

Cinématique du point Matériel

point Matériel on considère que le corps matériel dont on veut décrire le mvt se réduit à un point géométrique noté M auquel est associée la masse m de ce corps (ainsi que sa charge électrique q) le seul paramètre mécanique conservé est celui de masse qui en fait m intervient pas en cinématique dans la mesure où la question des causes du mvt ne se pose pas

Référéntiel, repère d'espace, repère de temps ou horloge

le mvt a un caractère relatif avant de pouvoir le décrire il faut donc préciser par rapport à quoi on considère le déplacement du point Matériel c'est le référéntiel d'étude

* Système de référence Pour pouvoir décrire le mvt d'un mobile en générale il nous faut un repère, c'est un système de référence qui comprend un point d'origine, et un système de trois axes orthogonaux formant un trièdre direct (figure géométrique formée par trois plans).

toutes les distances sont calculées dans ce système d'axe par rapport à l'origine.

Motion du point Matériel

l'étude du mvt d'un corps solide indéformable peut être décomposée en deux parties:

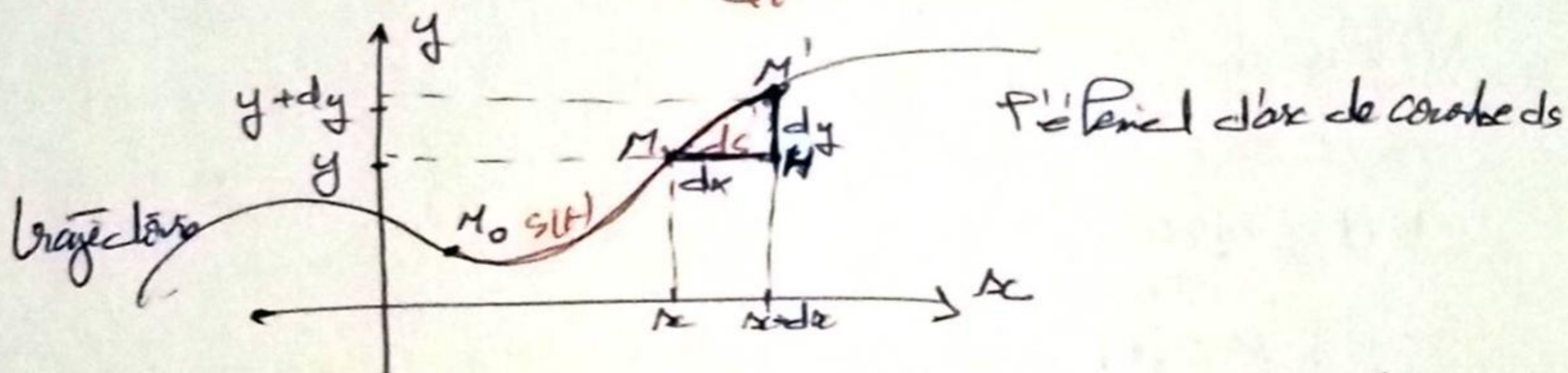
- le mvt du centre d'inertie du corps
- le mvt de rotation du corps autour de ce centre de masse

dans ce chapitre nous nous intéressons uniquement au premier problème alors nous considérons tout solide indéformable comme étant un point Matériel confondu avec le centre d'inertie du corps et ayant la même masse que ce dernier.

4) Nouveau avantage

1) élément d'arc de courbe

considérons une trajectoire spatiale $q(t)$ parcourue par un point M pendant une durée infinitésimale dt . Le point M se déplace le long d'un petit élément d'arc de courbe de longueur ds de sorte la vitesse du point M s'écrit : $V = \frac{ds}{dt}$



après le point M se déplace d'un point M' et qu'il s'agit de repérer ces coordonnées cartésiennes pendant dt le point $M(x, y)$ aura avancé qu'un point M' en $M'(x+dx, y+dy)$, de sorte que la petite distance parcourue sera : $MM' = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ cette distance parcourue pendant dt n'est rien d'autre que la distance MM'

$$\text{ou } ds = MM' = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

on va assimiler l'arc de courbe avec l'hypothèse de l'alignement MM' et en appliquant le TP le pythagore dans le triangle du point M est donc :

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

• comme montré le schéma on choisit pour passer à l'instant t_0
 le PM passe par le point M_0 comme origine, à l'instant t
 le PM est en M , alors la distance qui le sépare de M_0
 est égale à la longueur de l'arc de courbure M_0M
 s'appelle abaisse curviligne $s(t)$
 $s(t) = \overline{M_0M}$

$$s(t) = \int_{M_0}^M ds = \int_{M_0}^M v dt$$

$$\text{alors } ds(t) = v \int_{M_0}^M dt$$

Vitesse et accélération curviligne:

$$M_0M = s(t)$$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$s(t) = R \cdot \theta(t)$$

R le rayon

θ : position angulaire

$$\Rightarrow s(t) = R \theta(t)$$

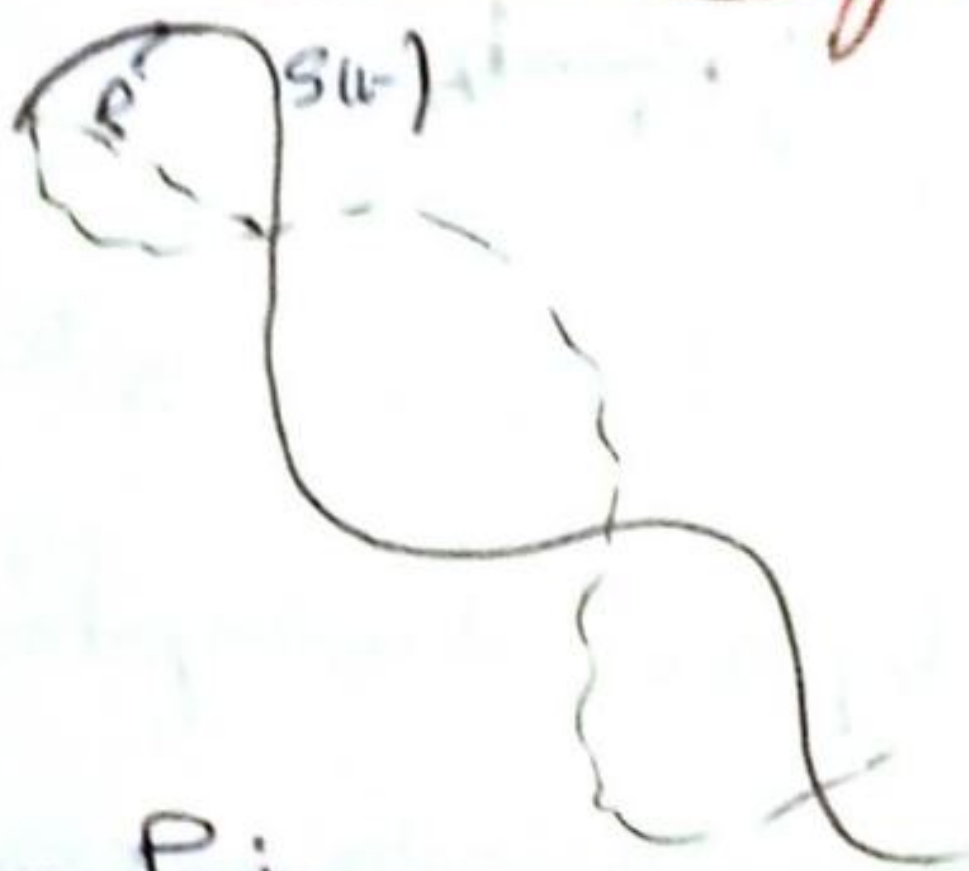
$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(R \theta(t))}{dt} = \frac{dR}{dt} \theta(t) + \frac{d\theta(t)}{dt} R$$

