Espaces vectoriels

Un espace vectoriel sur un corps *K* est un ensemble non vide *E* sur lequel on définit une loi interne notée (+), appelée **addition**, et une loi externe, notée (.), appelée **multiplication par un scalaire**.

Ces deux opérations doivent vérifier certaines propriétés :

- $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x.$
- $\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \forall(x,y)\in E^2,\ \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y.$
- $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ \alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x.$
- $\forall x\in E,\ 1\cdot x=x.$

Espaces vectoriels: Sous-espaces vectoriels

Soit **E** un espace vectoriel et **F** un sous-ensemble non vide de **E**.

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication externe de E, c.-à-d. si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- $(F,+)$ est un sous-groupe de $(E,+)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F,\ \alpha . x \in F$

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Espaces vectoriels: Sous-espaces vectoriels

D'une autre façon on peut dire que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est non vide et vérifie la propriété suivante :

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2, \forall(x,y)\in F^2, \alpha.x+\beta.y\in F$$

Espaces vectoriels:

Combinaison linéaire de vecteurs :

Une combinaison linéaire de n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ d'un espace vectoriel E est un vecteur $x \in E$ s'écrivant :

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,, \qquad \text{où } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Espaces vectoriels:

Une famille libre et famille génératrice:

Une famille non vide d'éléments de E est définie comme une application d'un ensemble d'indices I, à valeurs dans E.

Une famille de n-uplet $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est libre (ou que les v_i sont linéairement indépendants) si, pour tout choix de $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \implies \forall i \in I, \alpha_i = 0$$

Espaces vectoriels:

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée ou que les v_i sont linéairement dépendants.

Soit $V = (v_i)_{i \in I}$. Il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant *V* : on l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par *V* et on le note *Vect(V)*.

Le sous-espace vectoriel *Vect(V)* est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des $V = (v_i)_{i \in I}$

Espaces vectoriels:

Dimension finie

Si E est un espace vectoriel muni d'une base de ***n*** vecteurs non nuls, alors toute famille libre de E a au plus ***n*** éléments et toute autre base de E a exactement ***n*** éléments. Le nombre ***n*** est appelé dimension de E et on note ***dim(E)=n***.

Matrices

Soient n et m deux entiers positifs. On appelle matrice à n lignes et m colonnes, ou matrice n*m, ou matrice (n, m), à coefficients dans k, un ensemble de nm scalaires $a_{ij} \in K$, avec *i=1,…,n* et *j=1,…,m*, représentés dans le tableau rectangulaire suivant

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Matrices

Quand $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, on écrit respectivement $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ou $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, afin de mettre explicitement en évidence le corps auquel appartiennent les éléments de A. nous désignerons une matrice par une lettre majuscule, et les coefficients de cette matrice par la lettre minuscule correspondante.

Pour écrire (1), nous utiliserons l'abréviation $A = (a_{ij})$ avec $i=1,\ldots,n$ et $j=1,\ldots,m$. l'entier i est appelé indice de ligne, et l'entier j indice de colonne. L'ensemble $(a_{i1}, a_{i2},\ldots,a_{im})$ est la i-ième ligne de A ; de même, $(a_{1j}, a_{2j},\ldots,a_{nj})$ est la j-ième colonne de A.

Si n=m on dit que la matrice est carré ou d'ordre n.

Matrices

On appelle vecteur ligne (resp. vecteur colonne) une matrice n’ayant qu’une ligne (resp. colonne), c.-à-d. une matrice de type (1, m) (resp. de type (n, 1)).

Sous-matrice soit A une matrice n*m. soient $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ et $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_l \le m$ deux ensemble d’indices. La matrice S(k*l) est appelée sous-matrice de A.

Parmi toutes les partitions possibles de A, mentionnons en particulier la partition en colonnes.

$$A=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

a_i étant la i-ième vecteurs colonne de A. on définit de façon analogue la partition de A en lignes.

Matrices

Pour préciser les notations, si A une matrice n*m nous désignerons par

$$A(i_1:i_2,j_1:j_2) = \left(a_{ij}\right)\ i_1 \leq i \leq i_2, j_1 \leq j \leq j_2$$

La sous-matrice de A de taille $(i_2-i_1+1)*(j_2-j_1+1)$ comprise entre les lignes i_1 et i_2 et les colonnes j_1 et j_2. Ces notations sont utiles pour l'implémentation des algorithmes dans MATLAB.

