actions permanentes, notées G, représentent les actions dont l'intensité est constante ou très peu variable dans le temps. Elles comprennent :

- Le poids propre des éléments de la structure,
- le poids des équipements fixes de toute nature (revêtements de sols et de plafonds ; cloisons etc.),
- les efforts (poids, poussées, pressions) exercés par des terres, par des solides ou par des liquides dont les niveaux varient peu,
- les déplacements différentiels des appuis,
- les forces dues aux déformations (retrait, fluage,…) imposées en permanence à la construction,

Dans la plupart des cas, le poids propre est représenté par une valeur nominale unique, $\mathbf{G_0}$, calculée à partir des dessins du projet et des masses volumiques moyennes des matériaux.

2.2.2. **Actions variables :** les actions variables, notées Q, représentent les actions dont l'intensité varie fréquemment et de façon importante dans le temps. Elles sont définies par des textes réglementaires en vigueur, on distingue :

- les charges d'exploitation (poids et effets annexes tels que force de freinage, forces centrifuges, effets dynamiques),
- les efforts (poids, poussées, pressions) exercés par des solides ou par des liquides dont le niveau est variable,
- les charges non permanentes appliquées en cours d'exécution (équipements de chantier, engins, dépôts de matériaux, etc.),
- les actions climatiques : neige, vent, température, etc.

Les actions variables sont réparties en deux catégories :

- Une action dite de base notée Q1.
- Les autres actions, dites d'accompagnement et notées Qi (i>1)

L'action de base Qi est:

- L'action unique si c'est le cas

Si non :

- La plus fréquente
- La plus élevée
- L'une ou l'autre action variable

2.2.3. Actions accidentelles : Les actions accidentelles, notées FA , provenant de phénomènes rares, et ne sont à considérer que si les documents d'ordre publique ou le marché le prévoient .Exemple : les séismes, les explosions, les chocs.

2.3. Valeurs représentatives des actions

Les différentes valeurs de l'intensité des actions, dites valeurs représentatives, sont :

Q_k : valeurs caractéristiques de l'action

$\Psi_{0i}Q_{ik}$: valeurs de combinaison

$\Psi_{1i}Q_{ik}$: valeurs fréquentes

$\Psi_{2i}Q_{ik}$: valeurs quasi-permanentes

La précontrainte est représentée par une valeur de calcul P_d qui est :

- la plus défavorable de deux valeurs caractéristiques P_1 et P_2 pour les justifications vis-à-vis des états limites de service,

$$P_1 (x, t) = 1{,}02\ P_0 - 0{,}80\ \Delta P (x, t)$$

$$P_2 (x, t) = 0{,}98\ P_0 - 1{,}20\ \Delta P (x, t)$$

- La valeur probable P_m pour les justifications vis-à-vis des états limites ultimes.

$$P_m (x, t) = P_0 - \Delta P (x, t)$$

P_0 : représentant la précontrainte « à l'origine », correspondant à la tension σ_{p0}.

***$\Delta P (x, t)$* :** la perte de précontrainte au point d'abscisse x, à l'instant t.

3. Sollicitations

3.1 Définition

Les sollicitations sont les effets provoqués, en chaque point et sur chaque section de la structure, par les actions. Parmi les sollicitations on a les efforts M, N, V, T, les contraintes et les déformations.

3.2 Sollicitations de calcul à l'ELU :

- **Combinaisons fondamentales :**

En règle générale, les sollicitions de calcul à considérer sont les suivantes

$$\gamma_p P_m + 1.35 G_{max} + G_{min} + \gamma_{Q1} Q_1 + \sum_{i>1} 1.3\ \Psi_{0i}\ Q_{ik}$$

Avec :

G_{max} : ensemble des actions permanentes défavorables ;

G_{min} : ensemble des actions permanentes favorables ;

Q_{1k} : la valeur caractéristique de l'action de base ;

$\Psi_{0i}\ Q_{ik}$: la valeur de combinaison d'une action d'accompagnement ;

$\gamma_P = 1$: dans la plupart des cas ;

γ_{Q1}=1,5 : dans le cas général

ou γ_{Q1}=1,35 pour : la température, charges d'exploitation de caractère particulier telles les convois militaires et exceptionnels pour pont-route, bâtiment agricole à faible densité d'occupation humaine.

- **Combinaisons accidentelles :**

$$P_m + F_A + G_{max} + G_{min} + \Psi_{11}\, Q_{1k} + \sum_{i>1} \Psi_{2i}\, Q_{ik}$$

Avec :

F_A : la valeur nominale de l'action accidentelle ;

$\Psi_{11}\, Q_{1k}$: la valeur fréquente d'une action variable ;

$\Psi_{2i}\, Q_{ik}$: la valeur quasi-permanente d'une autre action variable.

3.3 Sollicitations de calcul à l'E.L.S

- **Combinaisons rares :**

$$\boldsymbol{P_c + G_{max} + G_{min} + Q_{1k} + \sum_{i>1} \Psi_{0i}\, Q_{ik}}$$

- **Combinaisons fréquentes :**

$$\boldsymbol{P_c + G_{max} + G_{min} + \Psi_{11}\, Q_{1k} + \sum_{i>1} \Psi_{2i}\, Q_{ik}}$$

- **Combinaisons quasi-permanentes :**

$$\boldsymbol{P_c + G_{max} + G_{min} + \sum_{i>1} \Psi_{2i}\, Q_{ik}}$$

3.4. Valeurs de Ψ_i :

1) Bâtiments :

Coefficients	N°	Nature du local	
ψ_0	1	Tous les locaux, à l'exception des archives et des parcs de stationnement.	0,77
	2	Parcs de stationnement et archives.	0,90
ψ_1	1	Salles de réunions à places assises, halles diverses, salles d'exposition, salles de classe, restaurants, dortoirs.	0,65
	2	Locaux non visés en 1 et 3.	0,75
	3	Archives.	0,90
ψ_2	1	Halles diverses, salles d'exposition, et autres locaux destinés principalement au transit des personnes. Salles de réunions, lieux de culte, salles et tribunes de sport, salles de danse et tout autre lieu avec places debout et utilisation périodique.	0,25
	2	Salles de classe, restaurants, dortoirs, salles de réunions avec places assises.	0,40
	3	Locaux non visés en 1, 2 et 4.	0,65
	4	Archives	0,80

2) Pont route :

Nature des charges		ψ_0	ψ_1
Charges d'exploitation du système A des ponts	première classe	0	0,6
	deuxième classe	0	0,4
	troisième classe	0	0,2
Vent	en exploitation	0	0,2
	en exécution	1	0
Température	variations uniformes	0,6	0,5
	gradient	0,5	0,5
Charges d'exécution aléatoires		1	0

3) Charges climatiques

Nature des charges	ψ_0	ψ_1	ψ_2
Vent	0.77	0.2	0
Neige : altitude < 500m	0.77	0.15	0
Altitude >500m	0.77	0.30	0.1
Température(variation uniforme)	0.6	0.5	0

3.5. Charges routières

Les valeurs des charges routières, sont issues du fascicule spécial N° 72- 21 bis ; Cahier des prescriptions communes.

1) Système de charges A

2) Système de charges B

Le système de charge B comporte 3 types de systèmes de chargement :

- système Bc .
- système Bt .
- système Br

3) Efforts de freinage

Les charges de chaussée des systèmes A et Bc sont susceptibles de développer des réactions de freinage, Ff efforts s'exerçant à la surface de la chaussée, dans l'un ou l'autre sens de circulation.

4) Forces centrifuges

Par convention, les forces centrifuges Fc sont calculées uniquement à partir du système Bc dans certaines conditions.