$$v(t) = R \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \frac{d(R \frac{d\theta(t)}{dt})}{dt} = \frac{dR}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} + R \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

$$a(t) = \frac{dR}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} + R \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

$$a(t) = R \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

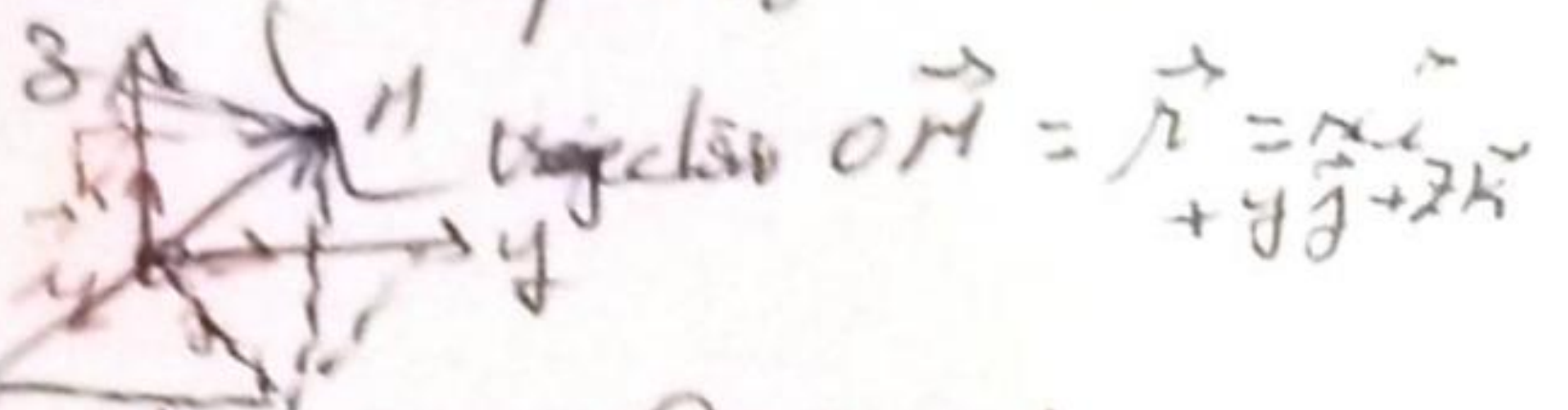


trajectoire: c'est la courbe qui décrit le point matériel lors de son mvt. Elle peut être réelle (route, chemin de fer, ...) ou fictive (orbite planétaire...)

I. Mvt rectiligne

I.1 Trajectoire

Soit un mobile que nous assimilons à un point matériel P animé d'un mvt rectiligne. Sa trajectoire est segment de droite, d'où nous n'avons besoin que d'un seul paramètre pour connaître la position c-à-d la distance par rapport à point d'origine (origine des coordonnées). Alors nous étudions le mvt mobile par rapport à ce point "O" à partir du temps $t_0 = 0$ considéré comme l'origine du temps.



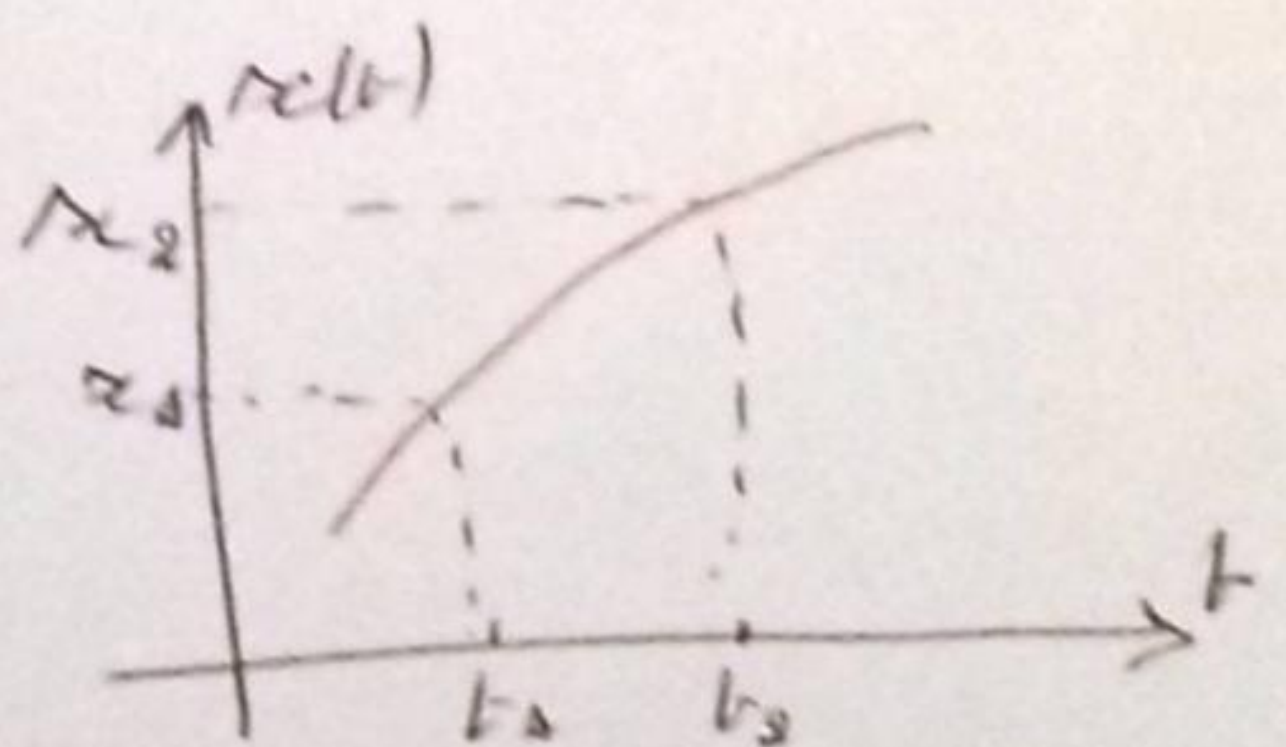
I.2 Position

La position du Mobile est définie d'abord en choisissant un sens positif du déplacement sur l'axe contenant la trajectoire, ce choix est arbitraire. Les positions en aval (après) du point d'origine sont notées positivement, les positions en amont (avant) sont notées négativement. donc nous pourrions commencer le repérage du temps la position du mobile pour différents temps t , il est représenté dans un tableau

t	t_0	t_1	t_2	...			
$x(t)$	$x(t_0)$	$x(t_1)$	$x(t_2)$	...			

a - Représentation graphique

c'est la courbe qui nous donne $x(t)$ à chaque instant t , la courbe $x(t)$ en fait de t n'est pas la trajectoire



1. point de vue analytique:

Un point matériel P est en repos dans un repère choisi par ses coordonnées x, y, z sont indépendantes du temps, et sont soit des coordonnées variables en t du temps, ces coordonnées peuvent être notées: $x(t), y(t), z(t)$, On appelle ces 3 les eqs horaires du mt on peut les exprimer sous forme:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

Exemple $x(t) = 2t$ $z(t) = -5t^2 + 4t$ les eqs du mt d'PH est donnée par:

$$x(t) = 2t$$
$$y(t) = 0$$
$$z(t) = -5t^2 + 4t$$

Remarque: toutes les unités sont dans le système international x et y, z en m et t en s.

