Chapitre III

Les fonctions réelles à une variable réelle

1 Notions de fonction

1.1 Définitions

Définition 1.1 *Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$.*
En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f.

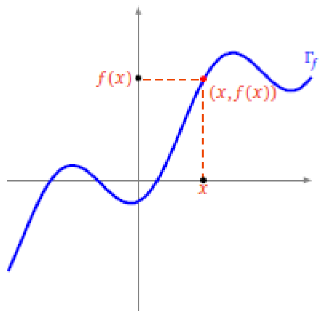
Exemple 1.1 *La fonction inverse :*

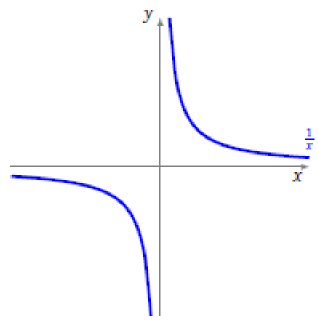
$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

Le graphe d'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boxed{\Gamma_f = \Big\{(x, f(x)) \mid x \in U\Big\}.}$$

Le graphe d'une fonction (à gauche), l'exemple du graphe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (à droite).





1.2 Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la somme de f et g est la fonction $f + g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$;
- le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$;
- la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in U$.

1.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 1.2 *Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors:*

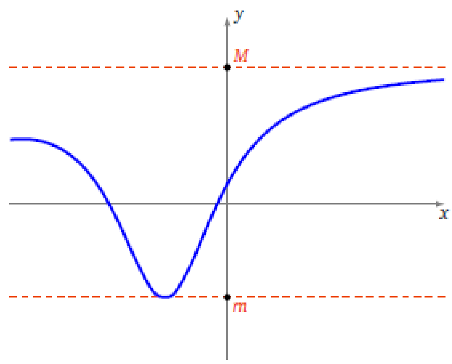
- $f \geq g$ *si* $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ *si* $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ *si* $\forall x \in U \quad f(x) > 0$;
- f *est dite constante sur* U *si* $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \ f(x) = a$;
- f *est dite nulle sur* U *si* $\forall x \in U \quad f(x) = 0$.

Définition 1.3 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

- f *est majorée sur* U *si* $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \ f(x) \leq M$;

- *f est minorée sur U si* $\exists m \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in U \;\; f(x) \geq m$;
- *f est bornée sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si* $\exists M \in \mathbb{R} \; \forall x \in U \quad |f(x)| \leq M$.

Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).

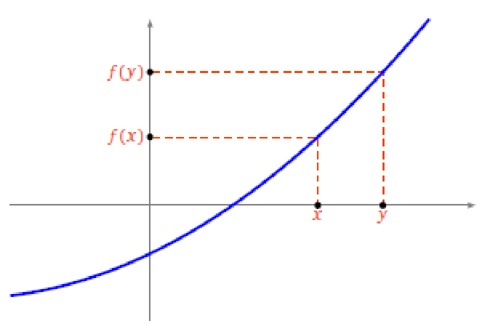


1.4 Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 1.4 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

- *f est croissante sur U si* $\forall a, b \in U \quad a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$
- *f est strictement croissante sur U si* $\forall a, b \in U \quad a < b \implies f(a) < f(b)$
- *f est décroissante sur U si* $\forall a, b \in U \quad a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$
- *f est strictement décroissante sur U si* $\forall a, b \in U \quad a < b \implies f(a) > f(b)$
- *f est monotone (resp. strictement monotone) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U.*

Voici le graphe d'une fonction strictement croissante



Exemple 1.2 • *La fonction racine carrée* $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ *est strictement croissante.*

- *Les fonctions exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et logarithme* $\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *sont strictement croissantes.*

- *La fonction valeur absolue* $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ *n'est ni croissante, ni décroissante.*

  Par contre, la fonction $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ *est strictement croissante.*

1.5 Parité et périodicité

Définition 1.5 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a,a[$ ou $[-a,a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :*

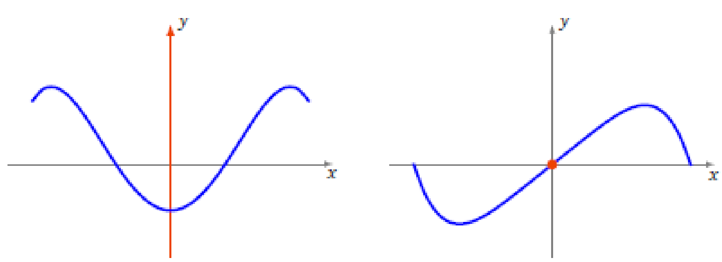
- *f est paire si* $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,

- *f est impaire si* $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique :

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).

- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).



