CHAPITRE I

Oscillations libres non amorties : Système à un degré de liberté

I.1 Généralités sur les vibrations

I.1.1 Mouvement périodique :

Définition : C'est un mouvement qui se répète à intervalles de temps réguliers, cet intervalle est appelé période (**T**) qui s'exprime en seconde (s).
Pour les mouvements rapides, on utilise la fréquence : $\boldsymbol{f}$ exprimée en Hertz (HZ)

I.1.2 Mouvement vibratoire :

Définition : Un mouvement vibratoire est un mouvement périodique se produisant de part est d'autre d'une position d'équilibre. On peut aussi définir un mouvement vibratoire par sa fréquence $\boldsymbol{f}$. La fréquence indique le nombre d'oscillations complètes (dans le sens aller retour) se produisant par seconde.
On peut établir la relation entre la fréquence et la période :

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{f} \quad et \quad f = \frac{1}{T}}$$

La période T des oscillations est le temps mis par le système pour revenir à une position identique quelque soit le choix de cette position. C'est aussi, le temps mis pour faire une oscillation complète ou un « aller-retour ».
Mathématiquement, le mouvement périodique de période *T* est défini par:

$$\boldsymbol{A\ tout\ instant\ t, \qquad x(t+T) = x(t)}$$

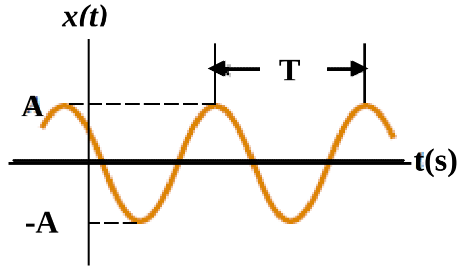
I.1.3 Mouvement vibratoire libre

Définition : les vibrations libres sont les vibrations qui résultent lorsqu'on écarte un système de sa position d'équilibre ou on lui donne une vitesse initiale, puis on le laisse vibrer librement.
Exemples : Une masse accrochée à un ressort - un pendule simple - le balancier d'une horloge - la rotation d'un moteur tournant à vitesse constante….. etc.

I.1.4 Mouvement vibratoire sinusoïdal

Définition : un mouvement vibratoire est sinusoïdal, si un point vibrant possède une élongation du type **:**

$$\boldsymbol{y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$$



- La grandeur $y(t)$ est appelée l'élongation (ou la position) à l'instant *t*, l'élongation maximale ou l'amplitude du mouvement, elle varie entre –*A* et +*A*.
- La quantité $\boldsymbol{\omega}$ est la pulsation du mouvement et exprimée en $(^{rad}/_{s})$.
- La quantité $(\boldsymbol{\omega t + \varphi})$ est la phase instantanée, exprimée en (radian, sans dimension),
- l'angle φ est la phase initiale, correspond à la phase à l'instant $t = 0$.

I.2 Vibration harmonique

Définition : On appelle vibration harmonique tout système dont le paramètre $x(t)$ qui la caractérise est une fonction sinusoïdale du temps : $\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$

- La fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π. Si T est la période temporelle du mouvement, on aura donc :

$$[\omega(t+T)+\varphi]-[\omega t+\varphi]=2\pi \implies \boldsymbol{\omega T=2\pi}$$

On en déduit l'expression de T en fonction de la pulsation : $\boldsymbol{T=\frac{2\pi}{\omega}}$

- La fréquence *f*, nombre d'oscillations par seconde correspond à l'inverse de la période *T* : ***f* = 1/*T***.

Il existe d'autres expressions équivalentes pour la fonction $x(t)$. En effet, la fonction sinus est équivalente à la fonction cosinus décalée de π/2. On peut donc écrire :

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=A\sin(\omega t+\acute{\varphi})$$

Donc :

Les grandeurs caractéristiques d'une vibration harmonique sont :

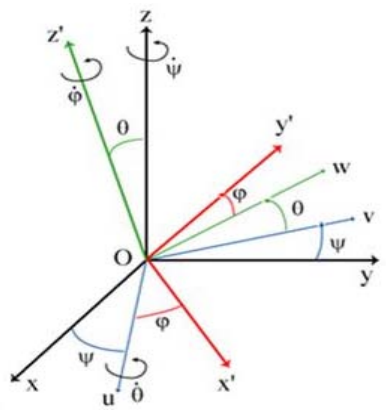
- L'amplitude A,
- La période T, $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$; ω: $pulsation$, f: $fréquence$.
- La phase φ.

I.2.1 Coordonnées généralisées d'un système physique

Définition : Les coordonnées Généralisées sont l'ensemble de variables réelles **indépendantes** ou **liées** permettant de décrire et configurer tous les éléments du système à tout instant t.

Par exemples :

- un point matériel libre dans l'espace peut être déterminé par 3 coordonnées généralisées (x, y, z);
- un corps solide peut être déterminé par 6 coord. génér. :
  - 03 coordonnées relatives au centre de gravité;
  - 03 coordonnées liées aux angles d'Euler (φ,ψ,θ).
- Les coordonnées généralisées d'un système de P points matériels et Q corps solides sont défini par : $N=3P+6Q$



On note :

Les coordonnées généralisées : $q_1(t), q_2(t), \dots \dots \dots . q_N(t)$.

Les vitesses généralisées : $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots \dots \dots . \dot{q}_N(t)$.