1. Trouver l'eq cartésienne de la trajectoire, quelle est sa forme?
2. Ecrire l'expression de sa position au temps $t = 2s$.

Solution

1. on tire t de l'eq de $x(t)$ et on remplace dans $z(t)$:

$$x = 2t \Rightarrow \boxed{t = \frac{x}{2}}$$

$$\boxed{z = -1,25x^2 + 2x} \text{ c'est une eqt d'une parabole.}$$

2. Expression de sa position:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$= (2t)\vec{i} + (-5t^2 + 4t)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{OM}(2s) = 4\vec{i} - 12\vec{k}}$$

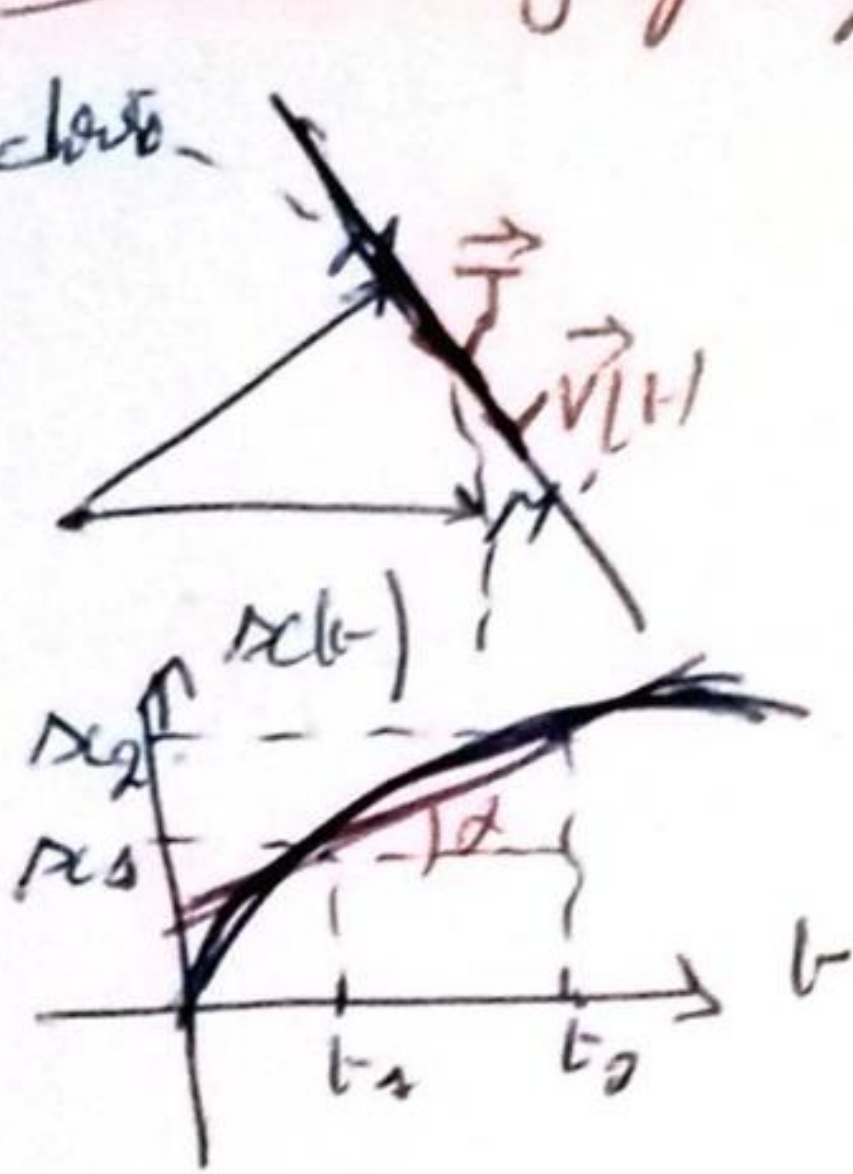
4.3 Vitesse moyenne a) Notion de vitesse moyenne:

a) est définie comme étant la valeur du déplacement entre deux instants t_1 et t_2 divisée par l'intervalle de temps

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

b. Détermination graphique (بالرسم البياني)

trajectoire



$$\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\vec{MM'}}{t' - t}; \quad v_{\text{moy}} = \frac{|\vec{MM'}|}{\Delta t}$$

$$v_{\text{moy}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Déplacement: le déplacement est défini par la variation au changement de position qui peut être relié aux temps.

- Pour un point Matériel se déplace sur l'axe (ox) est passé d'une coordonnée initiale x_i à une coordonnée finale x_f .
- S'exprime par $\Delta x = x_f - x_i$ dépendant la position du PM dans l'espace à trois dimensions c'est défini par un vecteur de position

$$\vec{r} = \vec{OM} = x_m \vec{i} + y_m \vec{j} + z_m \vec{k}$$

Pour conséquence le déplacement est défini par le changement du vecteur de position: $\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$

alors: $\Delta \vec{r} = (x_f - x_i) \vec{i} + (y_f - y_i) \vec{j} + (z_f - z_i) \vec{k}$

c. détermination analytique:

Dans l'espace à une dimension la vitesse moyenne

$\vec{V}_{\text{moy}}$ est donnée par le rapport de déplacement (Δx) par l'intervalle de temps (Δt)

$$V_{\text{moy}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

la vitesse instantanée (السرعة اللحظية)
ex: 6

Déterminer la V_{moy} du mobile dans l'ex: 6 précédent

$$x(t) = 5t^2 + 20t \quad \text{entre } t_1 = 0 \text{ s et } t_2 = 2 \text{ s}$$

$$x(t_1) = 0 \text{ m}$$

$$x(t_2) = 5(2)^2 + 20(2) = 20 \text{ m}$$

$$\text{alors } V_{\text{moy}} = \frac{20 - 0}{2 - 0} = \frac{20}{2} = 10 \Rightarrow \boxed{V_{\text{moy}} = 10 \text{ m/s}}$$