Exemple 1.3 • *La fonction* $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est paire. La fonction* $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est impaire.*

Définition 1.6 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$.*

Exemple 1.4 *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.*

2 Limites

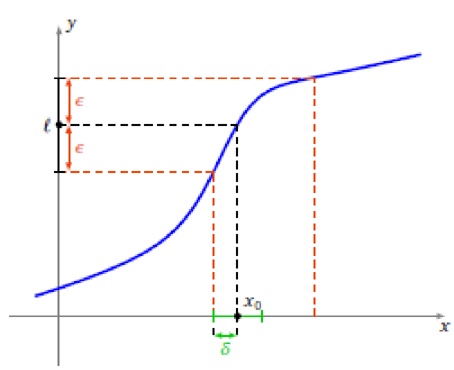
2.1 Limite en un point

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 2.1 *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon}$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.



Remarque 2.1
- *L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.*
- *L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$*

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 2.2 • *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si*

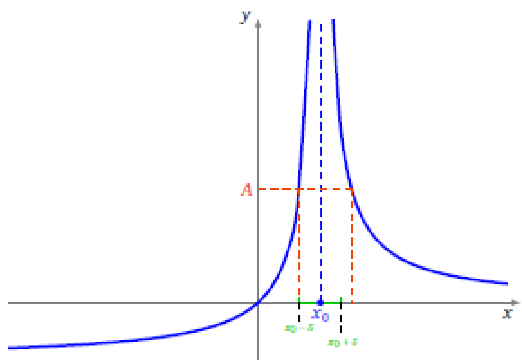
$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

• *On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si*

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.



2.2 Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition 2.3 • *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

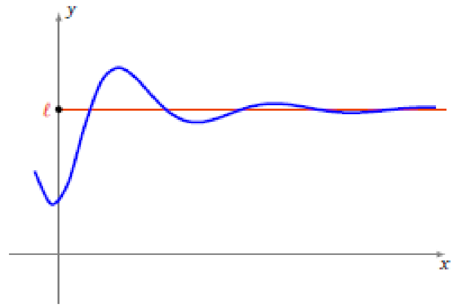
On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ *ou* $\lim_{+\infty} f = \ell$.

• *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si*

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $] - \infty, a[$.



Exemple 2.1 *On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si\ n\ est\ pair \\ -\infty & si\ n\ est\ impair \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0.$

2.2.1 Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 2.4
- *On appelle limite à droite en x_0 de f la limite de la fonction $f\big|_{]x_0,b[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x_0^+} f$.*
- *On définit de même la limite à gauche en x_0 de f : la limite de la fonction $f\big|_{]a,x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x_0^-} f$.*
- *On note aussi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$ pour la limite à gauche.*

Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

3 Unicité de la limite

Proposition 3.1 $\boxed{\textit{Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.}}$

Proposition 3.2 $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \ell}$

Exemple 3.1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 2x+3 & si \quad x \geq 0 \\ 4x+5 & si \quad x < 0 \end{cases}.$$

On a

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 3$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 5$ *Dans ce cas on dit que f n'admet pas une limite en* 0.

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$

Proposition 3.3 *Si* $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors :*

- $\lim\limits_{x_0} (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x_0} (f+g) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell'$
- *si* $\ell \neq 0$, *alors* $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$
  De plus, si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ *(ou* $-\infty$*) alors* $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = 0$
- *si h est une fonction bornée et* $\lim\limits_{x_0} f = 0$ *alors* $\lim\limits_{x_0} (h \cdot f) = 0$.

Proposition 3.4 *(Composition de limites)*

$$\boxed{\text{Si } \lim_{x_0} f = \ell \text{ et } \lim_{\ell} g = \ell', \text{ alors } \lim_{x_0} g \circ f = \ell'.}$$

Proposition 3.5

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell \leq \ell'$.
- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- *Théorème des gendarmes*

$$\boxed{\text{Si } f \leq g \leq h \text{ et si } \lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors } g \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x_0} g = \ell.}$$

4 Continuité en un point

4.1 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 4.1 • *On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)}$$

• *On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*
On note $C(I;\mathbb{R})$ ou $C^0(I;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 4.2 • *On dit que f est continue à droite en point $x_0 \in I$ si*

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

• *On dit que f est continue à gauche en point $x_0 \in I$ si*

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

Exemple 4.1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 2x+1 \quad si \quad x>1 \\ 3 \quad si \quad x=1 \\ 4x+5 \quad si \quad x<1 \end{cases}.$$

On a
$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = 3 = f(1)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = 9 \neq f(1)$ *Dans ce cas on dit que* f *n'admet pas une limite en* 1.
f est continue à droite en 1 mais n'est pas ontinue à gauche en 1.
donc f n'est pas ontinue en 1

Exemple 4.2 *Les fonctions suivantes sont continues :*

- *la fonction racine carrée* $x \mapsto \sqrt{x}$ *sur* $[0, +\infty[$,
- *les fonctions* sin *et* cos *sur* $\mathbb{R}$,
- *la fonction valeur absolue* $x \mapsto |x|$ *sur* $\mathbb{R}$,
- *la fonction* exp *sur* $\mathbb{R}$,
- *la fonction* ln *sur* $]0, +\infty[$.