I.2.2 Degré de liberté

Définition : Le degré de liberté est le nombre de coordonnées généralisées indépendantes, nécessaires pour configurer tous les éléments du système à tout instant : $d\ =\ N$

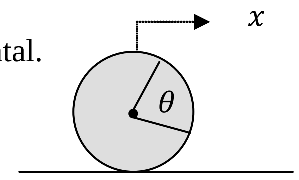
Où, le nombre de coordonnées généralisées liées, pour configurer tous les éléments du système à tout instant moins (-) le nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles : $d\ =\ N-r$

$\boldsymbol{d}$: Degré de liberté ;

$\boldsymbol{N}$ **:** Nombre de coordonnées généralisées

$\boldsymbol{r}$ **:** Nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles.

Exemples :

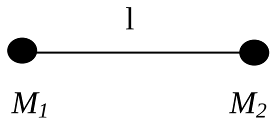


- Un disque de masse m et de rayon r, roule sans glisser sur un plan horizontal.

Ici on a deux coordonnées généralisées x et θ donc $\boldsymbol{N=2}$.
x et θ sont liées avec une relation: $x=r\theta$ donc : $\boldsymbol{r=1}$.
Le nombre de degrés de liberté $\boldsymbol{d=N-r=1}$.

- Un système mécanique constitué de 02 points matériels M_1 et M_2 reliés d'une tige de longueur l.

$$\left.\begin{array}{l} M_1(x_1, y_1, z_1) : 3 \\ M_2(x_2, y_2, z_2) : 3 \end{array}\right\} \Rightarrow N = 6$$



L'équation de liaison : $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = c^{te}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{r = 1} \ \Rightarrow \boldsymbol{d = 5}$$

I.3 Equation différentielle du mouvement

Dans ce cours, on établi l'équation différentielle en utilisant le formalisme de Lagrange. L'intégration de cette dernière permet de donner l'équation du mouvement.

I.3.1 Formalisme de Lagrange

Ce formalisme repose sur la fonction de Lagrange$(L = T - U)$. L'ensemble d'équations du mouvement s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \right\} = 0$$

- L : Fonction de Lagrange ou Lagrangien
- T : L'énergie cinétique du système;
- U : L'énergie potentielle du système ;
- q_i : est la coordonnée généralisée et $\dot{q}_i$ est la vitesse généralisée du système.

Pour un système à un degré de liberté, (N= 1 ou ddl=1) l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0$$

Remarques :

- Pour un mouvement unidimensionnel x, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0}$$

- Pour un mouvement rotationnel θ, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0}$$

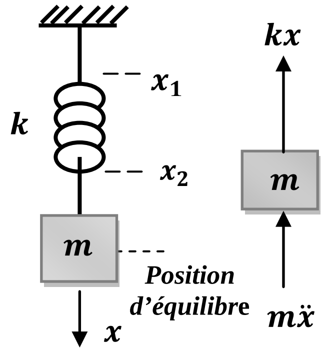
I.3.2 Exemples d'oscillateurs harmoniques

Exemple 1 : **Pendule élastique vertical**

Un pendule élastique est constitué d'une masse suspendue à un ressort de raideur k et peut donc osciller verticalement avec une élongation $x(t)$.

Le système nécessite une seule coordonnée généralisée *x(t)* qui peut décrire le mouvement de la masse m et de l'extrémité mobile du ressort.

Donc le système a un seul degré de liberté d=N=1.



- **L'énergie cinétique du système:** $\boldsymbol{T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2}$
- **L'énergie potentielle du système:** l'énergie U emmagasinée dans le ressort dépend de l'allongement des 2 extrémités du ressort. Elle s'exprime:

$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}kx^2} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{x_2 = x\,;\ \ x_1 = 0}$$

$$\left[dU = \overrightarrow{F_r}\cdot\overrightarrow{dx} = -(-kxdx) \Longrightarrow U = \int_0^x kxdx = \frac{1}{2}kx^2\right]$$

La fonction de Lagrange : $L = T - U \ \Longrightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

L'équation de Lagrange : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \end{array}\right\} \Rightarrow m\ddot{x} - (-kx) = 0$$

On divisant par m $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

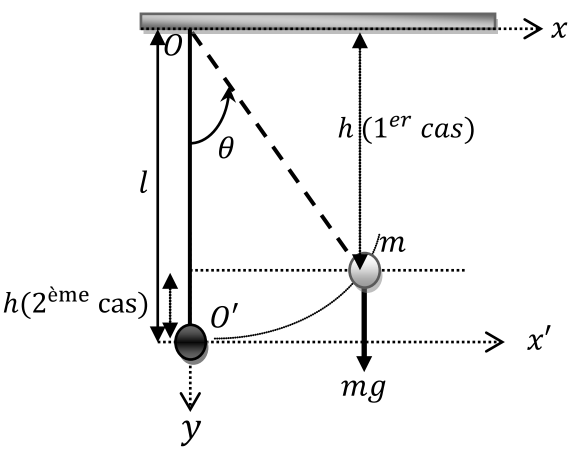
Le rapport $\frac{k}{m}$ étant positif et en posant : $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ on obtient l'équation différentielle d'une vibration harmonique de la forme : $\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0}$.

- ✓ La pulsation ω_0 ne dépend que de la masse m et de la raideur k du ressort, est appelée « **la pulsation propre** » du système.
- ✓ La masse oscille donc indéfiniment avec une période propre T_0 donnée par la relation suivante:

$$\boldsymbol{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

<u>Exemple 2</u> : Pendule pesant simple

Un pendule simple est constitué d'un solide de petite dimension de masse m suspendu à un point fixe O par un fil inextensible de longueur L. Ecarté de sa position d'équilibre, il oscille dans le champ de pesanteur terrestre g.



<u>Les coordonnées du système</u> :

$$m\begin{cases} x = l\sin\theta \Longrightarrow \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \\ y = l\cos\theta \Longrightarrow \dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

- L'énergie cinétique du système : $\boldsymbol{T = \frac{1}{2}mv_m{}^2}$

$$\Longrightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{y})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(\cos\theta^2 + \sin\theta^2)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2}$$

- L'énergie potentielle du système : $\boldsymbol{U = mgh}$ (h est la hauteur de m par rapport à un plan de référence donnée.)