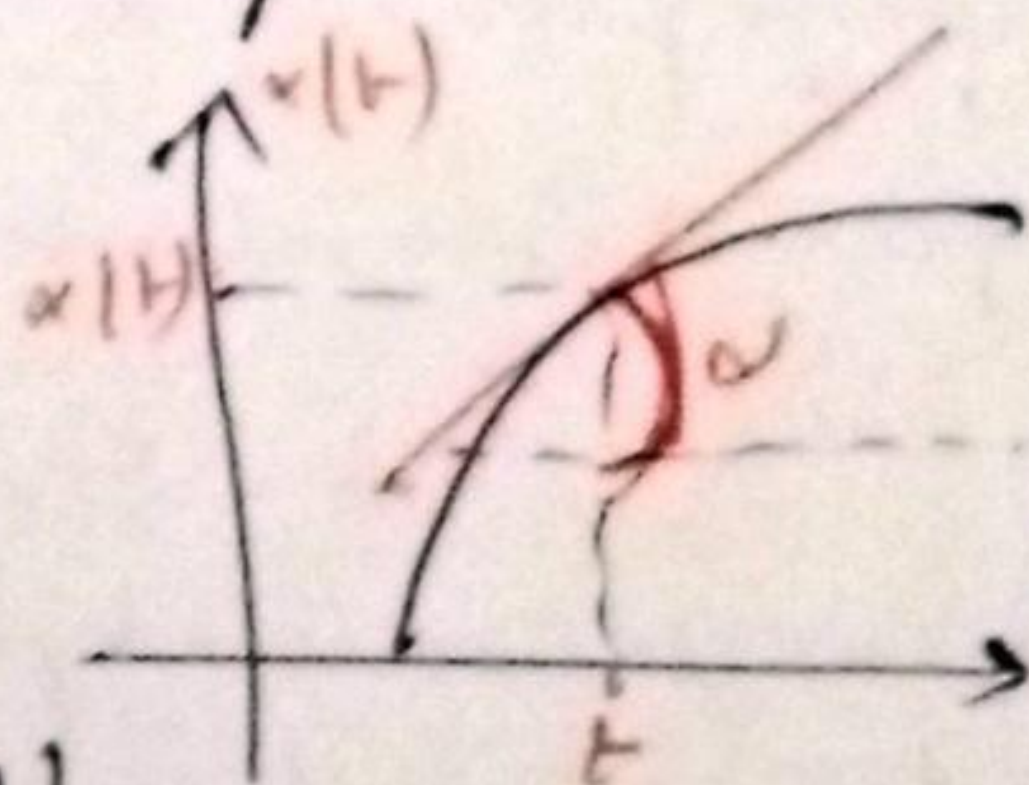
d. la vitesse instantanée (السرعة اللحظية)

Le vecteur vitesse instantanée, c'est à dire au temps t , est la dérivée du vecteur de position par rapport au temps.

a) Détermination graphique:

$$V_{\text{inst}} = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \tan \alpha$$

V_{inst} est la pente de la tangente au diagramme des espaces au point $(t, x(t))$



b) Détermination analytique:

Car $x(t)$ est une fct connue définie et continue alors

$$V_{\text{inst}} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{qui est la définition de la dérivée de } x(t)$$

1.6 l'accélération (التسارع)

l'accélération est la variation de la vitesse par unité de temps.

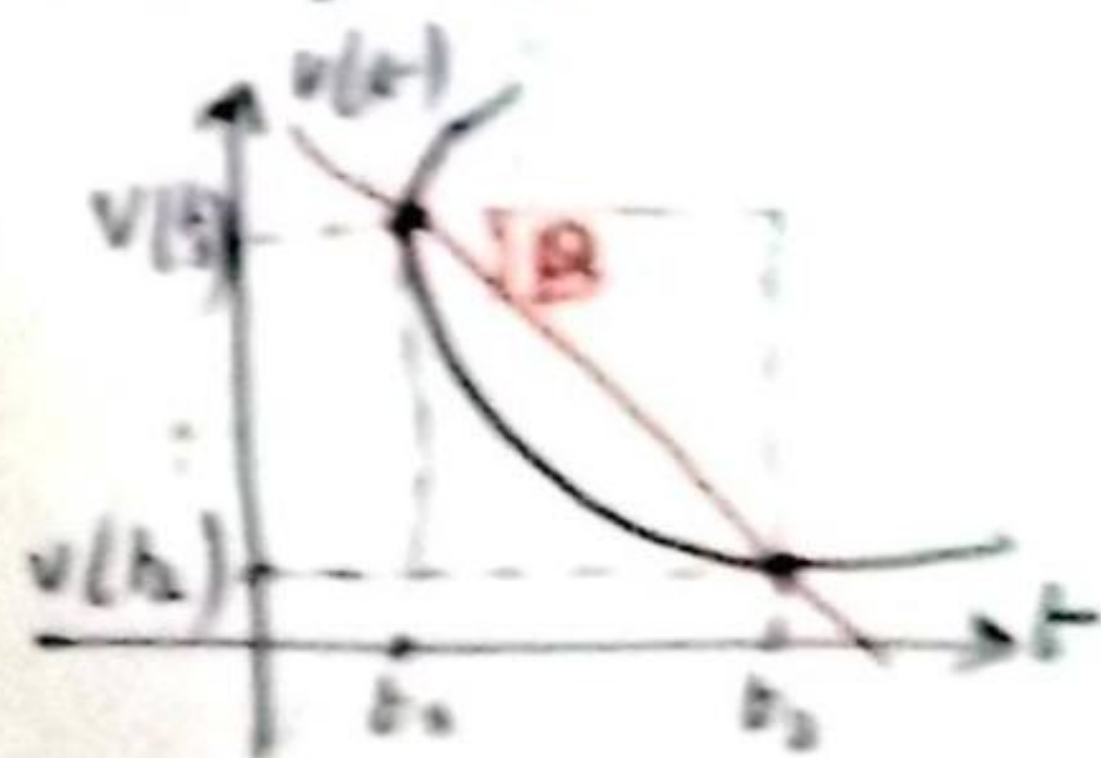
l'accélération moyenne (AM)

AM est définie comme étant la variation de la vitesse entre 2 instants t_1 et t_2 divisée par $\Delta t = t_2 - t_1$, soit mathématiquement :

a) détermination graphique :

$$a_{\text{moy}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \tan \beta$$

c'est la pente de la droite qui coupe la courbe $v(t)$ entre t_1 et t_2



b) détermination analytique :

$$a_{\text{moy}} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} ; \quad \vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\vec{v}_2(t_2) - \vec{v}_1(t_1)}{\Delta t} \Rightarrow a_{\text{moy}} = \frac{|\Delta v|}{\Delta t}$$

exemple : $v(t) = -10t + 20$

calculer l'accélération moyenne entre $t_1 = 0\text{s}$ et $t_2 = 2\text{s}$

$$a_{\text{moy}} = ? \quad v(t_1) = 20 \text{ m/s}$$

$$v(t_2) = 0 \text{ m/s}$$

$$a_{\text{moy}} = \frac{0 - 20}{2 - 0} = \frac{-20}{2} = -10 \Rightarrow \boxed{a_{\text{moy}} = -10 \text{ m/s}^2}$$

accélération instantanée est définie comme étant la dérivée de la vitesse instantanée par rapport au temps.