Proposition 4.1 *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues en un point* $x_0 \in I$. *Alors*

- $\lambda \cdot f$ *est continue en* x_0 *(pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*),*
- $f + g$ *est continue en* x_0,
- $f \times g$ *est continue en* x_0,
- *si* $f(x_0) \neq 0$, *alors* $\dfrac{1}{f}$ *est continue en* x_0.

Proposition 4.2 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que* $f(I) \subset J$. *Si* f *est continue en un point* $x_0 \in I$ *et si* g *est continue en* $f(x_0)$, *alors* $g \circ f$ *est continue en* x_0.

4.2 Prolongement par continuité

Définition 4.3 *Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- *On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$.*
- *On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

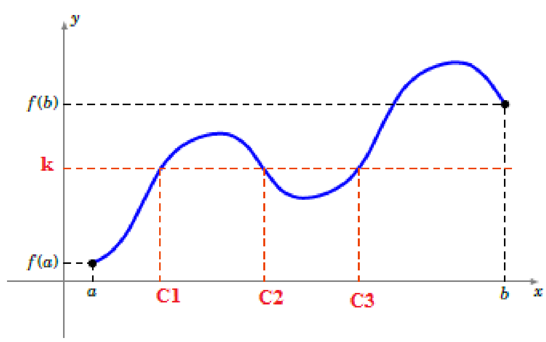
Exemple 4.3 $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$
Le prolongement $\tilde{f}$ de f définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

4.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.1 *Soit f une fonction continue sur intervalle $[a, b]$.*

$$\boxed{\text{Pour tout réel } k \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b), \text{ il existe } c \in [a, b] \text{ tel que } f(c) = k.}$$



Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 4.2 *Soit f une fonction continue sur intervalle $[a, b]$.*

$$\boxed{\text{Si } f(a) \cdot f(b) < 0, \text{ alors il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f(c) = 0.}$$

5 Fonctions monotones et bijections

5.1 Rappels : injection, surjection, bijection

Définition 5.1 *Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.*

- *f est injective si $\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$;*
- *f est surjective si $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$;*
- *f est bijective si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F \ \exists$ unique $x \in E \quad y = f(x)$.*

Proposition 5.1 *Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.*

5.2 Fonctions monotones et bijections

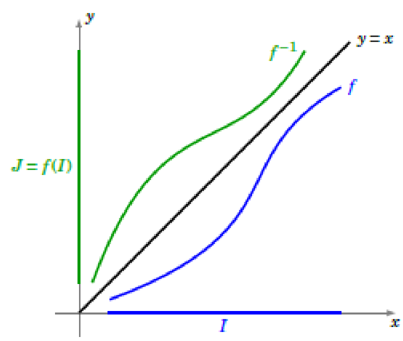
Lemme 5.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.

Preuve 5.1 *Soient $x, x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.*
par la contraposition $x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$
Si on avait $x < x'$, alors on aurait nécessairement $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$, suivant que f est strictement croissante, ou strictement décroissante.

Voici un théorème très utilisé dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

Théorème 5.1 (Théorème de la bijection) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors*

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*
2. *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*
3. *les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$.*



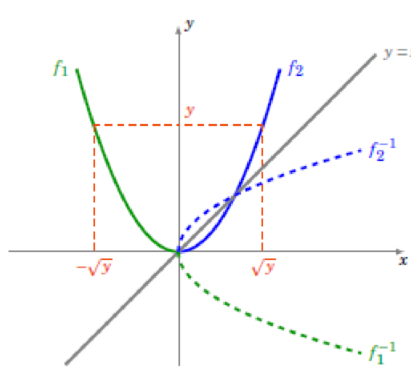
Exemple 5.1

$$f_1 : \begin{cases}]-\infty,0] \longrightarrow [0,+\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{cases} \qquad et \qquad f_2 : \begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

On remarque que $f(]-\infty,0]) = f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$. *D'après le théorème précédent, les fonctions* f_1 *et* f_2 *sont des bijections. Déterminons leurs fonctions réciproques*
$f_1^{-1} : [0,+\infty[\to]-\infty,0]$ *et* $f_2^{-1} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$. *Soient deux réels* x *et* y *tels que* $y \geq 0$. *Alors*

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad ou \quad x = -\sqrt{y}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire y *admet (au plus) deux antécédents, l'un dans* $[0,+\infty[$ *et l'autre dans* $]-\infty,0]$. *Et donc* $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ *et* $f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. *On vérifie bien que chacune des deux fonctions* f_1 *et* f_2 *a le même sens de variation que sa réciproque.*



6 Dérivée

6.1 Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 6.1 *f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0.*
La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Remarque 6.1 *Autre écriture de la dérivée.*

- *f est dérivable en x_0 si et seulement si $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie.*

Définition 6.2 *f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.*
La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f, elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple 6.1 *La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.

