Chapitre 2

Ensembles et applications

2.1 Ensemles

Définition 2.1 *Un ensemble est un collection d'éléments, exemple* $\{0,\ 1\}$, $\mathbb{N}$,.....
• *l'ensemble vide est un ensemble ne contenant aucun élément, noté* $\emptyset$
• *On nôte* $x \in E$, *si* x *est un élément de* E, *et* $x \notin E$ *dans le cas contraire*

2.1.1 Opérations sue les ensembles

• **Inclusion:**

$E \subset F$, si tout élément de E est un élément de F

Autremendit: $\forall x \in E,\ x \in F$. Et on dit alors que E est un sous ensemble de F, (E est une partie de F)

• **L'égalité**

$E = F \Longleftrightarrow E \subset F$ et $F \subset E$

• **Ensemble des parties de** E :

On nôte $P(E)$ l'ensemble des parties de E

Par exemple si $E = \{1, 2, 3\}$, alors $P(E) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E, \emptyset\}$

Si $card(E) = n$ alors, $card(P(E)) = 2^n$.

• **Différence et différence symetrique**

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On note

1 – la différence de A et B est l'ensemble : $A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

2 – la différence symétrique de A et B est l'ensemble $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

• **Complémentaire d'un ensemble**

si $A \subset E$, alors le complementaire de A dans E est noté par $\complement_E A$, définie par

$$\complement_E A = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$$

On le note aussi $E \backslash A$ ou A^c, ou $\overline{A}$.

• **Intersection et Union**

1− On appelle intersection de A et B, l'ensemble, noté $A \cap B$, des éléments de A appartenant aussi à B.

2- On appelle réunion de A et B, l'ensemble, noté $A \cup B$, des éléments de A et de ceux de B.

Formellement, on a :

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x/(x \in A) \wedge (x \in B)\}. \\ A \cup B &= \{x/(x \in A) \vee (x \in B)\}. \end{aligned}$$

• **Produit cartésien**

Le produit cartésien des ensembles E et F est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$,

$$E \times F = \{(x, y) \mid \ x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Si $card\,(E) = n$, $card\,(F) = m$ alors, $card\,(E \times F) = nm$.

Proposition 2.1 *Soient A, B, C des parties de E alors,*

1. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$,

2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

3. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$,

4. $A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B$,

5. $A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B$,

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

8. $\complement_E \left(\complement_E A\right) = A$,

9. $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$,

10. $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$,

11. $A \subset B \Longleftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$.

Preuve. 8. Soit $x \in E$, alors $x \in \complement_E A \left(\complement_E A\right) \Longleftrightarrow x \notin \complement_E A$
$\Longleftrightarrow \overline{x \in \complement_E A}$

$\Longleftrightarrow \overline{x \notin A}$

$\Longleftrightarrow x \in A$

Donc $\complement_E A\left(\complement_E A\right) = \complement_E A$

9. Soit $x \in E$, alors $x \in \complement E(A \cap B) \Longleftrightarrow x \notin (A \cap B)$

$\Longleftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$

$\Longleftrightarrow (x \in \complement_E A) \vee (x \in \complement_E B)$

$\Longleftrightarrow x \in (\complement_E A \cup \complement_E B)$

Donc $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$

De même on montre la propriété 10.

11. $A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in E \ ((x \in A) \Longrightarrow (x \in B))$

$\Longleftrightarrow \forall x \in E \ ((x \notin B) \Longrightarrow (x \notin A))$ Contrapposée de l'implication

$\Longleftrightarrow \forall x \in E \ \big((x \in \complement_E B) \Longrightarrow (x \in \complement_E A)\big)$

$\Longleftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$, donc $A \subset B \Longleftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$ ■

Remarquez que l'on repasse aux éléménts pour les preuves.

2.2 Les applications

Définition 2.2 *Une application ou une fonction $f : E \longrightarrow F$, est une relation qui associe à chaque élément $x \in E$, un unique élément de F noté $f(x)$.*

- *f, g deux applications, $f = g \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.*
- *Le graphe de l'application $f : E \longrightarrow F$ est l'ensemble noté G_f définie par*

$$G_f = \{(x, f(x)) \in E \times F \ / \ x \in E\}$$

- *La Composition de deux applications f et g telles que $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ est lapplication $g \circ f : E \longrightarrow G$ définie par*

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Exemple 2.1 *Soient $f :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ et $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.*
Alors

$$\begin{aligned} g \circ f :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1-x}{1+x} = -g(x).$$

Remarque 2.1 *Le composé de deux applications n'est pas toujours définies, par exemple $g \circ f$ est défini si l'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble de départ de g.*