$$a_{\text{inst}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ m/s}^2$$

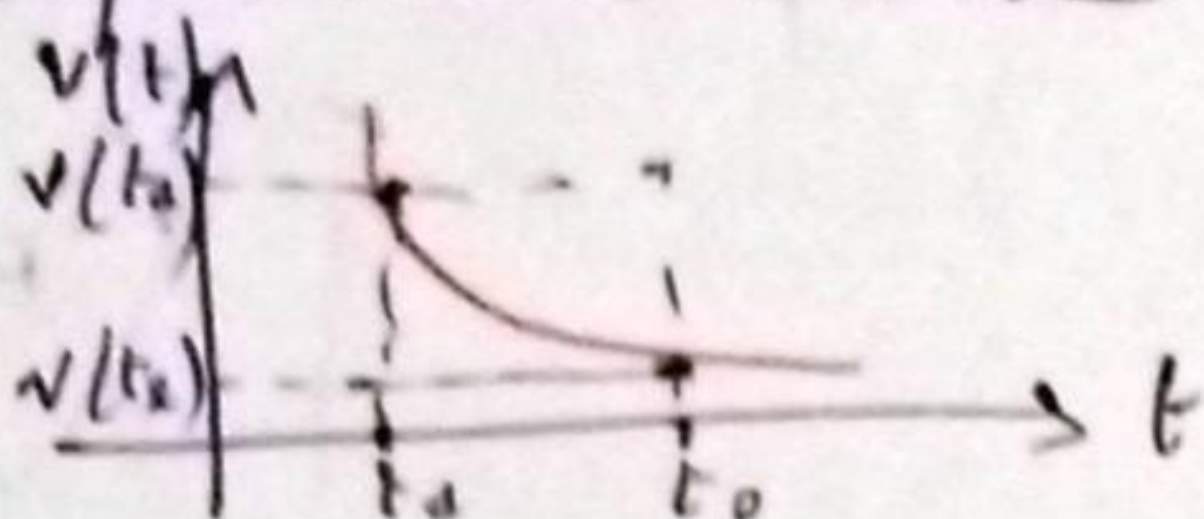
$$V_{\text{mod}}(t) = v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{v(t) = \dot{x}(t)}$$

ex: $x(t) = -5t^2 + 20t$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -10t + 20$$

C diagramme des vitesses:

on peut calculer $v(t)$ à chaque instant t
donc on peut tracer la courbe $v(t)$ en fonction de t .



2.5 vecteur de vitesse (dans un système de coordonnées)

Soit la trajectoire du Mobile M est définie par les coordonnées de position en fonction du temps (vecteur de position)

$$\vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{array} \right.$$

le vecteur de vitesse est défini par les coordonnées du vecteur dérivé de $\vec{OM}$

$$\vec{V}_m = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t) \end{cases}$$

$$\vec{V}_m = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Module du vecteur vitesse:

$$V_m = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

après les composantes des vecteurs:

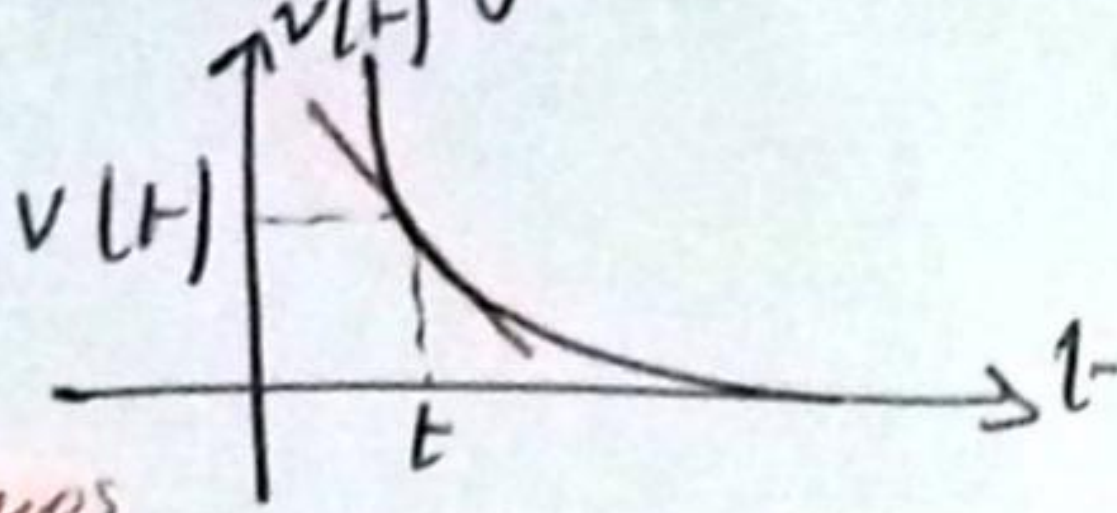
$$\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} \begin{pmatrix} V_x = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \\ V_y = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \\ V_z = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

En Coordonnées cartésiennes

a) détermination graphique

ainsi est la pente de la tangente à la courbe des vitesses au point t



b) Détermination analytique

$$a_{\text{inst}} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}}$$

Le vecteur d'accélération dans un système de coordonnées

$$\vec{v}(t) \begin{cases} x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{cases} x'' = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \\ y'' = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t) \\ z'' = \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}}$$

Module du vecteur d'accélération

$$\boxed{|\vec{a}| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}$$

$$\vec{OM} = \vec{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = a_x \\ \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} = a_y \\ \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} = a_z \end{pmatrix}$$

Exemple Soit $\vec{OM}$ vecteur de position

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} x = 2t^2 \\ y = 4t - 5 \\ z = t^3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} 4t \\ 4 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = 4t \vec{i} + 4 \vec{j} + 3t^2 \vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6t \end{pmatrix}$$