Matrices / Operations

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices n*m sur K. on dit que A est égale à B, si $a_{ij} = b_{ij}$ pour i=1,…,n et j=1,…,m. on définit de plus les opérations suivantes :

1)- ***Somme de matrices*** : on appelle somme des matrices A et B (de même format) la matrice C(n*m) dont les coefficients sont $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. L'élément neutre pour la somme matricielle est la matrice nulle, notée $0_{n,m}$ ou plus simplement 0, constituée de coefficients tous nuls.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Matrices / Operations

Propriétés Pour A, B, C de même format, et des scalaires λ,μ :

- $A + (B + C) = (A + B) + C$. (la somme est associative)
- $A + B = B + A$. (la somme est commutative)
- $A + 0 = 0 + A = A$. (la matrice 0 est élément neutre)
- Toute matrice admet une opposée, $-A = (-1)A$.
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, et $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.

  (le produit par un scalaire est distributif par rapport à

  la somme des matrices et par rapport à la somme des scalaires)

2)- ***multiplication d'une matrice par un scalaire*** :

la multiplication de A par $\lambda \in K$, est la matrice C(n*m) dont les coefficients sont donnés par $c_{ij} = \lambda\, a_{ij}$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

$$-2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice (-1) A est l'opposée de A et est notée -A.

La différence A-B est définie par A+(-B).

3)- ***produit de deux matrices*** :

Le produit de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde.

le produit d'une matrice A de taille (n, p) par une matrice B de taille (p,m) est la matrice C(n,m), dont les coefficients sont donnés par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Matrices / Operations

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,k} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & b_{j,k} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,k} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & & \vdots & & c_{1,p} \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & c_{i,k} & & \\ & & & & \\ c_{m,1} & & & & c_{m,p} \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -8 & -5 \\ 22 & 16 & 10 \\ -11 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices / Operations

Propriétés Pour A, B, C (telles que les produits existent), et des scalaires λ, μ :

- $A(BC)=(AB)C$. (le produit est associatif)
- $AB \neq BA$ en général. (Le produit n'est pas commutatif)
- $A.0=0$ et $0.A=0$. (Chaque matrice nulle est élément absorbant)
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$. (Associativité généralisée)
- $A(B + C)= AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$.

(Le produit est distributif à gauche et à droite par rapport à la somme)

- $AB = 0$ n'implique pas $A= 0$ ou $B = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices / Operations

- En particulier, dans le calcul matriciel, on ne peut pas simplifier :

  AB = AC n'implique pas nécessairement B = C

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Dans le cas des matrices carrées, l'élément neutre pour le produit matricielle est la matrice carrée d'ordre n, appelée matrice unité d'ordre ***n*** ou, plus fréquemment, matrice identité, définie par $I_n = (\delta_{ij})$. δ_{ij} est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Matrices / Operations

La matrice identité est la seule matrice n*n telle que $AI_n = I_nA = A$ pour toutes les matrices carrées A. La matrice identité est un cas particulier de matrice diagonale d'ordre n, c'est-à-dire une matrice n'a que des 1 sur la diagonale et des 0 par tout ailleurs.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, si A est une matrice carrée d'ordre n et p un entier, on définit A^p comme le produit de A par elle-même répété p fois. On pose A^0=I.

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p\ facteurs}$$

4)- ***La transposition*** : soit A une matrice de taille m*n. On appelle matrice transposée de A la matrice A^T de taille n*m définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i, j) de A^T est a_{ji} . Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^T.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Propriétés

- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
- $(A^T)^T = A$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

2.3- Trace et déterminant d'une matrice :

1) ***Trace :*** Considérons une matrice carrée A d'ordre n.
la trace de cette matrice est la somme des
coefficients diagonaux de A : $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

2) ***déterminant :*** pour une matrice A de taille 2*2 le déterminant est :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$$

Pour une matrice A de taille n*n avec, n>2, le déterminant est égal à la somme des produits obtenus en multipliant les éléments d'une ligne quelconque (ou d'une colonne) par leur cofacteurs respectifs.

Le cofacteur de a_{ij} est défini par $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ où M_{ij} est la sous-matrice carrée d'ordre (n-1) obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.

Le calcul effectif du déterminant de A peut être effectué en utilisant la relation de récurrence

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & si\ n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} a_{ij} & pour\ n > 1 \end{cases}$$

Ainsi $|A| = \Delta_{i1}a_{11} + \Delta_{i2}a_{22} + \cdots + \Delta_{in}a_{nn}.$

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Solution :

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 + 8 \times 11 = 116$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1 \times (4 \times 21 - 6 \times 15) + 6 \times (3 \times 6 - 5 \times 4) = -18$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1+1) + (-1+0) = -1$$

Matrices / Operations

Propriétés :