NB : On a deux possibilités pour calculer la valeur du déplacement h, selon le choit de l'origine des énergies potentielles (U(0)=0), ce choit doit avoir lieu lorsque la masse est dans sa position d'équilibre θ = 0. L'énergie potentielle correspond à l'énergie potentielle de pesanteur.

1^er cas : si on choisi comme origine des énergies potentielles l'axe $(\boldsymbol{Ox})$ on a donc :
$h = -l.\cos\theta$ (Le signe moins vient du fait que la masse m est inférieur à l'axe choisi).
Dans ce cas : $\boldsymbol{U = -mgl.\cos\theta}$.
2^ème cas : si on choisit comme origine des énergies potentielles (U(0)=0) l'axe $(\boldsymbol{O'x'})$.
À l'équilibre, on aura : $h = l - l.\cos\theta$. Dans ce cas :

$$\boldsymbol{U = mgl(1-\cos\theta)}$$

Calcule du lagrangien : $\boldsymbol{L = T - U}$

1^er cas : On remplaçant T et U dans L on trouve : $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl.\cos\theta$

L'équation de Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = m.l.^2\,\ddot{\theta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ \left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right) = -m.g.l.sin\,\theta \dots\dots\dots\dots\dots\dots . (2) \\ (1)-(2): m.l.^2\,\ddot{\theta} + m.g.l.sin\,\theta = 0 \end{cases}$$

Dans le cas des faibles oscillations, les angles sont très petits on a : $\begin{cases} sin\,\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1 \end{cases}$

On aura donc $m.l.^2\,\ddot{\theta} + m.g.l.\theta = 0$, En divisant par $m.l.^2$ on trouve :

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation propre : $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{l}}}$

On trouve enfin : $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \omega_0{}^2\theta = 0}$.

2^ème cas : $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = m.l.^2\,\ddot{\theta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right) = -m.g.l.sin\,\theta \dots\dots\dots\dots\dots\dots . (2)$$

$$(1)-(2): m.l.^2\,\ddot{\theta} + m.g.l.sin\,\theta = 0$$

On aura donc $m.l.^2\,\ddot{\theta} + m.g.l.\theta = 0$, On divisant par $m.l^2$ on trouve :

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, et on retrouve bien le même résultat.

I.3.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle (EDF) du mouvement est de la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre dont la solution sous la forme complexe est de la forme : $x(t) = Ae^{\alpha t}$

La dérivée première de la fonction $x(t)$) (la vitesse) : $\dot{x}(t) = A\alpha e^{\alpha t}$.

La dérivée seconde de la fonction $x(t)$ (l'accélération) : $\ddot{x}(t) = A\alpha^2 e^{\alpha t}$

On remplace dans l'EDF : $A\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega_0{}^2 A\alpha e^{\alpha t} = 0 \Longrightarrow Ae^{\alpha t}(\alpha^2 + \omega_0{}^2) = 0$

$$\text{Or} \qquad Ae^{\alpha t} \neq 0 \Longrightarrow \alpha^2 + \omega_0{}^2 = 0 \; donc \; \alpha = \pm j\omega_0$$

Donc la solution aura la forme: $x(t) = A_1 \; e^{j\omega_0 t} + A_2 \; e^{-j\omega_0 t}$

Selon la relation d'**Euler** : $e^{\pm j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm j sin\, \omega_0 t$

$$\rightarrow x(t) = A_1 \; (\cos \omega_0 t + j sin\, \omega_0 t) + A_2 \; (\cos \omega_0 t - j sin\, \omega_0 t)$$

$$x(t) = (A_1 \; + A_2 \;) \cos \omega_0 \mathrm{t} + j(A_1 \; - A_2 \;) sin\, \omega_0 t = \mathrm{C} \cos \omega_0 \mathrm{t} + \mathrm{D} sin\, \omega_0 t$$

Tel que : C $=(A_1 \; + A_2 \;)$ et D $= j(A_1 \; - A_2 \;)$

Donc $x(t) = \mathrm{C} \cos \omega_0 \mathrm{t} + \mathrm{D} sin\, \omega_0 t$ est aussi une solution de l'équation différentielle.

Si on pose : $C = a. cos\, \theta$ et $D = \; a.\sin \theta$, on aura : $x(t) = a. cos\, \theta \cos \omega_0 \mathrm{t} + a.\sin \theta \; sin\, \omega_0 t$

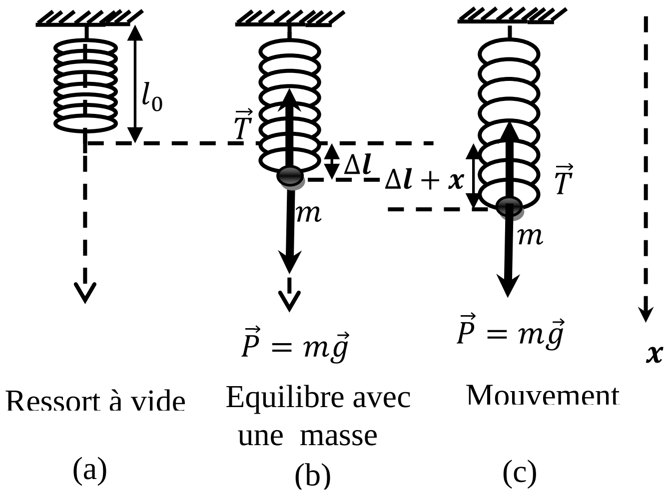
$cos(x - y) \equiv cos\, x\, cos\, y + sin\, x\, sin\, y$ donc : $x(t) = \mathrm{a} \cos(\omega_0 \mathrm{t} - \theta) = \mathrm{a} \cos(\omega_0 \mathrm{t} + \varphi)$, $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

donc : $\boldsymbol{x(t) = \mathrm{a} \cos(\omega_0 \mathrm{t} + \varphi)}$Tel que : $\boldsymbol{a = \sqrt{C^2 + D^2}}$ et $\boldsymbol{\theta = \mathrm{arc\, tang}(\frac{D}{A})}$

I.4 La force dans le mouvement harmonique

I.4.1 Exemple du pendule élastique vertical

C'est le cas d'une masse m accrochée à l'extrémité libre d'un ressort et se déplaçant sans frottement suivant une direction Ox vertical (voir figure).