2.2.1 Image directe , Image réciproque

Définition 2.3 • *Soit $A \subset E$, et $f : E \longrightarrow F$ une application, l'image directe de A par f est l'ensemble*

$$f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\} \subset F$$

c-à-d:

$$y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$$

• *Soit $B \subset F$, et $f : E \longrightarrow F$ une application, l'image réciproque de B par f est l'ensemble*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\} \subset E$$

c-à-d:

$$x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$$

Exemple 2.2 *Soit* $\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$

alors:

$f(\{2\}) = \{4\}, \quad f([-1,3]) = \{f(x) \ / \ x \in [-1,3]\} = [0,9]$

$f([-1,0] \cup [1,3]) = [0,9]$

$f^{-1}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in \{2\}\} = \left\{-\sqrt{2}, \ \sqrt{2}\right\}$

$f^{-1}([0,3]) = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 \in [0,3]\right\} = \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$

$f^{-1}([-1,3]) = \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$

$f^{-1}([-1,0] \cup [1,3]) = \{0\} \cup \left[-\sqrt{3}, \ -1\right] \cup \left[1, \sqrt{3}\right]$

$f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}, \qquad f^{-1}\left(\mathbb{R}_-^*\right) = \emptyset$

Remarque 2.2 • *$f(A)$ est un sous ensemble de F, $f^{-1}(B)$ est un sous ensemble de E*

• *La notation $f^{-1}(B)$ est un tout rien ne dit que f est bijective, l'image réciproque existe quelque soit la fonction.*

• *L'image directe d'un singleton $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ est un singleton, par contre l'image réciproque d'un singleton $f^{-1}(\{y\})$ dépond de f, elle peut être un singleton, un ensemble à plusieurs éléments, peut être E si f est une fonction constante.*

Proposition 2.2 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A, A' des parties de E, B, B' des partie de F*

1. $A \subset A' \Longrightarrow f(A) \subset f\left(A'\right)$,
2. $B \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}\left(B'\right)$,
3. $f\left(A \cap A'\right) \subset f(A) \cap f\left(A'\right)$,
4. $f\left(A \cup A'\right) = f(A) \cup f\left(A'\right)$,
5. $f^{-1}\left(B \cap B'\right) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}\left(B'\right)$,

6. $f^{-1}\left(B\cup B'\right)=f^{-1}(B)\cup f^{-1}\left(B'\right)$,
7. $A\subset f^{-1}(f(A))$,
8. $f\left(f^{-1}(B)\right)\subset B$.

Preuve. 1. Soit $y\in f(A)$, alors $\exists x\in A$, $y=f(x)$, comme $A\subset A'$ alors, $x\in A'$, alors $y\in f\left(A'\right)$, donc $f(A)\subset f\left(A'\right)$.
2. Soit $x\in f^{-1}(B)$, alors $f(x)\in B$, comme $B\subset B'$, alors $f(x)\in B'$, alors $x\in f^{-1}\left(B'\right)$, d'où $f^{-1}(B)\subset f^{-1}\left(B'\right)$.
3. Soit $y\in f\left(A\cap A'\right)$, il existe $x\in A\cap A'$ tel que $y=f(x)$, or $x\in A$ donc $y=f(x)\in f(A)$ et de même $x\in A'$ donc $y\in f\left(A'\right)$. D'où $y\in f(A)\cap f\left(A'\right)$ donc $f\left(A\cap A'\right)\subset f(A)\cap f\left(A'\right)$.
4. Soit $y\in f\left(A\cup A'\right)$, $\exists x\in A\cup A'$ tel que $y=f(x)$, si $x\in A$ alors $y\in f(A)$, sinon $x\in A'$ et $y\in f\left(A'\right)$, dans les deux cas $y\in f(A)\cup f\left(A'\right)$
inversement: soit $y\in f(A)\cup f\left(A'\right)$, si $y\in f(A)$ alors $\exists x\in A$ tel que $y=f(x)$. or $x\in A\subset\left(A\cup A'\right)$ donc $y\in f\left(A\cup A'\right)$. de même si $y\in f\left(A'\right)$ par double inclusion on a l'égalité.
5. Soit $x\in f^{-1}\left(B\cap B'\right)$, alors $f(x)\in\left(B\cap B'\right)$, donc $f(x)\in B$ et $f(x)\in B'$, donc $x\in f^{-1}(B)$ et $x\in f^{-1}\left(B'\right)$, donc $x\in f^{-1}(B)\cap f^{-1}\left(B'\right)$, alors $f^{-1}\left(B\cap B'\right)=f^{-1}(B)\cap f^{-1}\left(B'\right)$
6. démontré comme -5-.
7. Soit $x\in A$, Posons $B=f(A)$, on a $f(x)\in B$ donc $x\in f^{-1}(B)=f^{-1}(f(A))$, d'où $f(A)\subset f^{-1}(f(A))$.
8. Soit $y\in f\left(f^{-1}(B)\right)$, posons $A=f^{-1}(B)$, on a $y\in f(A)$ donc $\exists x\in A$, $y=f(x)$, comme $x\in A=f^{-1}(B)$, on a $f(x)\in B$, donc $y\in B$, alors $f\left(f^{-1}(B)\right)\subset B$. ■