5)- Charges militaires

Sur les itinéraires classés pour permettre la circulation des convois militaires de l'une des classes M 80 ou 120, les ponts doivent être calculés pour supporter les véhicules types , susceptibles dans certains cas d'être plus défavorables que les surcharges des systèmes A et B.

Le système Mc se compose de véhicules types à chenilles ;

Le système Me se compose d'un groupe de deux essieux.

- Convois M 80 :
- Convoi Mc 80 .
- Convoi Me 80
- Convois M 120
- Convoi Mc 120
- Convoi Me 120

6)- Charges exceptionnelles

Sur les itinéraires classés pour permettre la circulation de convois lourds exceptionnels de l'un des types D ou E, les ponts doivent être calculés pour supporter le véhicule-type correspondant décrit ci-après, susceptible dans certains cas d'être plus défavorable que les charges des systèmes A et B.

- Convoi type D
- Convoi type E

7)- Charges sur les trottoirs

Les trottoirs et les pistes cyclables, qui leur sont assimilées, supportent des charges différentes selon le rôle de l'élément structural considéré et selon qu'il s'agit de ponts portant à la fois une ou des chaussées et un ou des trottoirs, ou de ponts réservés exclusivement à la circulation des piétons.

- Charges locales
- Charges générales

4. Sections de calcul :

Dans le calcul des caractéristiques géométriques d'une section (position du centre de gravité, aire, moments d'inertie...), on tient compte des dimensions que présente la section dans la phase considérée.

4.1. Caractéristiques géométriques des sections

La résolution des problèmes d'RDM fait appel à des caractéristiques géométriques des sections droites des corps étudiés. Le principe fondamental consiste à déterminer les contraintes qui agissent dans une section et de comparer la contrainte maximale avec :

- La contrainte limite : $\sigma \leq \sigma_{adm}$

- Traction simple σ=F/B
- Flexion simple σ=M Y/I
- Flexion composée σ=F/B + M Y/ I

- Les caractéristiques géométriques à étudier sont :

- Aire de la section B [cm2]
- Moments statiques S_x et S_y [cm3]
- Moments d'inertie axiaux I_x et I_y [cm4]
- Moments d'inertie centrifuges I_{xy} [cm4]
- Moments d'inertie polaires I_p [cm4]
- Module de résistance W_x et W_y [cm3]
- Module de résistance de torsion W_p [cm3]
- Rayon de giration i_x et i_y [cm]
- Rendement d'une section ρ

a). Moment statique

Les moments statiques de l'aire d'une section par rapport aux axes X et Y, sont donnés par les expressions : $\boldsymbol{S_x = \int_A y\,dA}$ $\boldsymbol{S_y = \int_A x\,dA}$

b). Moment d'inertie

Les moments d'inertie de l'aire d'une section par rapport aux axes X et Y sont donnés par les formules :

$$\boldsymbol{I_x = \int_A y^2\,dA} \qquad \boldsymbol{I_y = \int_A x^2\,dA} \qquad \boldsymbol{I_{xy} = \int_A xy\,dA}$$

Le moment d'inertie polaire d'une section est donné par: $\boldsymbol{I_p = I_x + I_y}$

Théorème :

Le moment d'inertie axial d'une section par rapport à n'importe quel axe est égal au moment d'inertie de cette section par rapport à l'axe central parallèle plus le produit de l'aire de cette section par la distance au CDG de la section à l'axe considéré.

c). Module de résistance

Le module de résistance est égal au quotient du moment d'inertie axial par la distance de l'axe à la fibre la plus éloignée.

$$\boldsymbol{W_x = \frac{I_x}{y}} \qquad \boldsymbol{W_y = \frac{I_y}{x}}$$

d). Rayon de giration

On appelle rayon de giration la quantité donnée par l'équation:

$$\boldsymbol{i_x = \sqrt{\frac{I_x}{B}}} \qquad \boldsymbol{i_y = \sqrt{\frac{I_y}{B}}}$$

e). Rendement d'une section

Le rendement d'une section est donné par:

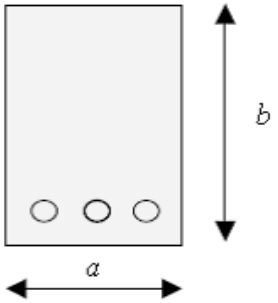
$$\boldsymbol{\rho = \frac{I}{B\,V_s\,V_i}} \quad \boldsymbol{ou} \quad \boldsymbol{\rho = \frac{I}{B\,VV'}} \quad (\boldsymbol{V_s = V \;et\; V_i = V'})$$

4.2. Types de section

4.2.1 Section brute

C'est la section du béton seul, telle qu'elle résulte des dessins de coffrage, sans réduction des conduits et ancrages (Figure 1). Elle est utilisée pour l'évaluation :

- du poids propre d'une structure ;
- des rigidités des différentes pièces constituant la structure (en vue de calculer les sollicitations hyperstatiques) ;
- des déformations dans les ouvrages de classe II.



4.2.2 Section nette

Elle est obtenue en soustrayant de la section brute les vides tels que les conduits et ancrages (fig. 2), même si ces vides seront ultérieurement remplis (BPEL 91 art. 5.2,11). La section nette est utilisée pour le calcul des contraintes à l'ELS en classe I et II.

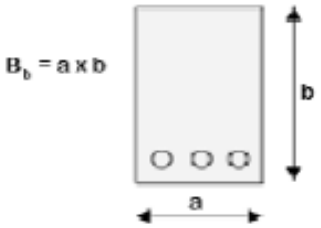


Fig. 1 *Exemple d'une section brute*

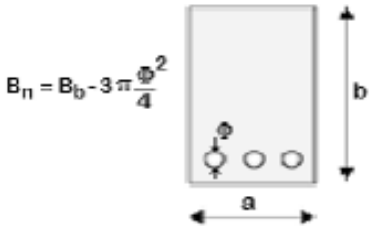


Fig. 2 *Exemple d'une section nette*

4.2.3 Section homogène

Elle est obtenue en ajoutant à la section nette la section des armatures longitudinales de précontrainte ou passives multipliée par un coefficient d'équivalence n, sous condition que les armatures de précontrainte soient adhérentes au béton ; tel les cas suivants :

- armatures de pré-tension où le contact avec le béton est direct,
- armatures de post-tension où l'adhérence est assurée par le coulis d'injection et les gaines.

N.B : Le coefficient d'équivalence est nul ***(n = 0)*** dans le cas de post-tension lorsque les gaines ne sont pas injectées, ou lorsqu'elles sont remplies de graisse.

Le coefficient d'équivalence n prend les valeurs suivantes :

- Armatures de précontrainte : ***n=5***.
- Armatures passives : - Actions de courte durée : $\boldsymbol{n = n_i = 5}$.

- Actions de longue durée : $n = n_v = 15$.

La section homogène B_h s'écrit donc

$$B_h = B_n + nA_P + nA_S$$

B_n **:** est la section nette,

A_p **:** est la section des armatures de précontrainte,

A_s **:** est la section des armatures passives,

4.2.4 Section fissurée :

En classe III, on fait intervenir la section homogène réduite, définie à partir :

- de la seule partie comprimée du béton de la section,
- de la section des armatures passives longitudinales multipliée par le coefficient d'équivalence $n_v = 15$,
- de la section des armatures longitudinales de précontrainte multipliée par la fraction ρ et le coefficient d'équivalence $n_v = 15$.

La section homogène réduite B_{hr} peut s'écrire

$$B_{hr} = B_c + n_v A_S + \rho\, n_v A_P$$

B_c : l'aire de la section de béton comprimé,

ρ: une fraction qui vaut :

- Pré- tension : $\rho = 1$.
- Post tension avec injection du coulis : $\rho = 0.5$.
- Post tension sans adhérence : $\rho = 0$.