A l'équilibre : il y a deux forces qui agissent sur la masse m ; son poids et la force de rappel du ressort tension due au ressort :

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Longrightarrow mg - k\Delta l = 0$$

- $\vec{P}$ *:* Poids de la masse m.
- $\vec{T}$: Force de rappel du ressort.

En mouvement : La deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique), nous permet d'écrire :

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

Pour un système à une dimension :

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$

Après projection on obtient $m\ddot{x} = mg - k(x + \Delta l)$. En utilisant la condition d'équilibre précédente on obtient :

$$m\ddot{x} = -kx \Longrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

Or : $\omega^2{}_0 = \frac{k}{m} \Longrightarrow m\ddot{x} + m\omega^2{}_0\, x = 0$

$\Longrightarrow \boldsymbol{m\ddot{x} = -kx = -m\omega^2{}_0\, x}$ **;** C'est **la force de rappel** due au ressort

avec $\boldsymbol{k = m\omega^2{}_0}$ **= cte**

Donc, la force dans les mouvements harmoniques simples est **proportionnelle et opposée** au déplacement et constitue **une force de rappel**.

I.4.2 L'étude d'une vibration harmonique en termes d'énergies

Nous voulons montrer que l'énergie totale (mécanique), E=T+U, est constante et déduire la valeur de cette constante. Pour cela prenons $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, alors :

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{k}\,x^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2{}_0\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Sachant que $(\sin^2\varphi + \cos\varphi^2 = 1)$ et en utilisant la relation : $k = m\omega^2{}_0$

alors, $\boldsymbol{E = \underbrace{\frac{1}{2}mA^2\omega^2{}_0}_{T_{max}} = \underbrace{\frac{1}{2}kA^2}_{U_{max}} = constante}$

Nous retrouvons ici le fait que l'énergie mécanique de ce système ne varie pas. L'énergie totale est constante.

On a: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2{}_0\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2{}_0[1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi)]$.

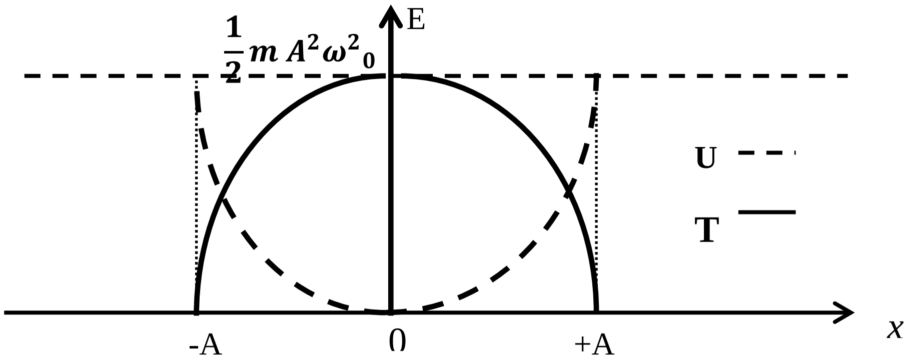
$$\Longrightarrow \mathrm{T} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2{}_0\left[1 - \frac{x^2}{A^2}\right] = \boldsymbol{\frac{1}{2}m\omega^2{}_0[A^2 - x^2]}.$$

Si $\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow T = T_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2{}_0A^2. \\ \quad x = \pm A \Longrightarrow T_{min} = 0 \end{cases}$

D'autre part : $U = \frac{1}{2}\mathrm{k}\, x^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2} m\omega^2{}_0 x^2}$

Si $\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow U = U_{min} = 0 \text{ (position d'équilibre)} \\ x = \pm A \Longrightarrow U = U_{max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2{}_0 \end{cases}$

La figure suivante montre la variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x :

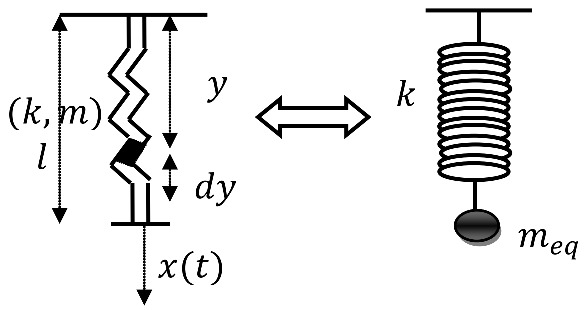


- ✓ L'énergie se transforme d'une énergie cinétique à une énergie potentielle.
- ✓ Quand l'énergie cinétique diminue l'énergie potentielle augmente et vis versa. Cette propriété de est appelée **conservation de l'énergie** totale du système.

I.5 Systèmes équivalents

Définition : C'est un système simple qu'on représente en générale par un ressort équivalent ou une masse équivalente.

__**I.5.1 Masse équivalente**__ : **Cas d'un ressort de masse non négligeable.**



m : La masse du ressort.