Définition 2.4 ***Antécédent***
Fixons $y\in F$, tout élément $x\in E$ tel que $f(x)=y$ est un antécédent de y
• *En terme d'image réciproque, l'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.*

2.2.2 Injection, surjection, bijection

Définition 2.5 *Soit $f:E\longrightarrow F$ une application,*
• *f est injective, si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f.*
• *f est surjective, si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent par f.*
• *f est bijective, si tout élément de l'ensemble d'arrivée a un unique antécédent par f.*

Cette définition peut se reformuler comme:

Définition 2.6 • *f est injective, si pour tout $y\in F$, l'équation $f(x)=y$ a au plus une solution dans E.*

- *f est surjective, si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ a au moins une solution dans E.*
- *f est bijective, si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution dans E.*

Autremendit f est bijective, si elle est injective et surjective.

Proposition 2.3 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, les assertions suivantes sont équivalentes:*

•. *1.f est injective$\iff \forall x_1, x_2 \in E;\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$,*

2. f est injective$\iff \forall x_1, x_2 \in E;\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

• *1.f est surjective$\iff \forall y \in F, \exists x \in E;\ y = f(x)$*

2.f est surjective$\iff f(E) = F$

• *f est bijective$\iff \forall y \in F, \exists! x \in E;\ y = f(x)$.*

Le symbole ! exprime l'unicité, c-à-d: il existe une solution unique pour l'équation $f(x) = y$.

Exemple 2.3 *Soient les applications $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, telles que $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^2$.*
Les applications f_1, f_2, f_3 sont elles injectives, surjectives, bijectives?

Preuve. 1. $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x}$

• $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N};\ f_1(x_1) = f_1(x_2) \Longrightarrow \dfrac{1}{1+x_1} = \dfrac{1}{1+x_2}$,

$\Longrightarrow x_1 = x_2$,

Donc f_1 est injective.

• $\forall y \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{1+x} = y \Longrightarrow x = \dfrac{1-y}{y}$, par exemple pour $y = 5$, on obtient $x = \dfrac{-4}{5} \notin \mathbb{N}$, alors f_1 n'est pas surjective.

par conséquence f_1 n'est pas bijective.

2. $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$

• $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+;\ f_2(x_1) = f_2(x_2) \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Longrightarrow x_1 = \pm x_2$

$\Longrightarrow x_1 = x_2$, $(x_1, x_2$ ont même signe)

Alors f_2 est injective.

• $\forall y \in \mathbb{R};\ x^2 = y \Longrightarrow x = \pm\sqrt{y}$, si $y \geq 0$, alors pour $y \in \mathbb{R}^-$, $x\nexists$, d'où f_2 n'est pas surjective.

par conséquence f_2 n'est pas bijective.

3. $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f_3(x) = x^2$

• $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+;\ f_2(x_1) = f_2(x_2) \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Longrightarrow x_1 = \pm x_2$,

alors, $\exists 2, -2 \in \mathbb{R}$, $2 \neq -2$ mais $(2)^2 = (-2)^2$, donc f_3 n'est pas injective.

• $\forall y \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = y \Longrightarrow x = \pm\sqrt{y}$, si $y \geq 0$,

alors $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R};\ y = f_3(x)$. donc f_3 est surjective

par conséquence f_3 n'est pas bijective. ■

Proposition 2.4 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, alors*

1. *f injective et g injective$\Longrightarrow g \circ f$ injective,*
2. *f surjective et g surjective$\Longrightarrow g \circ f$ surjective,*
3. *$g \circ f$ injective$\Longrightarrow f$ injective,*
4. *$g \circ f$ surjective$\Longrightarrow g$ surjective.*

Preuve. 1. Soient $x_1, x_2 \in E$, alors :$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ car f injective
$\Longrightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ car g injective
$\Longrightarrow g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$ ce qui montre que $g \circ f$ est injective.
2. Soit $z \in G$, g étant surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, comme $y \in F$ et f est surjective alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g(f(x))$ et on déduit que : $\forall z \in G, \exists x \in E; z = g \circ f(x)$, ce qui montre que $g \circ f$ est surjective.
3. $\forall x_1, x_2 \in E;\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (car g : une application)
$\Longrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$
$\Longrightarrow x_1 = x_2$ (car $g \circ f$ est injective), d'où f est injective.
4. Soit $z \in G$, alors $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow \exists x \in E;\ g \circ f(x) = z$
$\Longrightarrow \exists x \in E;\ g(f(x)) = z$
$\Longrightarrow \exists y = f(x) \in F;\ g(y) = z$,
donc $\forall z \in G, \exists y \in F;\ g(y) = z$, ce qui montre que g est surjective. ■