4.2.5 Section d'enrobage

C'est la surface de béton délimitée par le contour de la section et deux parallèles à l'axe de flexion encadrant l'ensemble des armatures de précontrainte, à une distance égale minimale admise « c ».

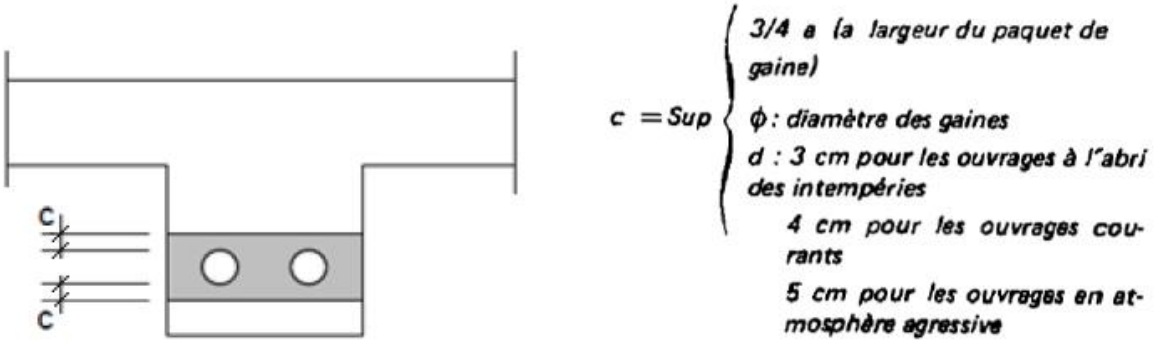


Fig. 3 Délimitation d'une section d'enrobage

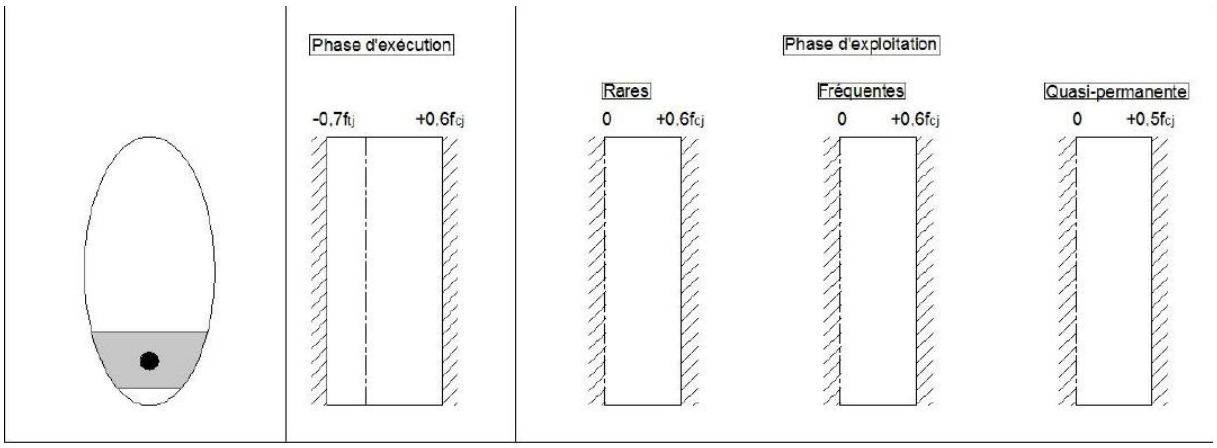
5. Classes de vérification

Pour les sections courantes, les vérifications se répartissent en trois classes auxquelles correspondent des contraintes limites des matériaux.

- **Classe I :** pas de traction dans le béton (précontrainte totale) usage : ouvrages spéciaux qui nécessitent une étanchéité particulière (réservoirs, centrales nucléaires,..).
- **Classe II :** traction admise sans fissuration du béton (précontrainte courante), usage : ouvrages courants exposés aux intempéries.
- **Classe III :** fissuration admise mais limitée par la présence d'armatures passives (précontrainte partielle), usage : planchers de bâtiments, ouvrages non exposés.

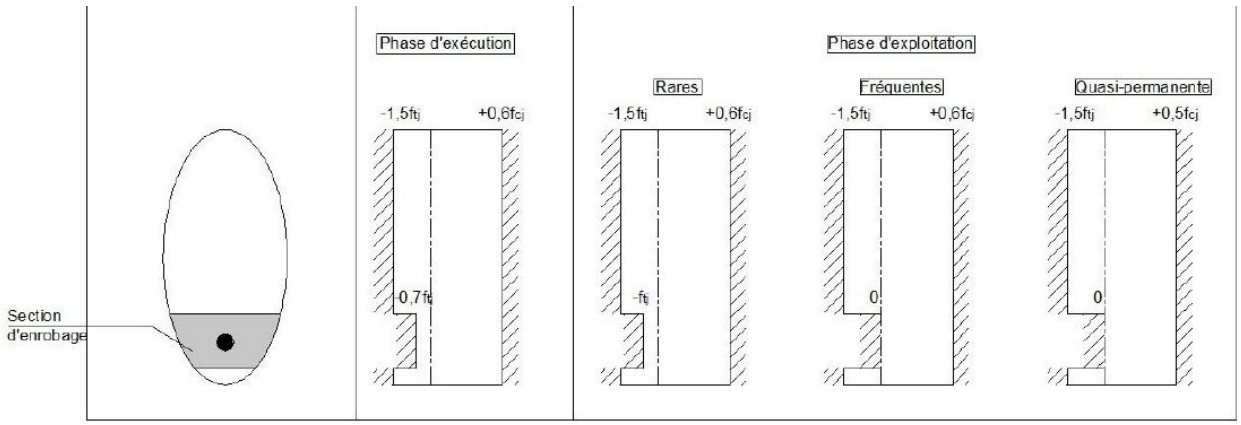
5.1 Classe I pas de traction :

Contraintes limites du béton en classe I :



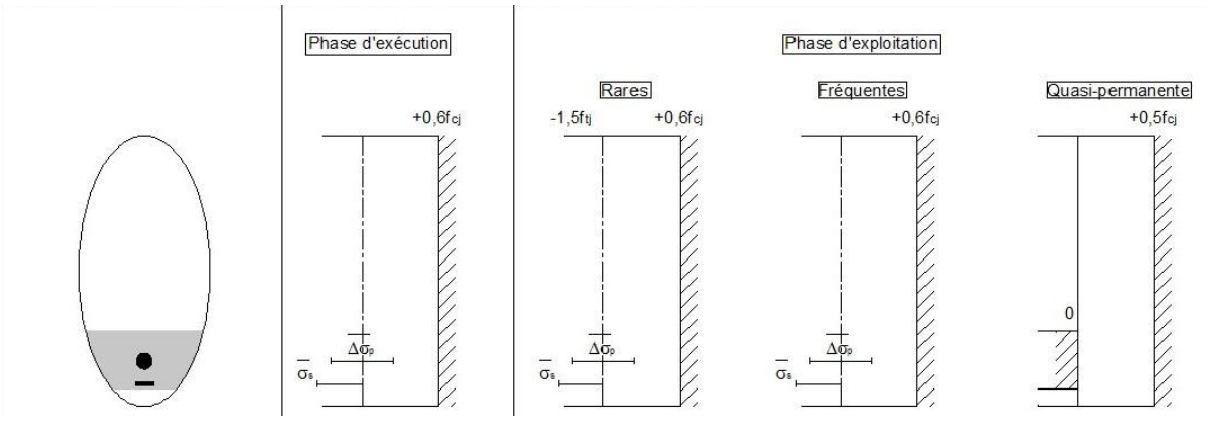
5.2 Classe II pas de fissuration :

Contraintes limites du béton en classe II



5.3 Classe III fissuration limitée par les armatures passives :

Contraintes limites du béton et des armatures passives en classe III



$\Delta\overline{\sigma_p} = 0.10\, f_{prg}$ $\qquad$ $\Delta\overline{\sigma_p} = 100$ MPa

$\overline{\sigma_s} = \min\left(\frac{2}{3} f_e;\ 110\sqrt{f_{tj}}\right)$ $\qquad$ $\overline{\sigma_s} = 0.35 f_e$

6. Flexion à L'ELS

6.1 Notions importantes

6.1.1 Centre de pression C

La section est soumise aux sollicitations suivantes :

- Effort normal : ***P***

- Moment fléchissant *:* $\qquad$ $\boldsymbol{M = M + P.e_p}$ $\qquad$ (A).