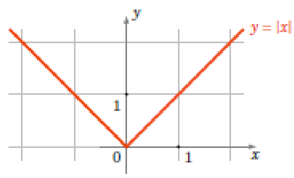
Définition 6.3

- *f est dérivable à droite en x_0, si $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$*
- *f est dérivable à gauche en x_0, si $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$*
- *f est dérivable en $x_0 \iff f$ est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$*

Proposition 6.1 *Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Remarque 6.2 *La réciproque est fausse : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en* 0 *mais n'est pas dérivable en* 0.



En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ *en* $x_0 = 0$ *vérifie :*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}.$$

Il y a bien une limite à droite ($f'_d(0) = +1$*), une limite à gauche (*$f'_g(0) = -1$*) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en* 0*. Ainsi* f *n'est pas dérivable en* $x = 0$.
Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.

Proposition 6.2 *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables sur* I*. Alors pour tout* $x \in I$

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où* λ *est un réel fixé*
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ *(si* $f(x) \neq 0$*)*
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *(si* $g(x) \neq 0$*)*

Remarque 6.3 *Il est plus facile de mémoriser les égalités de fonctions :*

$$\boxed{(f + g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (f \times g)' = f'g + fg'}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

Preuve 6.1 *Prouvons par exemple* $(f \times g)' = f'g + fg'$.
Fixons $x_0 \in I$. *Nous allons réécrire le taux d'accroissement de* $f(x) \times g(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \\ &\xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).\end{aligned}$$

6.2 Dérivée de fonctions usuelles

u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

Fonction	**Dérivée**
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	**Dérivée**
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

6.3 Composition

Proposition 6.3 *Si* f *est dérivable en* x_0 *et* g *est dérivable en* $f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* x_0 *de dérivée :*

$$\boxed{\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)}$$

Preuve 6.2

$$\begin{aligned}\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow[x \to x_0]{} g'\big(f(x_0)\big) \times f'(x_0).\end{aligned}$$

Exemple 6.2 *Calculons la dérivée de* $\ln(1+x^2)$. *Nous avons* $g(x) = \ln(x)$ *avec* $g'(x) = \frac{1}{x}$ *; et* $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$. *Alors la dérivée de* $\ln(1+x^2) = g \circ f(x)$ *est*

$$\Big(g \circ f\Big)'(x) = g'\Big(f(x)\Big) \cdot f'(x) = g'\Big(1 + x^2\Big) \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

6.4 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.
Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f.
Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \Big(f^{(n)}\Big)'$$

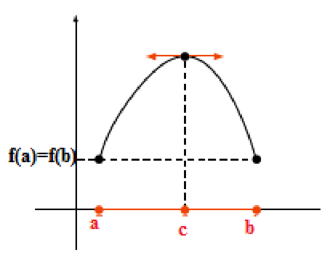
Si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.
Si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I on dite que f est classe $C^n(I, \mathbb{R})$.

6.5 Théorème de Rolle

Théorème 6.1 (Théorème de Rolle) *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que*

- f *est continue sur* $[a, b]$,
- f *est dérivable sur* $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.



il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

6.6 Théorème des accroissements finis

Théorème 6.2 (Théorème des accroissements finis) *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ *tel que*

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)}$$

Preuve 6.3 *Posons* $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *et* $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x - a)$.
Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b - a) = f(a)$.
Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ *tel que* $g'(c) = 0$.
Or $g'(x) = f'(x) - \ell$. *Ce qui donne* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

6.7 Fonction croissante et dérivée

Corollaire 6.1 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$.

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est croissante ;*
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est décroissante ;*
3. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est constante ;*
4. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ *est strictement croissante ;*
5. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ *est strictement décroissante.*

Remarque 6.4 *La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse.*
Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ *est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en* 0.

Corollaire 6.2 (Règle de l'Hospital) *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables et soit* $x_0 \in I$.
On suppose que

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,(*ou* ∞)

$$\boxed{\textit{Si} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \textit{alors} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.}$$

Exemple 6.3 *Calculer la limite en 1 de* $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. *On vérifie que :*

- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 3.$$

Donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 3.$$