__**Au repos :**__

- l : La longueur du ressort.
- dm : masse élémentaire située à une distance y du point de suspension.

__**En mouvement :**__

- $x(t)$: Déplacement instantané de l'extrémité mobile du ressort.
- dy : Déplacement de la masse élémentaire = $\frac{y}{l}x(t) \Longrightarrow$ sa vitesse = $\frac{y}{l}\dot{x}(t)$

- o La masse linéique du ressort à une distance l: $\overline{\rho} = \frac{m}{l} \Longrightarrow m = \overline{\rho}\, l.$
- o La masse de l'élément dy du ressort : $m_s = \overline{\rho}\, dy = \frac{m}{l}\, dy$

$\Longrightarrow$ L'énergie cinétique = Σ toutes les énergies de ses éléments;

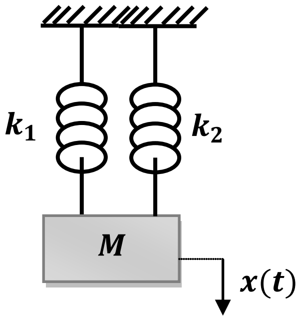
$$\Longrightarrow T = \int_{(l)} \frac{1}{2}\left(\frac{m}{l}dy\right).\left(\frac{y}{l}\dot{x}(t)^2\right)$$

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{m}{l^3}\dot{x}(t)^2 y^2 dy = \frac{1}{2}\frac{m}{l^3}\dot{x}(t)^2.\frac{y^3}{3}\Big|_0^l$$

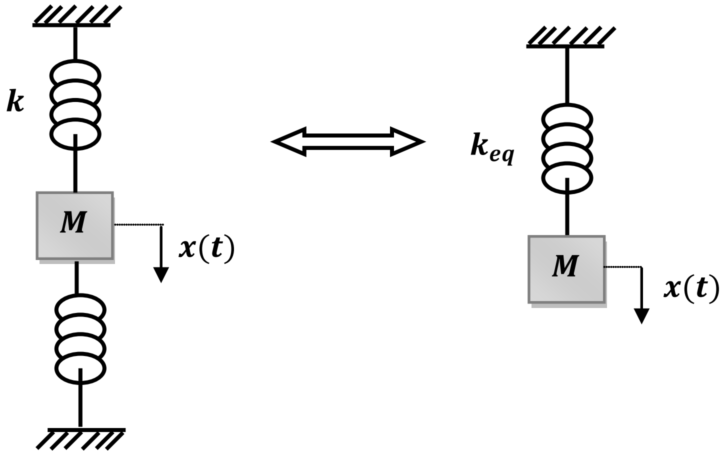
$$T = \frac{1}{2}(\frac{m}{3})\dot{x}(t)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_{eq}\,\dot{x}(t)^2 \Longrightarrow \boldsymbol{m_{eq} = \frac{m}{3}}$$

I.5.2 Ressorts équivalents : On a 3cas :

1er cas : ***Ressorts en parallèles (en oppositions)*** :



Ou



L'élongation de chaque ressort est égale à ***x(t)*** donc : $M.g = (k_1 + k_2)x = keq.x \Longrightarrow \boldsymbol{k_{eq} = k_1 + k_2}$

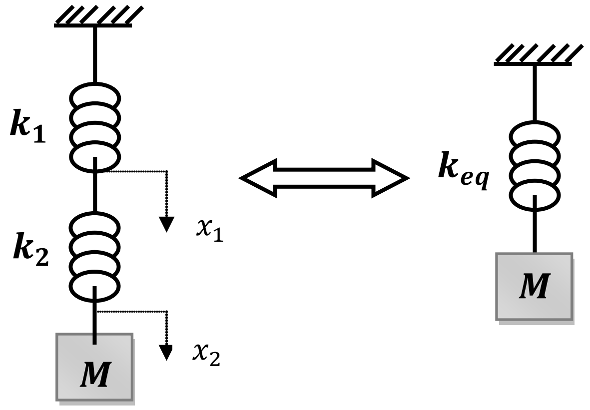
2éme cas : ***Ressorts en séries :***

Soit x_1 : l'élongation du ressort k_1 tel que : $M.g = k_1\,x_1$

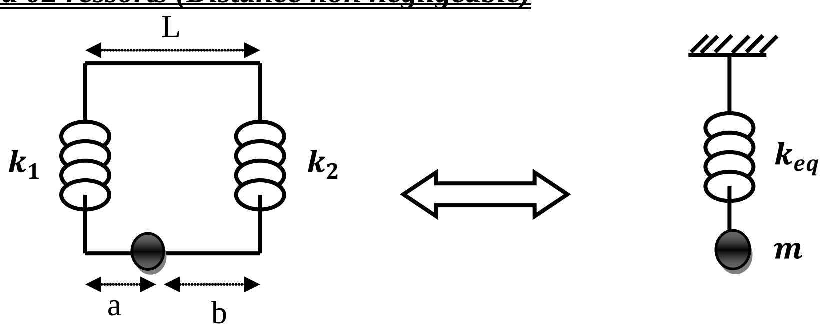
Soit x_2 : l'élongation du ressort k_2 tel que : $M.g = k_2\,x_2$

$$\Longrightarrow x = x_1 + x_2 = M.g(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{k_{eq} = \frac{k_1\,k_2}{k_1 + k_2}}$$



3éme cas : ***Barre liée à 02 ressorts (Distance non négligeable)***



$$\boldsymbol{k_{eq} = \frac{(a+b)^2}{\frac{a^2}{k_2}+\frac{b^2}{k_1}}}$$

Si **a=b,** on aura **:** $\mathbf{k_{eq}} = \boldsymbol{k_1 + k_2}$

I.6 Analogie entre le système mécanique " Masse-ressort" et le système électrique "L-C".

