Université de Relizane **2022-2023**

1^{er} année: Mathématiques et Informatique **Algèbre I**

TD 2

Ensembles et applications

Exercice 1:

Soient $A; B; C \in P(E)$. Établir:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
3. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;
4. $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$;
5. $A \cup B = A \cap C \Longleftrightarrow B \subset A \subset C$.

Exercice 2:

Soient $E; F$ deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, démontrer que:

1. $\forall A, B \in P(E),\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
2. $\forall A, B \in P(E),\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
3. $\forall B, B' \in P(F),\ f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f(B')$;
4. $\forall A \in P(F),\ f^{-1}(F \backslash A) = E \backslash f^{-1}(A)$;
5. $\forall B \in P(F),\ f(f^{-1}(B) \subset B$.

Exercice 3:

- Décrire l'image directe de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle.
- Déterminer: $f([0;1[)$; $f(\mathbb{R})$, $f(]-1;2[)$, $f(]-3;-2[)$ et $f^{-1}(\{3\})$, par la fonction $f : x \longrightarrow x^2$, définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4:

Soit f et g deux applications définies comme suit :

- $f : [1, +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[,\ f(x) = x^2 - 1$,
- $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ g(x) = |2x + 5|$.

1. Les applications ainsi définie sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
2. Dans le cas où l'application est bijective, donner leur réciproque.

Exercice 5:
Soient E, F, G trois ensembles,

1. Soient $f_1, f_2 : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, on suppose $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective. Montrer que $f_1 = f_2$.
2. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g_1, g_2 : F \longrightarrow G$, on suppose $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ et f surjective. Montrer que $g_1 = g_2$.