Cela équivaut à la force ***P*** appliquée au point C (figure 03).

$$\boldsymbol{M = P.e_c} \qquad \text{(B)}.$$

$$\boldsymbol{e_c = M/P} \qquad \text{(C)}.$$

En remplaçant l'expression de M de l'équation (A) dans l'équation (D), il vient :

$$\boldsymbol{e_c = M/P + e_p} \quad \text{(E)}.$$

Le point ***C*** est appelé centre de pression. Le lieu des points ***C*** le long de la poutre est appelé ligne de pression. D'après la figure 5, on constate que le moment fléchissant ***M*** déplace le centre de pression sur l'axe ***Gy*** de la quantité ***M/P***.

Si le moment ***M = 0***, seul l'effet de la précontrainte est à considérer, l'équation (E) devient :

$\boldsymbol{e_c = e_p}$, la ligne de pression est assimilée au tracé du câble.

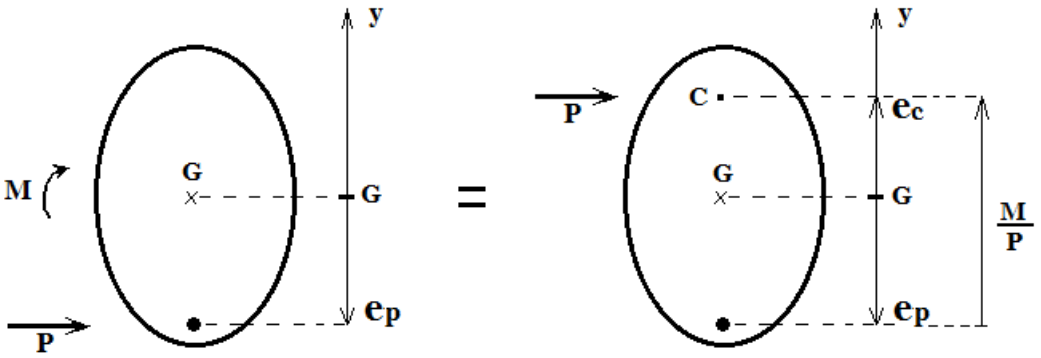


Fig. 03 Sollicitations équivalentes dans une section en B.P

6.1.2 Noyau limite

En classes I et II, on définit le noyau limite comme étant le domaine à l'intérieur duquel peut se déplacer le centre de pression ***C*** sans que les contraintes limites de traction $\overline{\sigma_m}$ et de compression $\overline{\sigma_M}$ ne soient dépassées (figure 04).

En fibre supérieure ***(y = +v_s)***, on a :

$$\overline{\sigma_{ms}} \leq \sigma = P\left(\frac{1}{B} - e_c\frac{v_s}{I}\right) \leq \overline{\sigma_{Ms}} \qquad \text{(F)}.$$

En fibre inférieure ***(y = -v_i)***, on a :

$$\overline{\sigma_{mi}} \leq \sigma = P\left(\frac{1}{B} - e_c\frac{v_i}{I}\right) \leq \overline{\sigma_{Mi}} \qquad \text{(G)}.$$

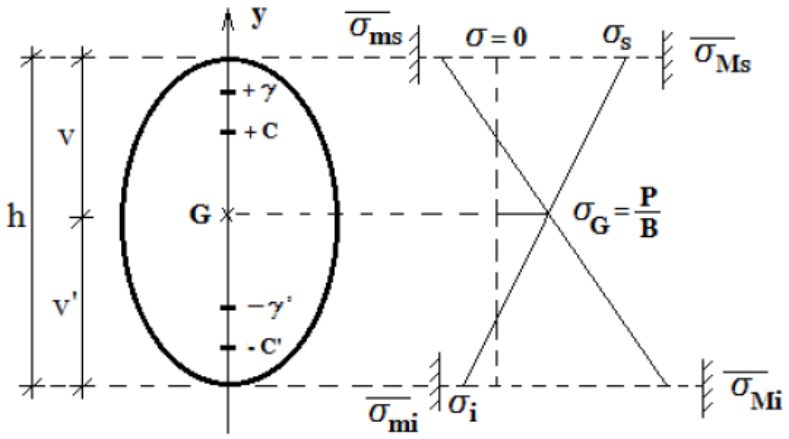


Fig. 04 Contraintes normales limites d'une section

Remarque : D'après la figure 04, on constate qu'au niveau du centre de gravité ***G (y = 0)*** tous les diagrammes de contraintes passent par le point d'abscisse : $\sigma_G = P/B$.

$$\sigma_G = \frac{P}{B} = \frac{\sigma_s v_i + \sigma_i v_s}{h}$$

En développant les inéquations (F) et (G), on obtient

$$\left(\frac{\overline{\sigma_{ms}}}{P} - \frac{1}{B}\right)\frac{I}{v_s} \leq e_c \leq \left(\frac{\overline{\sigma_{Ms}}}{P} - \frac{1}{B}\right)\frac{I}{v_s}$$

$$\left(\frac{1}{B} - \frac{\overline{\sigma_{Mi}}}{P}\right)\frac{I}{v_i} \leq e_c \leq \left(\frac{1}{B} - \frac{\overline{\sigma_{mi}}}{P} -\right)\frac{I}{v_i}$$

En utilisant la notion du rendement géométrique qui s'écrit

$$\rho = \frac{I}{Bv_i v_s} \quad \text{et} \quad \rho v_i = \frac{I}{Bv_s} \quad , \quad \rho v_s = \frac{I}{Bv_i}$$

En combinant les expressions des relations précédentes il vient :

$$c_i = -\rho v_l\left(1 - B\frac{\overline{\sigma_{ms}}}{P}\right) \leq e_c \leq \rho v_l\left(B\frac{\overline{\sigma_{Ms}}}{P} - 1\right) = +\gamma_s$$

Et

$$-\gamma_i = -\rho v_s\left(B\frac{\overline{\sigma_{Mi}}}{P} - 1\right) \leq e_c \leq \rho v_s\left(1 - B\frac{\overline{\sigma_{mi}}}{P}\right) = +c_s$$

Ainsi on peut écrire :

$$-a_i = sup\begin{cases} -c_i = -\rho v_l\left(1 - B\frac{\overline{\sigma_{ms}}}{P}\right) \\ -\gamma_i = -\rho v_s\left(B\frac{\overline{\sigma_{Mi}}}{P} - 1\right) \end{cases} \leq e_c \leq +a_s = inf\begin{cases} +\gamma_s = \rho v_l\left(B\frac{\overline{\sigma_{Ms}}}{P} - 1\right) \\ +c_s = \rho v_s\left(1 - B\frac{\overline{\sigma_{mi}}}{P}\right) \end{cases}$$

Pour toute section d'abscisse x de la poutre, le centre de pression c doit se situer à l'intérieur du noyau limite (relation suivante), ce qui donne à l'intérieur de la poutre un fuseau limite.

$$-a_i \leq e_c \leq +a_s$$

Remarque : Le segment $[-c_i, +c_s]$ de l'axe *Gy* (figure 6) est le noyau limite de traction du fait que $-c_i$ et $+c_s$ sont définis à partir des contraintes limites de traction $\overline{\sigma_{mi}}$ et $\overline{\sigma_{ms}}$ De même, le segment $[-\gamma_i, +\gamma_s]$ de l'axe Gy est **le noyau limite de compression** puisque $-\gamma_i$, et $+\gamma_s$ sont définis à partir des contraintes limites de compression $\overline{\sigma_{Mi}}$ et $\overline{\sigma_{Ms}}$.