Système mécanique	Système électrique
Déplacement : x(t)	*Charge électrique q(t)*
Vitesse : $\dot{x}(t)$	*Courant électrique* $i = \frac{dq}{dt}$
Accélération : $\ddot{x}$	*Variation du courant :* $\ddot{q}$
Masse : m	*Inductance, bobine, self : L*
Ressort k	*Inverse de la capacité 1/C*
Force de rappel : k x	*d.d.p entre les bornes d'in condensateur :* $\frac{q}{C}$
Force d'inertie : $m\ddot{x}$	*d.d.p entre les bornes de la bobine :* $L\,\ddot{q}$
Energie potentielle : $\frac{1}{2}k\,x^2$	*Energie électrique :* $\frac{1}{2C}q^2$
Energie cinétique : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	*Energie magnétique :* $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$

Points clefs

Oscillations libres non amorties

1. Pendule élastique vertical(m, k, x):

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0 \Leftrightarrow \left\{ x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)\ \ avec \left[\begin{array}{c} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \ (pulsation\ \ propre) \\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{array}\right]\right.$$

2. Pendule pesant simple (m, l, θ) :

$$\ddot{\theta} + \omega_0{}^2 \theta = 0 \Leftrightarrow \left\{ \theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)\ \ avec \left[\begin{array}{c} \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\ \ (pulsation\ \ propre) \\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \end{array}\right]\right.$$

- L'équation de Lagrange pour un mouvement unidimensionnel x : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0$;
- L'équation de Lagrange pour un mouvement rotationnel θ : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$;
- L'énergie mécanique se conserve : $T + U = Constante$;
- Masse équivalente (Cas où la masse m du ressort n'est pas négligeable) : $m_{eq} = \frac{m}{3}$.
- Ressorts équivalents :

- $$\left\{\begin{array}{l} Ressorts\ k_1, k_2, \dots k_n\ en\ parallèles: k_{eq} = k_1 + k_2 + \cdots .. + k_n \\ Ressorts\ k_1, k_2, \dots k_n\ en\ série: \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots \dots + \frac{1}{k_n}. \\ Barre\ liée\ à\ 02\ ressorts\ (Distance\ non\ négligeable): k_{eq} = \frac{(a+b)^2}{\frac{a^2}{k_2} + \frac{b^2}{k_1}} \end{array}\right.$$

CHAPITRE II

Oscillations libres amorties : Systèmes à un degré de liberté

Introduction : Le pendule élastique comme le pendule pesant, se comporte comme un oscillateur harmonique à la condition de négliger tout frottement. Il oscille alors théoriquement sans jamais s'arrêter. En réalité, la masse se déplace dans un fluide (en général l'air) où il existe toujours des forces de frottement de type visqueux. L'oscillateur est alors amorti et fini par s'arrêter.

II.1 Oscillations libres amorties

La présence de frottements implique une dissipation d'énergie sous forme de chaleur ; on observe alors

- soit des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps,
- soit un retour à l'équilibre sans oscillation.

On parle alors d'***amortissement.*** L'expression de la force de frottement visqueux est la suivante :

$$\boldsymbol{F_q = -\alpha\dot{q}}$$

Tel que :

$\boldsymbol{\alpha}$: est le coefficient de frottement visqueux. $\boldsymbol{\alpha}$: $[N.s/m]$.
$\boldsymbol{q}$: la cordonnée généralisée du système ;
$\boldsymbol{\dot{q}}$: La vitesse généralisée du système.

Le signe moins (-) vient du fait que cette force s'oppose au mouvement en agissant dans la direction et le sens contraire à la vitesse.
Dans un mouvement unidimensionnel x la force s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{u}}$$

II.2 Equation de Lagrange dans un système amorti

En tenant compte de la force de type frottement fluide (coefficient de frottement visqueux α), l'équation de Lagrange dans ce cas devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q$$

Sous l'action des forces de frottements, le système dissipe (perde) de l'énergie mécanique sous forme de chaleur, il ya donc une relation entre la force $\boldsymbol{F_q}$ et la fonction de dissipation $\boldsymbol{D}$ d'un côté et la fonction de dissipation et le coefficient de frottement visqueux α :

$$\left[F_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \qquad et\ D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2\right]$$

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système amorti devient : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$

<u>II.2.1 Equation différentielle</u> : Système masse-ressort-amortisseur

Reprenons le cas du pendule élastique (vertical par exemple). L'étude de l'oscillateur amorti se fait de la même façon que précédemment mais en ajoutant la force de frottement visqueux.
A une dimension, l'équation de Lagrange s'écrit : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

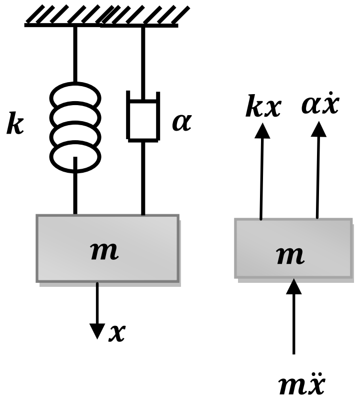
<u>L'énergie cinétique du système</u> : c'est l'énergie cinétique de la masse m : $\mathbf{T}=\frac{1}{2}\boldsymbol{m\dot{x}^2}$

<u>L'énergie potentielle du système</u> : c'est l'énergie emmagasinée dans le ressort $\mathbf{U}=\frac{1}{2}\boldsymbol{kx^2}$

La fonction de dissipation : $\boldsymbol{D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2}$

