

Cours : Modélisation et évaluation des performances des systèmes

Chapitre 1 : Chaînes de Markov.

Partie 1 :Rappelle sur la théorie des probabilités

Modéliser une expérience aléatoire

Expérience aléatoire

Certaines expériences entraînent des résultats aléatoires, c'est-à-dire qui dépendent directement du hasard. Nous les appelons des **expériences aléatoires**. Dans la suite, $\mathcal{E}$ désignera une expérience aléatoire.

En théorie des probabilités, le terme **modéliser** désigne l'opération qui consiste à associer à $\mathcal{E}$ trois objets mathématiques, notés et appelés généralement Ω , l'univers, $\mathcal{F}$, l'ensemble des événements et $\mathbb{P}$, la probabilité.

- **Univers**

Nous appelons **univers** associé à $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les résultats possibles de $\mathcal{E}$. Généralement, l'univers est noté Ω .

- **Événement**

Pour représenter les événements, il est d'usage d'utiliser la théorie des ensembles. Un **événement** est donc associé à un sous-ensemble de l'univers, l'ensemble des résultats pour lesquels l'événement est réalisé.

Ensemble des événements

Terminologie des événements :

- $\emptyset$ est appelé **événement impossible**.
- Ω est appelé **événement certain**.
- Tout singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, est appelé **événement élémentaire**.

- **Ensemble des événements**

Nous appelons **ensemble des événements** associés à $\mathcal{E}$ tout sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. $\emptyset$ et $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$;
3. soit I une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$ et $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.

Un ensemble d'événements vérifiant les trois propriétés ci-dessous est appelé une **σ -algèbre** ou une **tribu**.

Événement

- **Espace probabilisable**

Nous appelons **espace probabilisable** lié à $\mathcal{E}$ le couple $(\Omega, \mathcal{F})$, où Ω est l'ensemble des résultats possibles de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ un ensemble des événements liés à $\mathcal{E}$.

- **Événements incompatibles**

Nous appelons **événements incompatibles** ou **disjoints** deux événements A et B tels que $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire qu'il est impossible que A et B se réalisent simultanément.

- **Probabilité**

Nous appelons **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ vérifiant les deux propriétés suivantes (axiomes de Kolmogorov)

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. pour toute suite $(A_i)_{i \in I}$ finie ou infinie dénombrable d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux incompatibles, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i),$$

Espace probabilisé fini

Espace probabilisé fini

Nous appelons **espace probabilisé fini** associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, lorsque l'univers Ω est fini.

- **Espace probabilisé**

Nous appelons **espace probabilisé** associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω , $\mathcal{F}$ et $\mathbb{P}$ ont été définis dans la fiche 5.

Nous disons qu'il y a **équiprobabilité** lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales.

Dans ce cas, $\mathbb{P}$ est la **probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Conséquence : S'il y a équiprobabilité, pour tout événement A , nous avons alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Probabilité conditionnelle

Definition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à $\mathcal{E}$. Soit A un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement B , nous posons

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

L'application qui à un événement $B \in \mathcal{F}$ associe $\mathbb{P}(B|A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, appelée **probabilité conditionnelle relative à A** ou **probabilité sachant A** .

Variables aléatoires réelles

- **Variable aléatoire réelle**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Nous appelons **variable aléatoire réelle** (v.a.r.) toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que : pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in I\}$ est un événement de $\mathcal{F}$.

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous appelons **fonction de répartition de la variable aléatoire X** la fonction numérique réelle F_X définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Variables aléatoires discrètes

- **Variable aléatoire discrète**

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous appelons **variable aléatoire discrète** (v.a.d.) X si l'ensemble de ses valeurs $X(\Omega)$, est au plus dénombrable (voir la fiche 2 pour cette notion).

- **Loi d'une variable aléatoire discrète**

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous appelons **loi de la variable aléatoire** X la donnée d'une suite numérique $(\mathbb{P}(X = k) = p_X(k))_{k \in X(\Omega)}$ telle que

1. $\forall k \in X(\Omega), \quad p_X(k) \geq 0$;

2. $\sum_{k \in X(\Omega)} p_X(k) = 1$;

3. pour tout réel x , $\mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k \leq x} p_X(k)$ où $\sum_{k \leq x}$ désigne la sommation sur l'ensemble des $k \in X(\Omega)$ inférieurs ou égaux à x .

Espérance mathématique Variance et écart-type

- **Espérance mathématique**

Nous disons que **la variable aléatoire X admet une espérance mathématique** lorsque I est fini ou lorsque la série $\sum_i x_i p_X(x_i)$ est absolument convergente.