- Si A possède une ligne (ou colonne) de « 0 », alors $|A| = 0$.
- Si A possède 2 lignes (colonnes) identiques, alors $|A| = 0$.
- Si A est triangulaire, alors $|A|$= produit de ses éléments diagonaux. En particulier, $|I_n| = 1$.
- Si B est obtenue de A en multipliant une seule de ses lignes (colonnes) par un scalaire k, alors $|B| = k\,|A|$.
- Si B est obtenu en permutant 2 lignes (ou colonnes) de A, alors $|B| = -|A|$.
- Si B est obtenu de en additionnant le multiple d'une ligne (colonne) à une autre, alors $|B| = |A|$.
- $|A^T| = |A|$
- Si A et B sont 2 matrices carrées de même dimension, alors $|AB| = |A||B|$.
- A est inversible si $|A| \neq 0$.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times (4 \times 7 - 6 \times 5) + 2 \times (3 \times 6 - 5 \times 4) = -6$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2} L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -6$$

2.4- Inverse d'une matrice :

2.4.1- Définition :

Soit A une matrice carrée de taille n*n. S'il existe une matrice carrée B

de taille n*n telle que $AB = BA = I$,

On dit que A est inversible. On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

Une matrice qui n'est pas inversible est dite singulière.

Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note:

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{p}$$

2.4.2- Propriétés :

- Si A est inversible, alors son inverse est unique.
- Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a: $(A^{-1})^{-1} = A$
- Soient A et B deux matrices inversibles de même taille.

  Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

  Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre!

2.4.3- Calcul

a- *Cas de matrices 2*2 :* soit une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

si *det (A)* $\neq 0$ alors A admet une matrice inverse unique

A^{-1} définie par $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $si \det A \neq 0$

b- *cas de matrices d'ordre $n > 2$:* La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I.

On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}.

Si l'inverse de A existe, on peut l'obtenir de la façon suivante :

Matrices / Operations

- A côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau (A | I).

$$(A : I) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée jusqu'à ce qu'elle devienne (I | B).

  La matrice B est alors l'inverse de A i.e. $B = A^{-1}$.

Exemple : calculons l'inverse de A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution :

Etape 01 : Voici la matrice augmenté

$$\begin{array}{cc} (A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

Matrices / Operations

Etape 02 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3} A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2.5- Applications linéaires et matrices :

Théorème : soit $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.

alors tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit de manière unique :

$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + \ \dots + x_n\overrightarrow{e_n}$ où $x_1, x_2, \dots, x_n$

sont des coefficients (des scalaires) appelés les coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans la base B. on peut alors définir la matrice colonne X par : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Exemple : Prenons $E = R^3$ muni de la base canonique

$B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où : $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (1,1,0)$, $\vec{w} = (1,1,1)$

Prenons par exemple le vecteur $\vec{x} = (1,-2,3)$, on peut écrire

ce système linéaire de la manière suivante :

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \Leftrightarrow (1,-2,3) = a\,(1,0,0) + b\,(1,1,0) + c\,(1,1,1)$$

$$\Leftrightarrow (1,-2,3) = (a+b+c, b+c, c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 1 \\ \quad\; b+c = -2 \\ \qquad\;\; c = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On a donc $\vec{x} = 3\vec{u} - 5\vec{v} + 3\vec{w}$

Matrices / Application linéaire et matrice

Soit E et F deux espaces vectoriels finie p et n respectivement,

une application $f : E \to F$ est linéaire si elle vérifie

les 2 relations suivantes :

1- $f(x + y) = f(x) + f(y)$

2- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$,

où $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ces deux relations peuvent être regroupées sous la forme

d'une relation unique:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \text{ où } x, y \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Matrices / Application linéaire et matrice

Toute application linéaire f de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F (dimensions finies) peut se mettre sous la forme $f(x) = A\,x$, où A est une matrice.

Soit $B = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p}\right)$ une base de E et $\acute{B} = \left(\overrightarrow{\acute{e}_1}, \overrightarrow{\acute{e}_2}, \dots, \overrightarrow{\acute{e}_n}\right)$ une base de F. On pose $f\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\overrightarrow{\acute{e}_\imath}$

(donc $f\left(\overrightarrow{e_j}\right) = a_{1j}\,\overrightarrow{\acute{e}_1} + a_{2j}\,\overrightarrow{\acute{e}_2} + \cdots + a_{nj}\,\overrightarrow{\acute{e}_n}$)

Matrices / Application linéaire et matrice

On définit une matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{array} \end{array}$$

Matrices / Application linéaire et matrice

Tout système d'équations linéaires (n équations, p inconnues)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}\,x_p & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{np}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

Matrices / Application linéaire et matrice

On appelle A (n, p) la matrice des coefficients du système.

B (n,1) est le vecteur du second membre. Le vecteur X (p, 1) est une solution du système si et seulement si A x=B.

Si le nombre d'équations du système linéaire est égale au nombre d'inconnues, alors A (n, n) est une matrice carrée.

Si la matrice A est inversible, alors la solution du système A x=B est unique et est:

$$\boxed{X = A^{-1}B.}$$