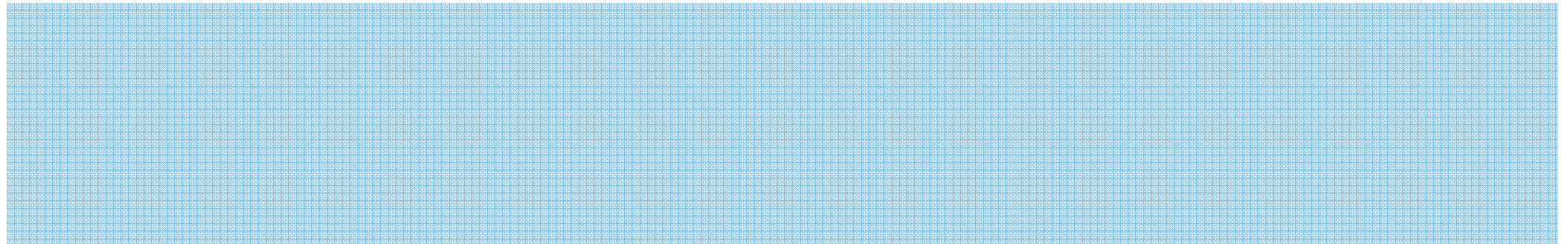


Cours : Modélisation et évaluation des performances des systèmes

Chapitre 3 : Chaînes de Markov.



Chaine Markov

Introduction

Les chaines Markov permettent de décrire mathématiquement de nombreux phénomènes aléatoires dans différent domaines comme, par exemple, la biologie, la physique, la sociologie, la recherche opérationnelle et les sciences de l'ingénieur, ou elles donnent des réponses qualitatives aussi bien que quantitatives aux problèmes poses.

Chaine Markov

Nous considérons pour cela une suite de variables aléatoires (X_n) dont l'espace des états S est discret c'est à dire fini ou dénombrable.

On note : $p_{ij}(n) = p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

C'est la probabilité conditionnelle que le processus passe de l'état i à l'état j au cours de l'intervalle de temps $[n, n+1]$.

On l'appellera probabilité de transition.

Chaine Markov

Chaînes de Markov à temps discret

Dans l'exemple précédent les probabilités de transition $p_{ij}(n)$ ne dépendent pas du comportement du processus antérieur à l'instant n .

Un tel processus est caractérisé par le fait que seule la connaissance de l'état présent, c'est à dire son état à l'instant n , est utile pour connaître son évolution future.

Cette propriété est connue sous le nom de propriété de Markov.

Mathématiquement elle s'énonce :

$$p(X_{n+1} = j \mid X_n = i ; X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

Chaine Markov

pour tout $n \geq 0$ et pour des états quelconques $j, i, i_{n-1}, \dots, i_0$ appartenant à S .

Une suite de variables aléatoires (X_n) satisfaisant à cette condition est appelée chaîne de Markov à temps discret ou simplement chaîne de Markov.

On dit qu'un tel processus stochastique est sans mémoire.

Dans les Chaînes de Markov homogènes dans le temps les probabilités de transition sont indépendantes du temps :

$$p_{ij}(n) = p_{ij} \text{ pour tout } n.$$

Chaine Markov

Exemple (chaîne de Markov à deux états).

On pense qu'un individu non endetté a une possibilité sur 3 de devenir endetté. Un individu endetté a une possibilité sur 6 de régler ses dettes.

On représente une chaîne de Markov avec une matrice de transition.

Chaque rangée de la matrice correspond à un état et donne la probabilité de passer à un autre état. Dans le cas de notre individu endetté, la matrice de transition est :

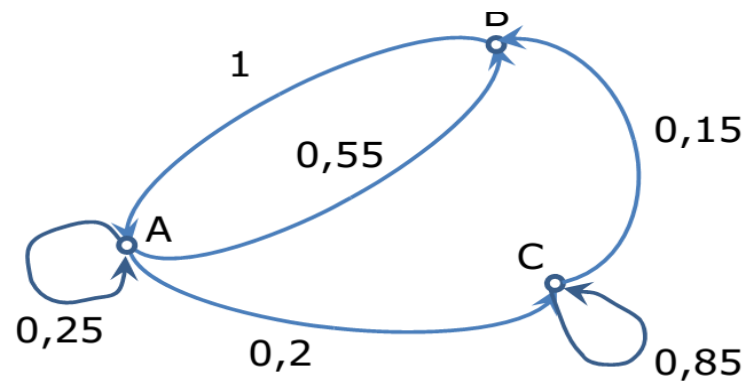
$$\begin{bmatrix} & \text{Sans dette} & \text{Avec dette} \\ \text{Sans dette} & 2/3 & 1/3 \\ \text{Avec dette} & 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}.$$

Chaine Markov

La matrice des probabilités de transition ou matrice de transition est la matrice : $P = ((p_{ij}))$.

On vérifie immédiatement que P est une matrice stochastique.