6.1.3 Fuseau de passage de la précontrainte

Des équations précédentes on obtient :

$$-a_i \leq \frac{M}{P} + e_p \leq +a_s$$

$$-a_i - \frac{M}{P} \leq e_p \leq +a_s - \frac{M}{P}$$

Sachant que le moment fléchissant M peut varier entre deux valeurs extrêmes ; minimale M_m et maximale M_M.

$$M_m \leq M \leq M_M$$

Par la suite, la limitation de l'excentricité du câble moyen s'écrit

$$-a_i - \frac{M_m}{P} \leq e_p \leq +a_s - \frac{M_M}{P}$$

Le long de la poutre, l'excentricité e_p du câble moyen doit satisfaire à la relation précédente, ce qui permet de tracer le fuseau de passage du câble moyen (fig.05).

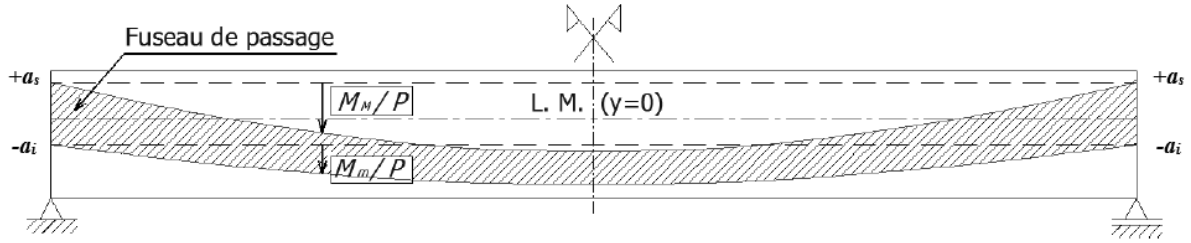


Fig.05 Fuseau de passage du câble moyen dans une poutre

6.1.4 Limites pratiques imposées à l'excentricité de la précontrainte

Le câble moyen doit se situer à l'intérieur de la poutre tout en respectant l'enrobage minimal. D'après la figure 10, on doit respecter

$$-v_i + t_i \leq e_p \leq +v_s - t_s$$

Où t_s et t_i sont les distances minimales entre le centre de gravité du câble moyen et la fibre supérieure et la fibre inférieure respectivement (figure 06).

Les distances t_s et t_i sont calculées à partir des enrobages définis dans l'article 10.2, 23 du BPEL 91.

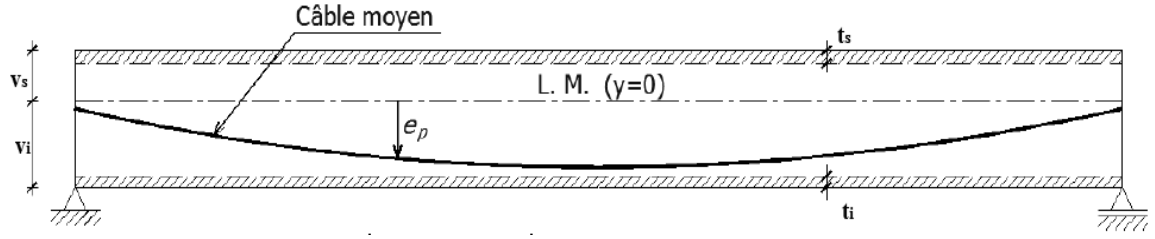


Fig 06. Le câble moyen doit passer à l'intérieur de la section enrobée

6.1.5 Différents cas rencontrés pour le fuseau de passage

Le fuseau de passage de la précontrainte peut présenter trois cas différents que nous définissons ci-dessous.

a/- Section sous-critique : Le fuseau de passage se situe à l'intérieur de la zone enrobée de la poutre (figure 07). Le câble moyen peut passer librement à l'intérieur du fuseau.

$$-v_i + t_i \leq -a_i - \frac{M_m}{P} \leq e_p \leq +a_s - \frac{M_M}{P} \leq v_s - t_s$$

Ce qui équivaut à la relation précédente, qu'on va réécrire

$$-a_i - \frac{M_m}{P} \leq e_p \leq +a_s - \frac{M_M}{P}$$

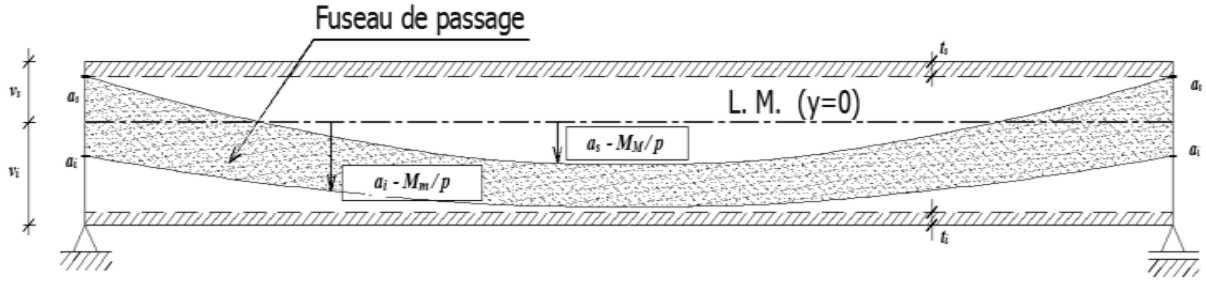


Fig. 07 Section sous-critique ; le fuseau de passage se situe à l'intérieur de la zone enrobée

b/- Section sur-critique : Si l'une des deux frontières supérieure ou inférieure du fuseau de passage sort de la zone d'enrobage (figure 08), on parle alors de section sur-critique. Le câble moyen n'est pas libre de passer à travers tout le fuseau mais seulement à l'intérieur de la zone enrobée. Dans le cas de moment positif (figure 08), on doit vérifier:

$$-v_i + t_i \leq e_p \leq +a_s - \frac{M_M}{P}$$

Si le moment est négatif, on vérifie :

$$-a_i - \frac{M_m}{P} \leq e_p \leq v_s - t_s$$

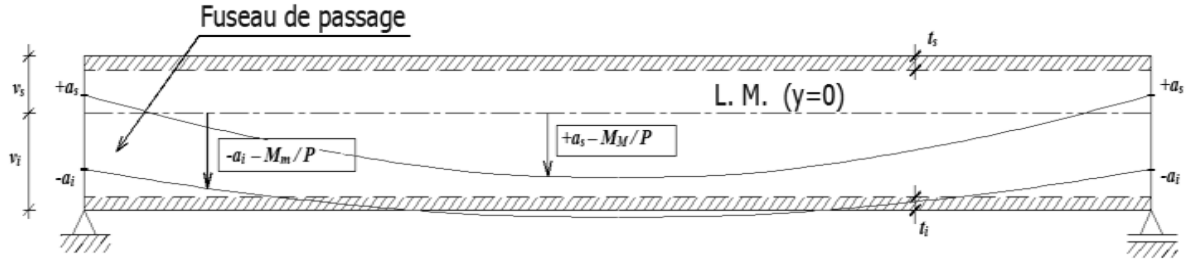


Fig. 08 Section sur-critique ; une partie du fuseau de passage est en dehors de zone enrobée

c/- Problème sans solution : Lorsque les deux frontières du fuseau de passage se trouvent en dehors de la zone d'enrobage (figure 09), il n'y a aucune possibilité pour faire passer le câble moyen. Ce problème survient lorsque la section du béton est mal dimensionnée, il faut alors reprendre son étude.