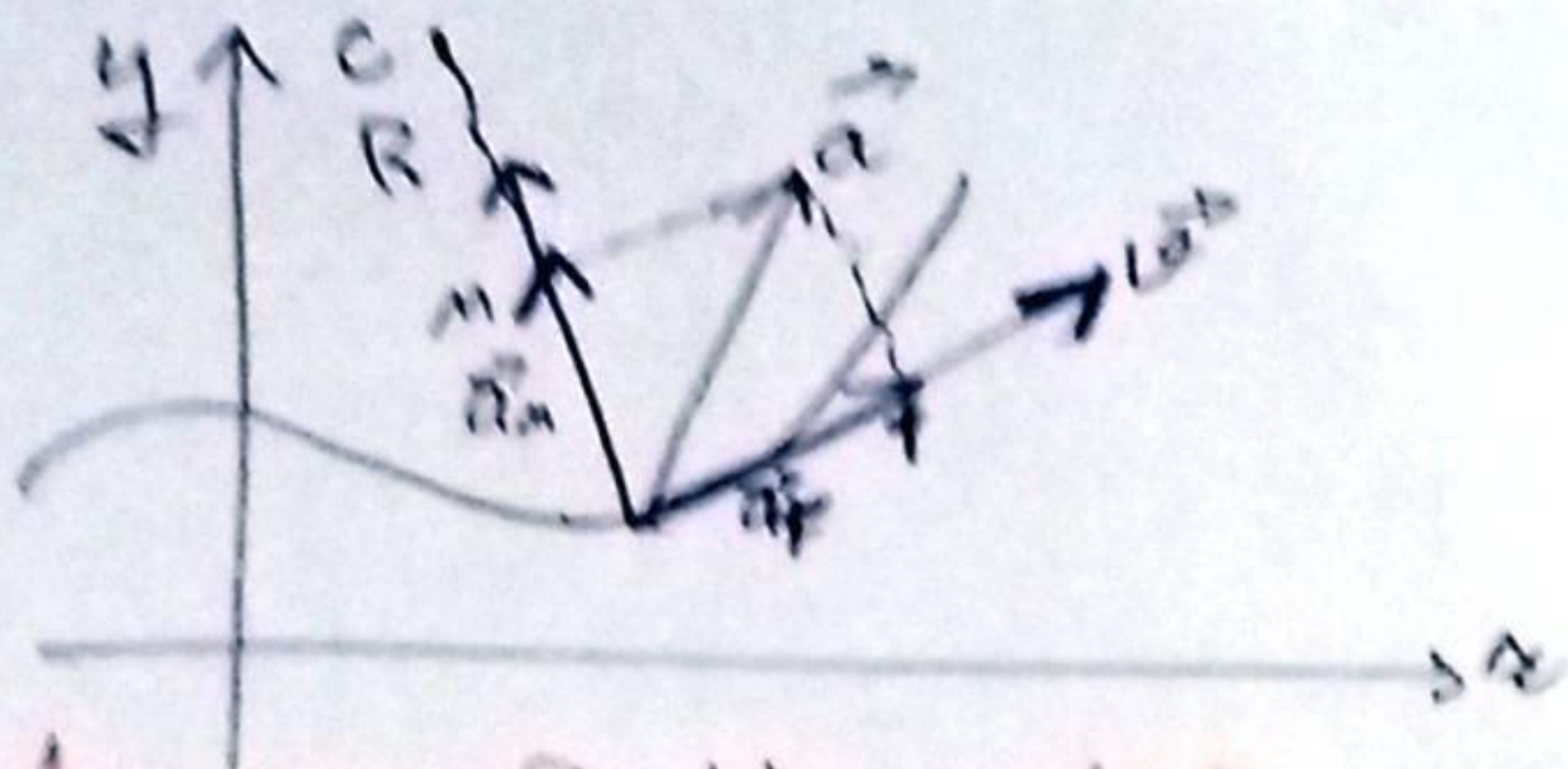
$$\vec{a} = 4 \vec{i} + 6t \vec{k}$$

$$v = \sqrt{(4t)^2 + (4)^2 + (3t^2)^2}$$

$$v = \sqrt{16t^2 + 16 + 9t^4}$$

$$a = \sqrt{(4)^2 + (6t)^2}$$

$$a = \sqrt{16 + 36t^2}$$



Accélération normale et tangentielle

La composante normale de l'accélération (composante selon n)

$a_n = \frac{v^2}{R}$ signifie que la direction de la vitesse change au cours du temps

La composante tangentielle de l'accélération :

a_t signifie que cette composante ne modifie pas la direction de la trajectoire. Le mt du sillon et l'accélération tangentielle est donc constante.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{v}_T + \frac{v^2}{R} \vec{v}_N \quad \text{ou} \quad \vec{a} = a_t \vec{v}_T$$

Remarque :

$$a_n = \frac{v^2}{R} > 0 \quad (R > 0 \text{ et } v > 0)$$

$$a_t = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \quad (\text{M. uniforme})$$

$$a_n = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{R} = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = 0 \text{ pas de mt} \\ R \rightarrow \infty \text{ trajectoire rectiligne} \end{array} \right\}$$

Exercice :

Le vecteur position

$$\vec{r}_n = (\cos\theta \vec{e}_1) + r \sin\theta \vec{e}_2$$

$$\vec{r}_0 = -r \sin\theta \vec{e}_1 + (\cos\theta \vec{e}_2)$$

$$\frac{d\vec{r}_n}{d\theta} = -\sin\theta \vec{e}_1 + \cos\theta \vec{e}_2$$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}_n}{d\theta} = \vec{r}_0}$$

$$\frac{d\vec{r}_0}{d\theta} = \frac{d[-r \sin\theta \vec{e}_1 + (\cos\theta \vec{e}_2)]}{d\theta}$$

$$= -\frac{d(r \sin\theta)}{d\theta} \vec{e}_1 - r \sin\theta \frac{d\vec{e}_1}{d\theta} + \frac{d(\cos\theta)}{d\theta} \vec{e}_2 + \cos\theta \frac{d\vec{e}_2}{d\theta}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}_0}{d\theta} = -(\cos\theta \vec{e}_1 - r \sin\theta \vec{e}_2)}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}_0}{d\theta} = -\vec{r}_n}$$

$$\frac{d\vec{r}_n}{dt} = \frac{d\vec{r}_n}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{r}_0$$

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{r}_n$$

Le vecteur

$\vec{OM}$ est le vecteur de position, en coordonnées polaires

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r \vec{u}_r + 0 \vec{u}_\theta \quad \left. \begin{array}{l} r = \text{composante radiale} \\ 0 = \text{orthogonale} \end{array} \right\}$$

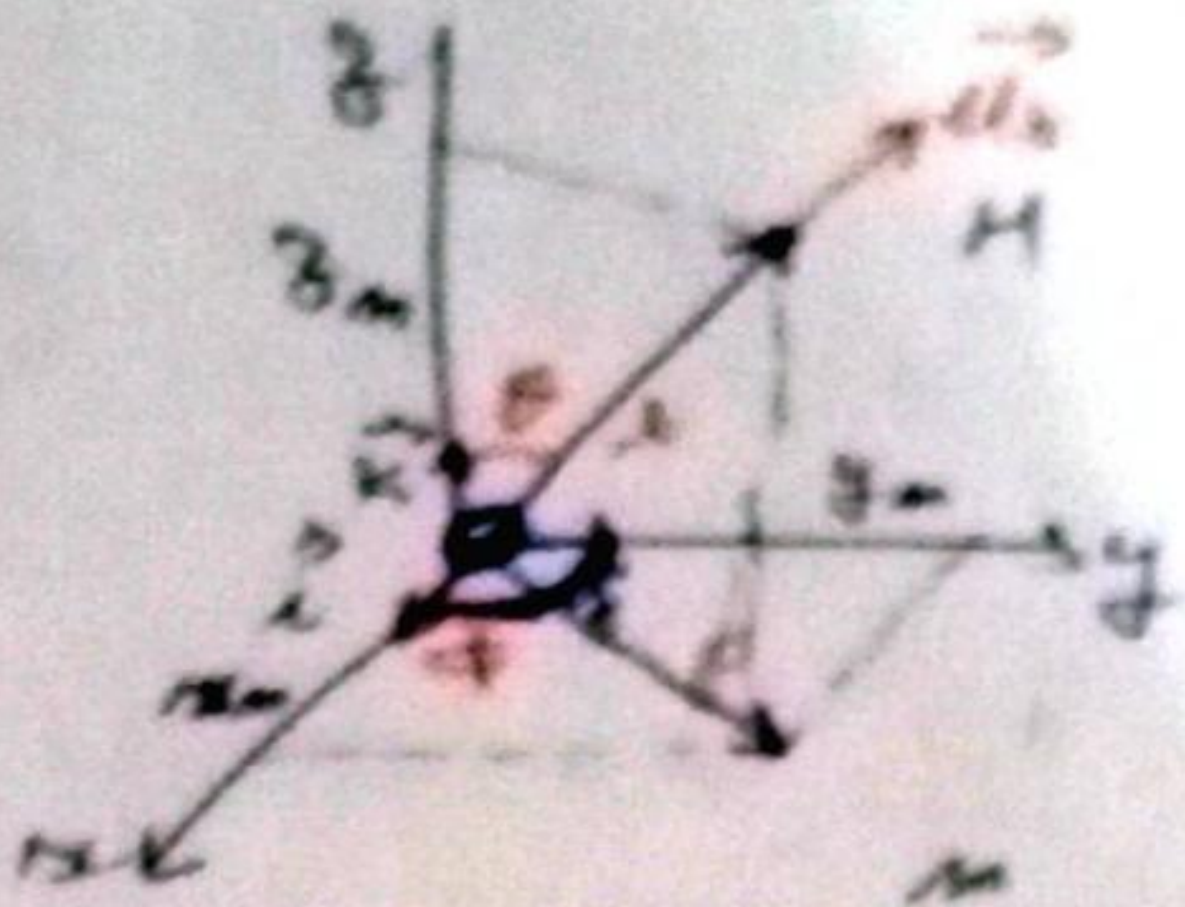
Les coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont définies par rapport au système
coordonnées cartésiennes par:

$$\vec{OH} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} \sin\phi = \frac{z}{OM} \\ \cos\phi = \frac{r}{OM} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = OM \sin\phi \\ x = OM \cos\phi \end{cases}$$