Le graphe des transitions a pour sommets les états du processus, les arcs correspondant aux transitions possibles avec pour évaluations les probabilités p_{ij}



$$P = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,55 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

Probabilités de transition

Probabilités de transition entre deux moments consécutifs $(t+1)$

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) \quad \forall i, j \in \{0, \dots, M\}$$

Propriétés:

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{0, \dots, M\}$$

$$\sum_{j=0}^M p_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{0, \dots, M\}$$

stationnaires probabilités de transition restent dans le temps

Probabilités de transition

Probabilités de transition entre deux moments consécutifs t et $(t+1)$

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) \quad \forall i, j \in \{0, \dots, M\}$$

Matrice de transitions

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \right] \end{array} P = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & M \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{M0} & p_{M1} & \dots & p_{MM} \end{array} \right] \end{array}$$

Probabilités de transition à n étapes

Soit $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité qu'une chaîne de Markov passe de l'état i à l'état j en n transitions ou étapes :

$$p_{ij}^{(n)} = p (X_n = j \mid X_0 = i) = p (X_{n+k} = j \mid X_k = i) \quad (n \geq 1 , k \geq 1)$$

Avec $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$

On note $\mathbf{P}^{(n)}$ la matrice des probabilités de transition à n étapes :

$$\mathbf{P}^{(n)} = ((p_{ij}^{(n)})) \quad \text{Alors pour tout } n \geq 1 : \quad \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$$

Probabilités de transition à n étapes

En effet :

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= p(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} p(X_n = j, X_{n-1} = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} p(X_n = j \mid X_{n-1} = k, X_0 = i) p(X_{n-1} = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} p(X_n = j \mid X_{n-1} = k) p(X_{n-1} = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj}^{(1)} p_{ik}^{(n-1)} \end{aligned}$$

Ce qui signifie que $P^{(n)} = P^{(n-1)} P$ et par itération on obtient

$P^{(n)} = P^n$ Plus généralement on a donc $P^{(m)} P^{(n)} = P^{(m+n)}$

Probabilités de transition à n étapes

On obtient ainsi les équations de Chapman- Kolgoromov:

$$\sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} = p_{ij}^{(m+n)}$$

Ces équations fournissent une condition nécessaire mais non pas suffisante pour qu'une suite de variables aléatoires (X_n) soit une chaîne de Markov.

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X_n

Introduisons maintenant les probabilités d'état $\pi_k (n) = p(X_n = k)$

La distribution de X_n peut être écrite sous forme vectorielle avec dont la somme des termes vaut 1. D'après le théorème des probabilités totales on a alors

$$\pi_k (n) = \sum_{i \in S} \pi_i (0) p_{ik}^{(n)}$$

Matriciellement cette relation s'écrit: $\pi(n) = \pi(0) P^n$ pour tout $n \geq 0$

On a de même : $\pi(n + 1) = \pi(n) P$

Ces résultats permettent d'affirmer qu'une chaîne de Markov est complètement définie si l'on connaît sa matrice des probabilités de transition ainsi que la distribution de X_0 .

Régime permanent

Régime transitoire et régime permanent

Lorsqu'on exprime les probabilités d'état $\pi_k (n) = P(X_n = k)$ d'une chaîne de Markov en fonction du nombre n de transitions, on étudie le régime transitoire du phénomène aléatoire.

Généralement la distribution de X_n varie en fonction du temps et dépend de la distribution initiale $\pi(0)$.

Si la distribution $\pi (n)$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers une distribution limite notée π , cette dernière définit le régime permanent du processus stochastique.

Celui ci n'est pas influencé par le choix de la distribution initiale.

Régime permanent

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(n) = \pi$, indépendamment de la distribution initiale et si π est une distribution de probabilité, on dit que la chaîne de Markov (X_n) converge vers π ou π possède une distribution limite π .

Une distribution de probabilité discrète π est dite stationnaire par rapport à la matrice stochastique P si $\pi P = \pi$.

Une chaîne de Markov est appelée stationnaire si la distribution $\pi(n)$ de la variable aléatoire X_n est indépendante du temps n , ce qui signifie que $\pi(0)$ est une distribution stationnaire du processus en question.

Classification des états

Un état i est **accessible** à partir de l'état j si $p_{ij}^{(n)} > 0$
Pour certains $n > 0$

Les états i et j **communiquent** si

l'état i est accessible à partir de l'état j et l'état j est accessible à partir de l'état i

Une classe est un sous-ensemble de tous les états communiquant entre eux.

Une **chaîne de Markov** est irréductible si elle ne comporte qu'une seule classe.

Classification des états

Etat transient :

i est un état transient si après y avoir accédé ,le processus peut ne plus y revenir:

Etat récurrent :

i est un état récurrent si après y avoir accédé, le processus y reviendra:

Etat absorbant:

i est un état absorbant si après y avoir accédé, le processus ne peut en repartir:

i est un état absorbant $\Leftrightarrow p_{ii}=1$.

Périodicité

la période di d'un état récurrent i est : $d_i = \text{PGCD}\{n | p_{ii}^{(n)} > 0\}$

$p_{ii}^{(n)}$ où est la probabilité que le système, partant de i , y repasse après n transitions ; la période di est donc aussi le PGCD des longueurs des circuits passant par i.