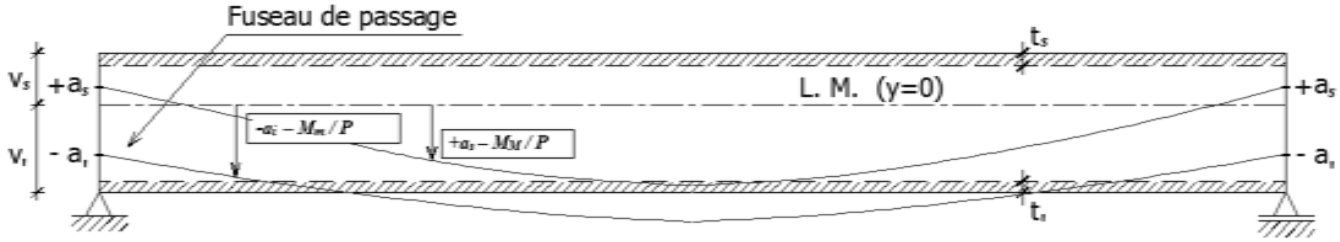


Fig. 09 Problème sans solution ; le fuseau de passage est en dehors de zone enrobée à mi-travée

6.2 Calcul des sections en classes I et II

6.2.1 Utilisation des noyaux limites

- Dans la pratique, pour la détermination de la précontrainte $\boldsymbol{P}$ et son excentricité $\boldsymbol{e_p}$, on utilise le noyau limite de traction $\mathbf{[-c_i, +c_s]}$ qui est défini précédemment, soit :

$$-c_i - \frac{M_m}{P} \leq e_p \leq +c_s - \frac{M_M}{P} \qquad (*)$$

c_i et c_s, s'écrivent, sous la forme

$$-c_i = -\rho v_l \left(1 - B\frac{\overline{\sigma_{ms}}}{P}\right) \quad \text{et} \quad +c_s = \rho v_s \left(1 - B\frac{\overline{\sigma_{mi}}}{P}\right)$$

Le noyau limite de compression $\mathbf{[-\gamma_i, +\gamma_s]}$ qui est défini précédemment, est utilisé à son tour pour dimensionner la section du béton, soit :

$$-\gamma_i - \frac{M_m}{P} \leq e_p \leq +\gamma_s - \frac{M_M}{P}$$

$-\gamma_i$ et γ_s , s'écrivent sous la forme :

$$-\gamma_i = -\rho v_s \left(B\frac{\overline{\sigma_{Mi}}}{P} - 1\right) \quad \text{et} \quad +\gamma_s = \rho v_l \left(B\frac{\overline{\sigma_{Ms}}}{P} - 1\right)$$

6.2.2 Cas d'une section sous-critique

Le fuseau de passage se trouve à l'intérieur de la zone enrobée, donc il satisfait à la relation (**). Mais aussi, le centre de pression doit se situer à l'intérieur du noyau limite de traction qui est défini par la relation (*). Cette dernière implique que :

$$-\boldsymbol{c_i} - \frac{\boldsymbol{M_m}}{\boldsymbol{P}} \leq +\boldsymbol{c_s} - \frac{\boldsymbol{M_M}}{\boldsymbol{P}} \quad (**)$$

On peut déduire de cette relation, la valeur minimale PI de la précontrainte (économique) qui est la plus économique. Sa valeur s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{P_I} \geq \frac{\boldsymbol{M_M} - \boldsymbol{M_m}}{\boldsymbol{c_s} + \boldsymbol{c_i}}$$

L'excentricité correspondant à $\boldsymbol{P_I}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{e_p} = +\boldsymbol{c_s} - \frac{\boldsymbol{M_M}}{\boldsymbol{P}} \quad \text{ou bien} \quad \boldsymbol{e_p} = -\boldsymbol{c_i} - \frac{\boldsymbol{M_m}}{\boldsymbol{P}}$$

Dans une section sous-critique, on peut atteindre les deux contraintes limites de traction σ_{mi} et $\boldsymbol{\sigma_{ms}}$ si on applique les moments extrêmes respectivement $\boldsymbol{M_M}$ et $\boldsymbol{M_m}$.

En remplaçant les expressions de c_i et c_s et exploitation des équations, il vient :

$$\boldsymbol{P_I} = \frac{\boldsymbol{M_M} - \boldsymbol{M_m}}{\boldsymbol{c_s} + \boldsymbol{c_i}} = \frac{\Delta \boldsymbol{M}}{\boldsymbol{c_s} + \boldsymbol{c_i}} = \frac{\Delta \boldsymbol{M}}{\boldsymbol{\rho h} - \frac{\boldsymbol{\rho v_s B}\,\overline{\boldsymbol{\sigma_{mi}}}}{\boldsymbol{P_I}} - \frac{\boldsymbol{\rho v_i B}\,\overline{\boldsymbol{\sigma_{ms}}}}{\boldsymbol{P_I}}}$$

$$\boldsymbol{P_I} = \begin{cases} \dfrac{\Delta \boldsymbol{M}}{\boldsymbol{c_s} + \boldsymbol{c_i}} \\ \dfrac{\Delta \boldsymbol{M}}{\boldsymbol{\rho h}} + \dfrac{\boldsymbol{\rho B}\,(\boldsymbol{v_s}\,\overline{\boldsymbol{\sigma_{mi}}} + \boldsymbol{v_i}\,\overline{\boldsymbol{\sigma_{ms}}})}{\boldsymbol{h}} \\ \dfrac{\Delta \boldsymbol{M} + \dfrac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{v_i}}\overline{\boldsymbol{\sigma_{mi}}} + \dfrac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{v_s}}\overline{\boldsymbol{\sigma_{ms}}})}{\boldsymbol{\rho h}} \end{cases}$$

D'où

$$\frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{v_s}} \geq \frac{\boldsymbol{M_M} - \boldsymbol{M_m}}{\overline{\boldsymbol{\sigma_{Ms}}} - \overline{\boldsymbol{\sigma_{ms}}}}$$

$$\frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{v_i}} \geq \frac{\boldsymbol{M_M} - \boldsymbol{M_m}}{\overline{\boldsymbol{\sigma_{Mi}}} - \overline{\boldsymbol{\sigma_{mi}}}}$$

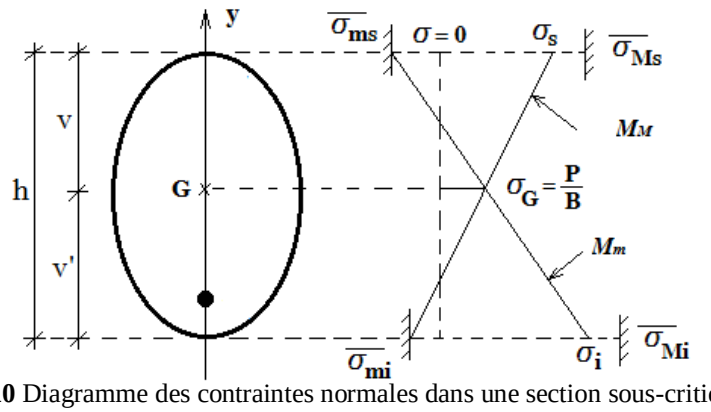


Fig. 10 Diagramme des contraintes normales dans une section sous-critique

6.2.3 Cas d'une section sur-critique

Sous un moment positif, le noyau limite de traction doit vérifier la relation :

$$-v_i + t_i \leq e_p \leq +c_s - \frac{M_M}{P} \qquad -v_i + t_i \leq +c_s - \frac{M_M}{P}$$