Nous appelons alors **espérance mathématique de X** , la moyenne pondérée notée $\mathbb{E}(X)$ et définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_X(x_i).$$

- **Variance et écart-type**

Nous disons que **la variable aléatoire discrète X admet une variance** lorsque X admet un moment centré d'ordre 2. Nous appelons alors **variance de X** la valeur

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = {}_{\mu}m_2(X).$$

Nous la notons également σ^2 ou σ_X^2 s'il y a plusieurs variables aléatoires à distinguer.

Nous appelons **écart-type de X** la valeur $\sqrt{\text{Var}(X)}$, que nous noterons σ ou σ_X selon les cas.

Lois discrètes usuelles

Loi de Bernoulli de paramètre p

- **Loi de Bernoulli**

Soit $p \in [0, 1]$. Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** , notée $\mathcal{B}(1, p)$, si la variable aléatoire X prend la valeur 1 avec la probabilité p et la valeur 0 avec la probabilité $1 - p = q$.

- **Propriétés**

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p sont égales respectivement à

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p) = pq \quad \text{où} \quad q = 1 - p.$$

Loi uniforme discrète

- **Loi uniforme discrète**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme discrète** si la variable aléatoire X prend n valeurs possibles $k_1, k_2, \dots, k_n$ avec la probabilité égale à $1/n$ pour n'importe quelle valeur k_i .

- **Propriétés**

Si X suit une loi uniforme discrète sur $\llbracket a, b \rrbracket$, alors nous avons

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)(b-a+1)}{12}.$$

Loi binomiale

- **Loi binomiale**

Soit n un entier naturel et $p \in [0, 1]$. Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètres n et p** , notée $\mathcal{B}(n, p)$, si la variable aléatoire X prend la valeur k avec la probabilité égale à $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. Nous notons q le nombre $1 - p$.

Cette loi caractérise le nombre de boules blanches obtenues dans un tirage **avec remise** de n boules dans une urne.

- **Stabilité pour la somme**

Si $X_1, \dots, X_m$ sont m variables aléatoires mutuellement indépendantes et si, pour tout entier $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, X_k suit la loi $\mathcal{B}(n_k, p)$ alors la variable aléatoire $\sum_{k=1}^m X_k$ suit

la loi $\mathcal{B}(n, p)$ où $n = \sum_{k=1}^m n_k$.

- **Propriétés**

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p sont égales respectivement à :

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p) = npq.$$

Loi de Poisson de paramètre λ

Loi de Poisson de paramètre λ

- **Loi de Poisson**

Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre λ** , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si la variable aléatoire X prend la valeur k , $k \in \mathbb{N}$ avec la probabilité égale à $\exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$.

Propriétés

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ sont égales respectivement à

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \lambda.$$

Variables aléatoires continues

Définitions

- Variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r.) définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous disons que **la variable aléatoire X est continue** s'il existe une fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ telle que

1. $f_X(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
2. l'ensemble des points de discontinuités de f_X est fini et ces discontinuités sont de première espèce (i.e. la limite à gauche et à droite en chaque point existe) ;
3. pour tout x réel la **fonction de répartition F_X de la variable X** est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

Espérance mathématique

Espérance mathématique

- **Espérance mathématique**

Nous disons que **la variable aléatoire X admet une espérance mathématique** si

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ converge absolument.

Nous appelons alors **espérance mathématique de X** , la valeur notée $\mathbb{E}(X)$ et définie par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt.$$

Si deux variables aléatoires réelles X et Y admettent une espérance alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}(aX + bY) = a \mathbb{E}(X) + b \mathbb{E}(Y)$.

Variance et écart-type

Variance et écart-type

Nous disons que X **admet une variance** lorsque X admet un moment centré d'ordre 2. Nous appelons alors **variance de X** la valeur

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = {}_{\mu}m_2(X).$$

Nous la notons également σ^2 ou σ_X^2 s'il y a plusieurs variables aléatoires à distinguer.

Nous appelons **écart-type de X** la valeur $\sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(X)}$, que nous noterons σ ou σ_X selon les cas.

Théorème X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance mathématique. La **formule de Huygens** est alors valable :

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X).$$

Lois continues

Loi uniforme continue $\mathcal{U}[a,b]$

Définition

Une variable aléatoire X à valeurs dans $[a, b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$ suit une **loi uniforme continue** sur $[a, b]$, notée $\mathcal{U}[a, b]$, si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction f_X suivante

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriétés

1. La fonction de répartition d'une loi uniforme $\mathcal{U}[a, b]$ est égale à

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $\mathcal{U}[a, b]$. Nous avons :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Lois continues

Loi exponentielle $E(\lambda)$

Définition

Une variable aléatoire X à valeurs dans $[0, +\infty[$ suit une **loi exponentielle de paramètre** λ ($\lambda > 0$), notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction f_X suivante

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda t) & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}.$$

Propriétés

1. La fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ est égale à

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$