↪

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{OM}{r} \\ \cos\theta = \frac{z}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OM = r \sin\theta \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$\text{alors } \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{OH} = r \sin\theta \cos\phi \vec{i} + r \sin\theta \sin\phi \vec{j} + r \cos\theta \vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{OH} = r \vec{u}_H}$$

Les vecteurs unitaires

$$\vec{OH} = r \left[\sin\theta \cos\phi \vec{i} + \sin\theta \sin\phi \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \right]$$

$$\vec{u}_H = \sin\theta \cos\phi \vec{i} + \sin\theta \sin\phi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$

l'accélération

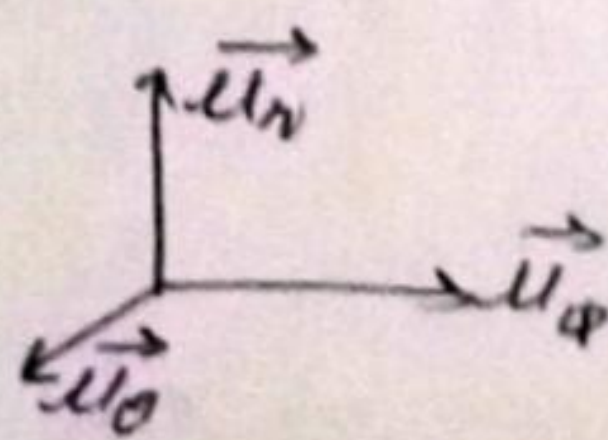
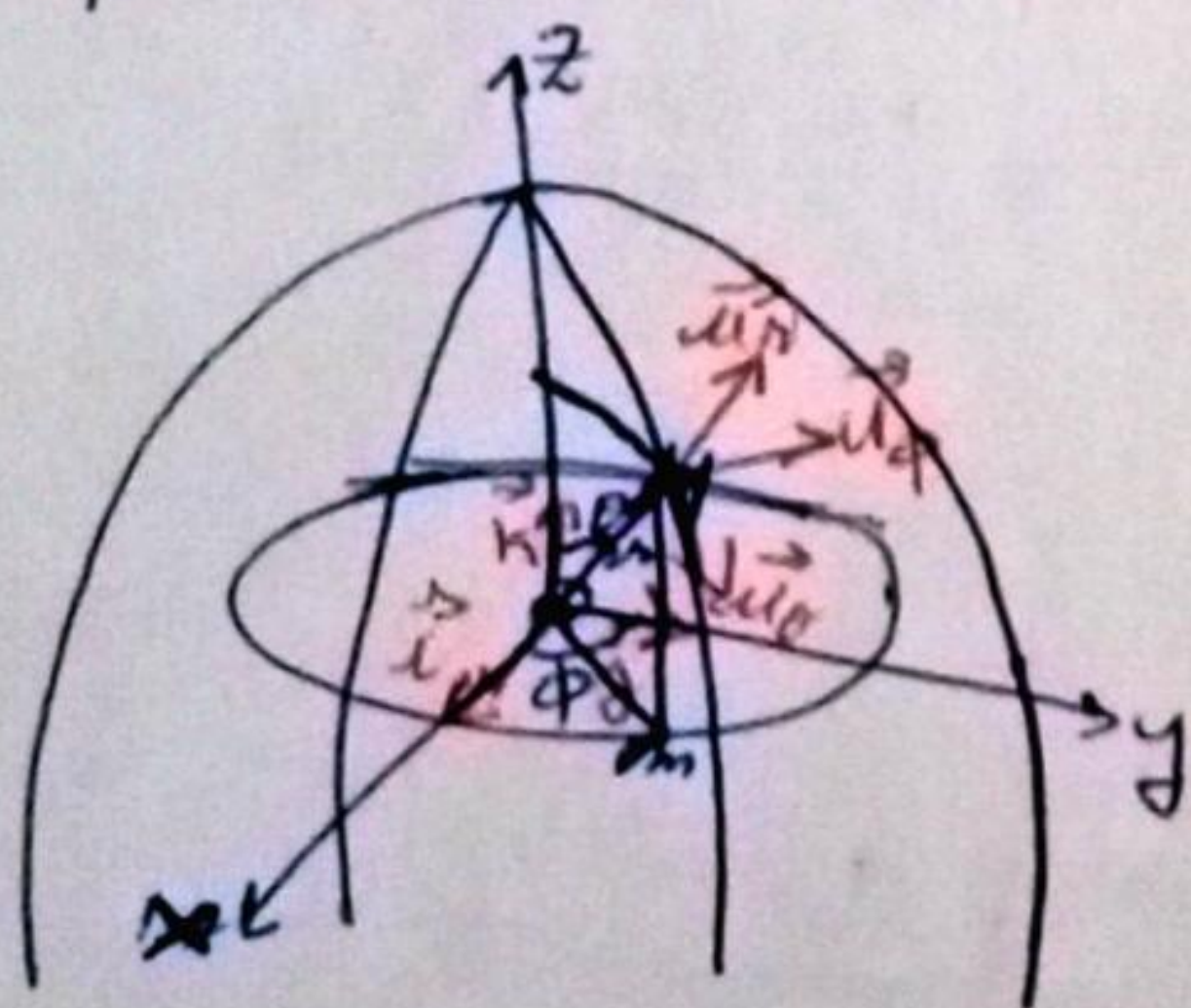
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right)$$

$$= \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{d\vec{u}_r}{dt} \frac{dr}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{u}_\theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{u}_\theta + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} + \frac{d\vec{k}}{dt} \frac{dz}{dt}$$

$$= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{k}}$$

Les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)
est définie dans l'espace à trois dimensions



$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\phi \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$\boxed{\vec{v} = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta}$$

$$V_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}$$

Acceleration

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d(\dot{r})}{dt}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \\ &+ r\frac{d(d\theta)}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\end{aligned}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta$$