La fonction de Lagrange : $L = T - U \Longrightarrow \boldsymbol{L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}} \\ \boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial x} = -kx} \\ \boldsymbol{\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}} \end{cases}$$



En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura :

$$\boldsymbol{m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}} \Longrightarrow \boldsymbol{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

- ✓ C'est l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un système libre amorti.
- ✓ Par rapport aux oscillations libres non amorties, on reconnaît un nouveau terme ($\boldsymbol{\frac{\alpha}{m}\,\dot{x}}$) provenant de la dissipation d'énergie.
- ✓ La forme générale : $\boldsymbol{\ddot{q} + \frac{\alpha}{m}\,\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0}$
- ✓ Souvent l'équation différentielle est écrite sous une forme dite réduite : $\boldsymbol{\ddot{q} + 2\delta\,\dot{q} + \omega^2{}_0 q = 0}$

Tels que : $\begin{cases} \delta = \frac{\alpha}{2m}[1/S]: \textit{\textbf{Facteur d'amortissement}}. \\ \xi = \frac{\delta}{\omega_0} \text{ (Sans unité) : } \textit{\textbf{Rapport d'amortissement}}. \end{cases}$

À une dimension la forme réduite s'écrit : $\boldsymbol{\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega^2{}_0 x = 0}$

II.2.2 La solution de l'équation différentielle : Système masse-ressort-amortisseur

L'équation différentielle du mouvement : $\boldsymbol{\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega^2{}_0 x = 0}$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre.

La fonction $x(t) = De^{rt}$ est une solution particulière de cette équation différentielle à condition que r soit une des deux racines r_1 et r_2 de l'équation du second degré, appelée équation caractéristique.

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

La solution générale de l'équation prend la forme : $x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

Tel que: $\begin{cases} \boldsymbol{r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}} \\ \boldsymbol{r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}} \end{cases}$; On voit bien que la solution dépend des valeurs de δ et w_0.

1^er cas : $\boldsymbol{\delta < \omega_0}$ $(0 < \xi < 1)$: ***système sous- amorti*** ou ***faiblement amorti***

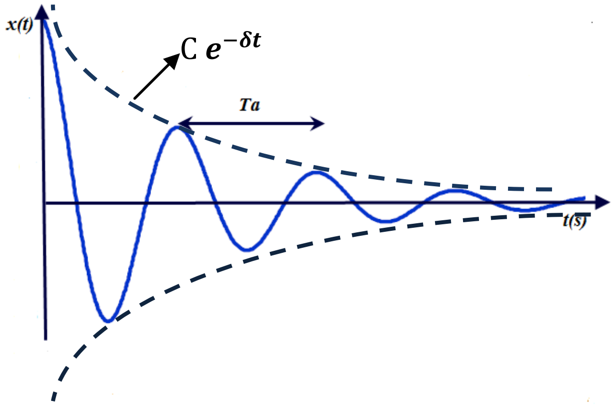
$$\Longrightarrow \delta^2 - \omega_0{}^2 < 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{j^2(\omega_0{}^2 - \delta^2)} = -\delta + j\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} = \boldsymbol{-\delta + j\omega_a} \\ r_2 = -\delta - \sqrt{j^2(\omega_0{}^2 - \delta^2)} = -\delta - j\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} = \boldsymbol{-\delta - j\omega_a} \end{cases}$$

$\omega_a = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} = w_0\sqrt{1 - \xi^2}$: **C'est la Pulsation des oscillations amorties**

$$\boldsymbol{T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0{}^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Donc **:** $\boldsymbol{T_a = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}}$; $\boldsymbol{T_a}$**: pseudo-période**



La solution : $\boldsymbol{x(t) = C\, e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)}$

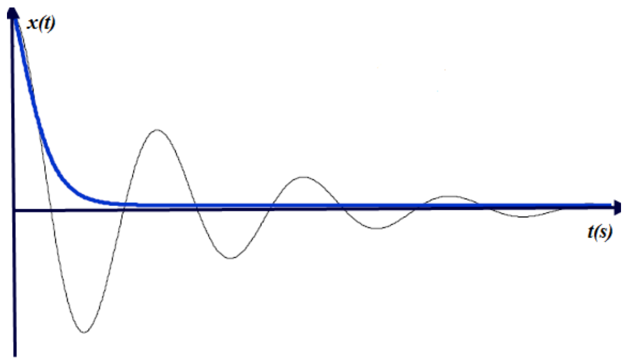
Remarques :

- $\boldsymbol{x(t)}$ représente un mouvement vibratoire.
- L'amplitude $\boldsymbol{C\, e^{-\delta t}}$ est décroissante : $\boldsymbol{x(t)}$ tend vers **0** quand **t** augmente.
- l'élongation **x(t)** va osciller en restant comprise entre – $\boldsymbol{C\, e^{-\delta t}}$et $\boldsymbol{C\, e^{-\delta t}}$.Ces deux exponentielles représentent l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur c'est-à-dire les positions extrémales prises par *x* lorsque le temps s'écoule.

2 éme cas : $\boldsymbol{\delta = \omega_0}$ $(\xi = 1)$: **Amortissement critique :** $r_1 = r_2 = -\delta$

La solution : $\boldsymbol{x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\delta t}}$

Si $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = \alpha_c = 2\sqrt{km}}$: Valeur critique du coefficient de frottement.