Il en résulte : $P \geq \frac{M_M}{c_s + v_i - t_i}$

La valeur minimale (économique) de précontrainte est donc

$$P_{II} \geq \frac{M_M}{c_s + v_i - t_i} = \frac{M_M}{v_i + \rho v_s \left(1 - \frac{B\,\overline{\sigma_{mi}}}{P_{II}}\right) - t_i}$$

Soit :

$$P_{II} = \begin{cases} \dfrac{M_M}{c_s + v_i - t_i} \\ \dfrac{M_M + \rho v_s B\,\overline{\sigma_{mi}}}{v_i + \rho v_s - t_i} \end{cases}$$

Dans le cas d'une section sur-critique, l'excentricité de la précontrainte vaut

$$e_p = -v_i + t_i$$

Dans une section sur-critique soumise à un moment fléchissant positif, on a :

$$-c_i - \frac{M_m}{P_{II}} \leq e_p = -v_i + t_i = c_s - \frac{M_M}{P_{II}}$$

Dans une section sur-critique sous moment positif, on n'atteint qu'une seule contrainte limite de traction et ce dans la fibre inférieure.

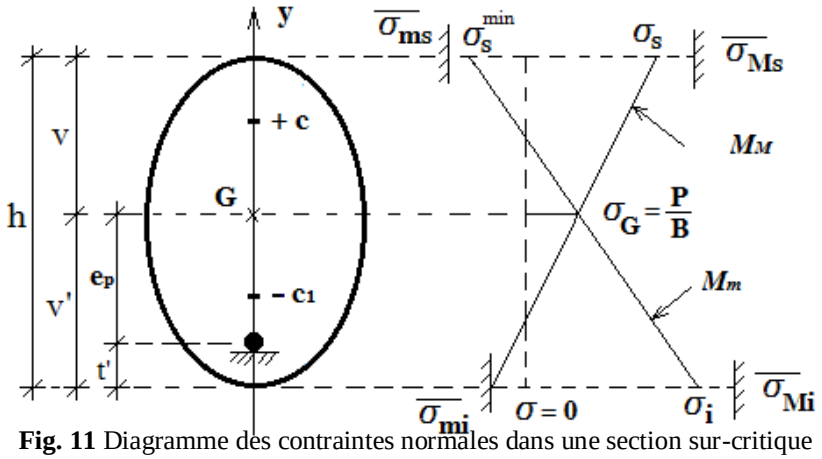


Fig. 11 Diagramme des contraintes normales dans une section sur-critique

6.2.4 Caractère d'une section :

Pour savoir si une section est sous-critique ou sur-critique, on procède de la manière suivante:

1- On calcule P_I et P_{II}.

2- a - si : $P_I > P_{II} \rightarrow e_{PI} < e_{PII} = |-v_i + t_i|$ La section est sous-critique.

b - si : $P_I < P_{II} \rightarrow e_{PI} > e_{PII} = |-v_i + t_i|$ La section est sur-critique

6.2.5 Prise en compte de la variation de la précontrainte :

Dans les paragraphes précédents on supposait que la précontrainte P prenait une valeur unique, alors qu'en réalité ***P*** varie entre deux valeurs extrêmes (***$P_1(x, t)$*** et ***$P_2(x, t)$***; une valeur maximale ***P_1*** et une valeur minimale ***P_2***.

Dans ce qui suit, on va prendre en considération la variation de la précontrainte. En conséquence, les formules de précédentes seront généralisées.

6.2.5.1 Fourchette de la précontrainte

D'après les équations :

$$P_1(x, t) = 1{,}02\, P_0 - 0{,}80\, \Delta P(x, t)$$

$$P_2(x, t) = 0{,}98\, P_0 - 1{,}20\, \Delta P(x, t)$$

$$P_m(x, t) = P_0 - \Delta P(x, t)$$

L'erreur relative λ commise sur le précontraint est : $\lambda = \frac{P_1 - P_m}{P_m}$

on obtient : $\lambda = \frac{0.02\, P_0 + 0.2\, \Delta P}{P_0 - \Delta P}$

La perte totale est estimée à la valeur : $\Delta P_\infty = 0.25\, P_0$

Par remplacement dans l'équation précédente : ***λ=0.093***, cette erreur relative peut être arrondie à ***λ=10%.***

La perte instantanée est évaluée à $\Delta P_i = 0.15\, P_0$, ce qui donne ***λ=0.059***, qui peut être arrondie à ***λ=6%.***

D'une manière générale, en prenant $P_m = P$, on peut écrire :

- ***$P_1 = (1+\lambda)\, P$.***
- ***$P_2 = (1-\lambda)\, P$.***

6.2.5.2 Généralisation des formules de dimensionnement :

La vérification des contraintes sous moment minimum *Mm* se fait sous la précontrainte maximale ***P_1*** (figure 12-a). En divisant ce diagramme par la valeur (1+λ), on obtient le diagramme fictif de la figure (12-b).

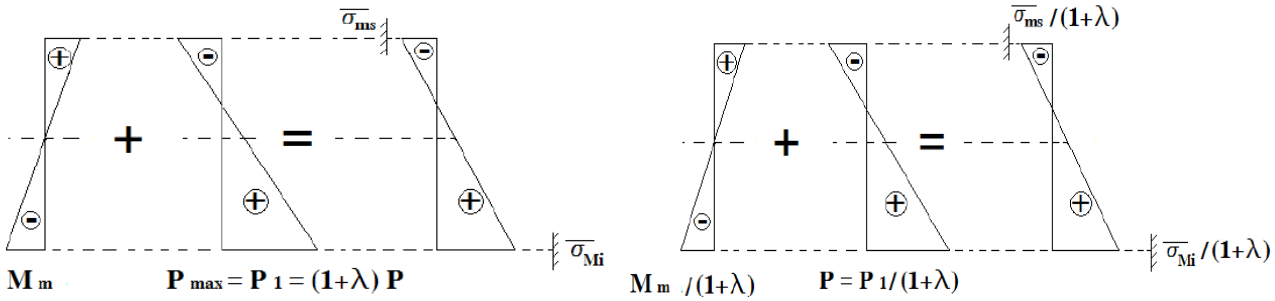


Fig 12-a Diagramme réel **Fig 12-b** Diagramme fictif équivalent

Fig. 12 Contraintes sous moment minimal Mm et précontrainte maximale P1

La vérification des contraintes sous moment maximal M_M se fait sous la précontrainte minimale ***P2*** (figure 12-a). En divisant ce diagramme par la valeur ***(1- λ),*** on obtient le diagramme fictif de la figure (12-b).