$$+ r\frac{d\theta}{dt}\left(-\frac{dr}{dt}\right)\vec{u}_r$$

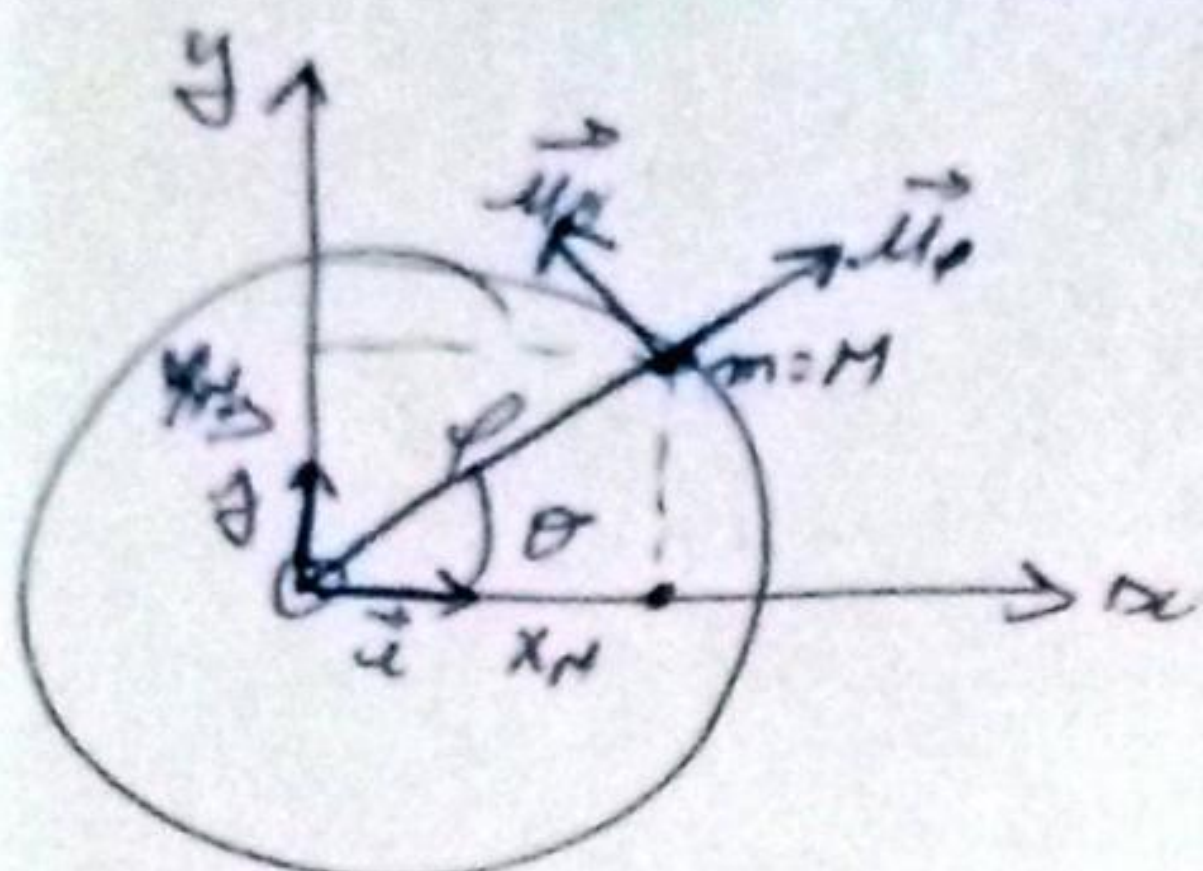
$$= \ddot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta}$$

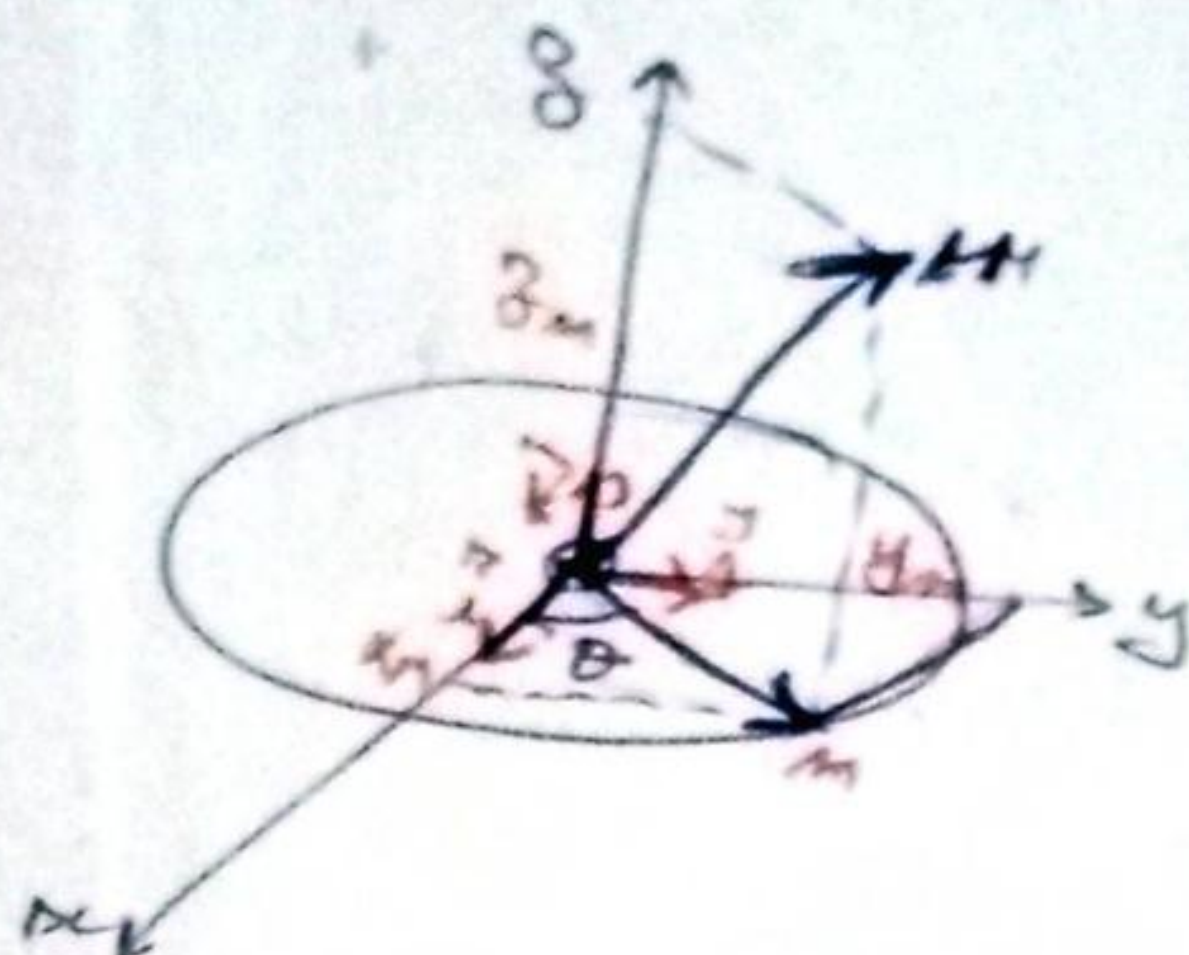
$$\vec{a} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta \quad \left\{ \begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned} \right.$$

coordonnées cylindriques

vecteur de position est défini par rapport au système cartésien



vue de haut



vecteur de position est donné par:

$$\vec{OM} = x_m \vec{i} + y_m \vec{j} + z_m \vec{k}$$

$$\vec{OM} = \vec{Om} + m \vec{r}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta = \frac{y_m}{r} \Rightarrow y_m = r \sin \theta \\ \cos \theta = \frac{x_m}{r} \Rightarrow x_m = r \cos \theta \end{array} \right.$$

$$z_m = z$$

$$\vec{OM} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} + z \vec{k} \text{ alors on peut écrire}$$

$$\boxed{\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{k}}$$

vitesses: $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(r \vec{u}_r + z \vec{k})}{dt}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r \frac{d\theta}{dt} \end{array} \right.$$

$$= \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{k} + z \frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$= \dot{r} \vec{u}_r + r \left(\frac{d\vec{u}_r}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) + \dot{z} \vec{k}$$

$$= \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{k}}$$