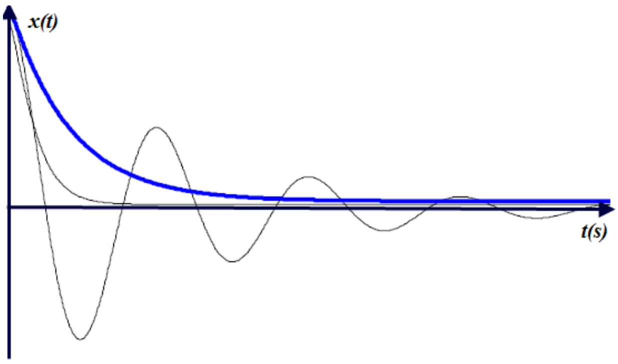


Remarques :

- $\boldsymbol{x(t)}$ n'est pas oscillatoire car il ne contient pas un terme sinusoidal.
- $\boldsymbol{x(t)}$ tend vers **0** sans oscillation quand le temps augmente.
- Le système revient à sa position d'équilibre le plus rapidement possible.

3 éme cas : $\delta > \omega_0$ $(\xi > 1)$: système ***sur- amorti*** ou ***fortement amorti***

$$\Longrightarrow \begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2} \\ r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2} \end{cases}$$



La solution :

$$\boldsymbol{x(t) = e^{-\delta t}\left(C_1\, e^{\sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2}\, t}\right)}$$

Remarques :

- $\boldsymbol{x(t)}$ tend vers **0** sans oscillation quand le temps augmente.
- $\boldsymbol{x(t)}$ est un mouvement non sinusoïdal

II.3 L'oscillateur harmonique électrique

Nous allons voir maintenant qu'il existe un autre type d'oscillateur harmonique amorti dans un autre domaine de la physique : l'électricité.

Soit un circuit électrique, constitué des 3 éléments de base misent en série :

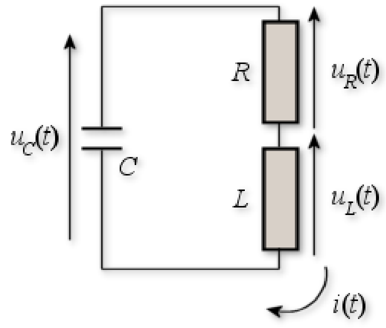
- un résistor de résistance R ;
- un condensateur de capacité C ;
- et une bobine d'inductance L.

Selon la loi de de Kirchoff :

$$u_R + u_C + u_L = 0 \Longrightarrow Ri(t) + \frac{1}{c}\,q + L\,\frac{di}{dt} = 0$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}\,q + L\,\frac{dq^2}{dt^2} = 0 \Longrightarrow \quad R\dot{q} + \frac{1}{c}\,q + L\,\ddot{q} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{Lc}\,q = 0 \Longrightarrow \ddot{q} + 2\delta\,\dot{q} + \omega^2{}_0 q = 0$$



avec $\begin{cases} \delta = \frac{R}{2L} \\ {\omega_0}^2 = \frac{1}{Lc} \end{cases}$ Donc : $\boldsymbol{\ddot{q} + 2\delta\,\dot{q} + \omega_0 q = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{R}{2L} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{Lc}} \end{cases}}$

<u>Remarque :</u>

- Pour un amortissement critique $\boldsymbol{\delta = \omega_0} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{R}{2L}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{1}{Lc}}}$ Donc : $\boldsymbol{R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$

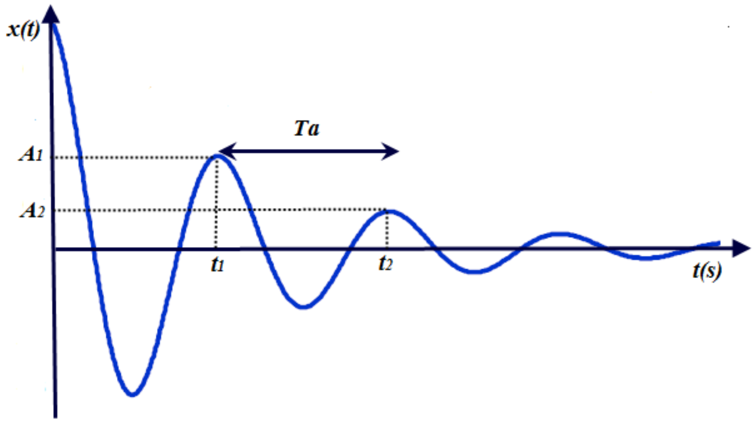
II.4 Décrément logarithmique

Définition : C'est le logarithme du rapport de 2 amplitudes successives des oscillations amorties.

$$D = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} \quad ; \quad t_2 = t_1 + T_a$$

Où $x(t_1)$ et $x(t_1 + T_a)$ représentent les amplitudes des oscillations aux instants t_1 et $(t_1 + T_a)$: généralement ces deux instants sont choisis comme correspondant à deux extrema successifs de même signe. Cette quantité mesure la décroissance des amplitudes pendant une période.

$$D = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_a)}$$



Pour un système amorti :

$$x(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)$$

$$\Longrightarrow D = \ln\frac{C\,e^{-\delta t_1}\sin(\omega_a t_1 + \varphi)}{C\,e^{-\delta(t_1+T_a)}\sin(\omega_a(t_1 + T_a) + \varphi)}$$

$$D = \ln\left(e^{\delta T_a}\right) = \delta T_a$$

$\delta T_a = \delta\frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}} = \xi\omega_0\frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$; donc :

$$\boldsymbol{D = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \delta T_a = 2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

<u>Remarques</u> :

- Pour plusieurs périodes : $T = nT_a$; $t_2 = t_1 + nT_a$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{D = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_1 + nT_a)} = n\delta T_a = 2\pi\frac{n\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- La pseudo-période et le décrément logarithmique n'ont de sens que si le régime est pseudopériodique.

II.5 Facteur de qualité (Facteur de surtension)

Pour décrire l'amortissement d'un système oscillant mécanique ou électrique on emploie le **facteur de qualité $\boldsymbol{Q}$** définit par l'expression suivante :