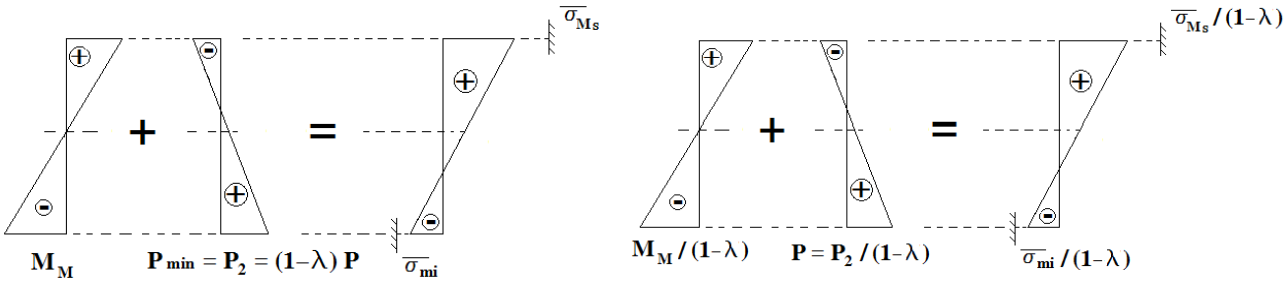


Fig 13-a Diagramme réel **Fig 13-b** Diagramme fictif équivalent

Fig. 13 Contraintes sous moment maximal M_M et précontrainte maximale P_2

En utilisant les diagrammes fictifs des figures (12-b) et (13-b), on se ramène à une seule valeur de précontrainte ***P*** qui représente la valeur probable. Cela nous permet de conclure qu'on peut réaliser l'unicité de la précontrainte seulement en utilisant les digrammes fictifs qui sont équivalents aux digrammes réels par une simple division par ***(1+ λ)*** et ***(1- λ).***

6.2.6 Calcul des armatures actives (de précontrainte)

Comme il a été vu dans les paragraphes précédents, le calcul de la précontrainte se fait pour une valeur probable Pm ; $P_m(x, t) = P_0 - \Delta P(x, t)$

La perte de précontrainte **ΔP** est estimée à

- Perte finale : $\Delta P_\infty = 0.25\, P_0$
- Perte initiale : $\Delta P_i = 0.15\, P_0$

En remplaçant ces équations dans la première équation :

- Précontrainte finale: $P_\infty = 0.75\, P_0$
- Précontrainte initiale: $P_i = 0.85\, P_0$

A partir de ces équations, on peut calculer la précontrainte P0 à l'origine :

$$P_0 = \frac{P_\infty}{0.75} \quad \text{ou bien} \quad P_0 = \frac{P_i}{0.85}$$

La section A_p des armatures de précontrainte se calcule par : $A_p = \frac{P_0}{\sigma_{p0}}$

σ_{P0}: la tension à l'origine de l'armature de précontrainte.

6.2.7 Calcul des armatures passives (ordinaires de B.A)

Deux types d'armatures sont à prévoir :

- les armatures de peau,

- les armatures en zones tendues.

6.2.7.1 Armatures de peau :

Elles sont prévues pour limiter la fissuration du béton avant la mise en précontrainte, en jeune âge, sous l'effet du retrait différentiel et du gradient thermique. Les armatures de peau sont

disposées dans la zone périphérique de la pièce. Leur section minimale est définie par le BPEL 91 (Art. 6.1, 31).

- **Armatures de peau longitudinales :**

$$A_{spl} \geq sup\left(\frac{B}{1000}; 3cm^2 \ /ml\ du\ parement\ transversal\right)$$

- **Armatures de peau transversales :**

$$A_{spt} \geq sup(2cm^2 \ /ml \ \ du\ parement\ longitudinal)$$

6.2.7.2 Armatures passives en zones tendues

Dans la partie tendue du béton en classes II et III et sous condition que la hauteur de cette partie doit dépasser les 5 cm (***h'≥5cm***), la section d'armatures passives se calcule par la condition de non fragilité du béton (Art. 6.1,32 du BPEL 91) selon la formule ;

$$A_s = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{f_e}.\frac{f_{tj}}{\sigma_{Bt}}$$

B_t :est l'aire de la partie tendue du béton (figure 21).

σ_{Bt} : est la valeur absolue de la contrainte maximale de traction.

N_{Bt} : est la force résultante due aux contraintes de traction du béton.

f_e :est la limite élastique des armatures passives.

B_t , σ_{Bt} et N_{Bt} sont calculés à partir de la section non fissurée en classes II et III.

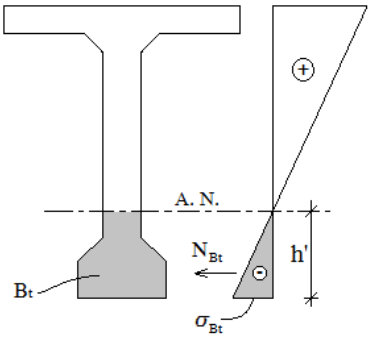


Fig. 14 Zone tendue inférieure dans une poutre en T

Dans le cas de la pré-tension, la section d'armatures passives se calcule par l'équation :

$$A_s = \frac{B_t}{1000} + (\frac{N_{Bt}}{\sigma_{slim}} - A_P).\frac{f_{tj}}{\sigma_{Bt}}$$

$$\sigma_{slim} = min\left(f_e ; 250\eta_p\right)MPa$$

η_p : le coefficient de fissuration des armatures de précontrainte par pré-tension :

- Barres adherents Barres: $\eta_p=1$.
- Torrons: $\eta_p=1.3$

A_p **:** la section d'armatures de pré-tension disposées sur une hauteur h_{lim} de la zone tendue du béton.

$$h_{lim} = sup\left(\frac{2}{3}h'; 5cm\right)$$

6.2.8 Tracé du câble moyen

Dans une poutre précontrainte (figure 23), l'effort tranchant réduit s'écrit

$$V_{red} = V - P\sin\alpha$$

Pour minimiser V_{red}, on pose

$$P\sin\alpha = \frac{V_M + V_m}{2}$$

Où V_M et V_m sont respectivement les efforts tranchants ; maximal et minimal.

L'angle d'inclinaison initiale du câble se calcule à partir de l'équation précédente, soit :

$$\alpha = arc\sin\left(\frac{V_M+V_m}{2P}\right)$$

Cette dernière équation est appliquée si la longueur de la poutre est assez importante. Dans le cas contraire, on peut augmenter la valeur de l'angle α de telle façon à vérifier l'allure parabolique du câble moyen.

Dans la figure 23, on choisit le repère ***(B, x, y)*** où ***B*** est le point à partir duquel le câble reste rectiligne horizontal jusqu'au point médian ***M*** de la poutre. Le tronçon ***AB*** est parabolique pour lequel on peut écrire l'équation : $Y = a\,x^2$

Au point A, on a: $e_p = a\,x_B^2$, d'où $a = \frac{e_p}{x_B^2}$

L'équation de la parabole s'écrit donc sous la forme : $Y = \frac{e_p}{x_B^2}\,x^2$

$\mathbf{x_B}$ se calcule comme suit:

$tg\alpha = Y'(x = x_B)$ c.a.d $tg\alpha = 2\,\frac{e_p}{x_B^2}\,x_B$

$$x_B = 2\,\frac{e_p}{tg\,\alpha}$$

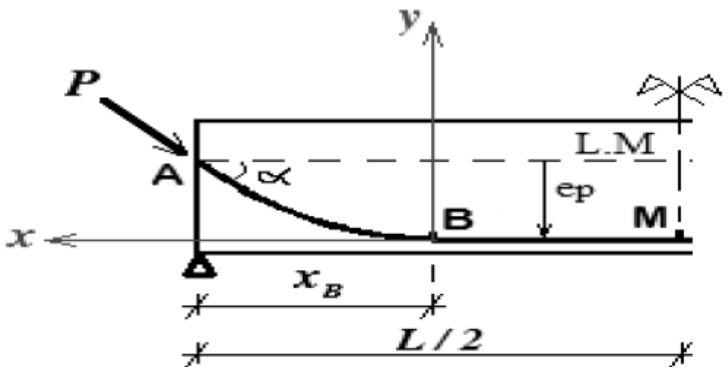


Fig. 15 Tracé du câble moyen