2.2.3 L'application réciproque

Proposition 2.5 *Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe une unique application $g : F \longrightarrow E$ telle que*

$$f \circ g = Id_F \text{ et } g \circ f = Id_E.$$

On dit que f est inversible et g, notée f^{-1}, est appelée "l'application réciproque" ou "l'application inverse" de f.

Preuve. I.) Supposons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.
Montrons que f est bijective.
1. Soit $y \in F$, comme $f \circ g = Id_F$ alors $f \circ g(y) = y$, par suite il existe $x = g(y) \in E$ tel que $f(x) = y$, ce qui montre que f est surjective.
2. Soient $x_1, x_2 \in E$, comme $g \circ f = Id_E$ alors $g \circ f(x_1) = x_1$ et $g \circ f(x_2) = x_2$, par suite:
$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (car g application)
$\Longrightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$
$\Longrightarrow x_1 = x_2$, ce qui montre que f est injective.

De 1. et 2. on déduit que f est bijective.

II.) Supposons que f est bijective. Construisons l'unique application $g : F \longrightarrow E$,
telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

f étant bijective, alors : $\forall y \in F, \exists! x \in E; y = f(x)$.

Ainsi, à tout élément $y \in F$, on fait associer un unique élément $x \in E$, qu'on notera $g(x)$, tel que $f(x) = y$. On définit ainsi une application

$$g : F \longrightarrow E$$
$$y \mapsto g(y) = x$$

Montrons que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$..

1. Soit $y \in F$, alors $g(y) = x$, avec $f(x) = y$, donc $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y$, ce qui montre que : $f \circ g = Id_F$.

2. Soit $x \in E$, alors pour $y = f(x)$ on a $g(y) = x$, par suite $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$, ce qui montre que : $g \circ f = Id_E$.

3. Montrons l'unicité de g. Soit $g_1 : F \longrightarrow E$ vérifiant les deux propriétés précédentes,
alors pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $g_1(y) = g_1(f(x)) = g_1 \circ f(x) = Id_E(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$
ce qui montre que $g_1 = g$. ■

Exemple 2.4 *$f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = exp(x)$ est bijective, sa bijection réciproque est $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(y) = ln(y)$. Nous avons bien $exp\,(ln(y)) = y$, pour tout $y \in]0, +\infty[$ et $ln\,(exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Proposition 2.6 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Preuve. D'après la proposition 2.5, il existe $u : F \longrightarrow E$ tel que $u \circ f = id_E$ et$f \circ u = id_F$.
Il existe aussi $v : G \longrightarrow F$ tel que $v \circ g = id_F$ et $g \circ v = id_G$.
On a alors $(g \circ f) \circ (u \circ v) = g \circ (f \circ u) \circ v = g \circ id_F \circ v = g \circ v = id_E$.
Et $(u \circ v) \circ (g \circ f) = u \circ (v \circ g) \circ f = u \circ id_F \circ f = u \circ f = id_E$.
Donc $g \circ f$ est bijective et son inverse est $u \circ v$.
Comme u est la bijection réciproque de f et v celle de g alors : $u \circ v = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

2.2.4 Prolongement et restriction

Définition 2.7 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, soit $A \subset E$, $B \subset F$, tel que $f\,(A) \subset B$.*
On appelle restriction de f à A comme ensemble de départ et B comme ensemble d'arrivée et on nôte

$f_{|A\longrightarrow B}$ *l'application de* A *dans* B *qui à tout* x *dans* A *associe* $f(x)$.

• *Cette application a la même règle de calcul que* f, *seuls changent les ensemble de départ et d'arrivée*

Remarque 2.3 *Quand on restreint uniquement l'ensemble de départ* $(B = F)$ *on utilise la notation* $f_{|A}$.

Définition 2.8 *Soient* f, g *des applications, on dit que* f *est un prolongement de* g *si* g *est un restriction de* f.

Exemple 2.5 *1. Soient* $\begin{array}{ll} f:\mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$, $\begin{array}{ll} g:\mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$

c-à-d g *est la restriction de* f *sur* $\mathbb{R}^+$, $(g = f_{|\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+})$, *on remarque que* g *est croissante et bijective, mais* f *ne l'est pas.*

2. Soient $\begin{array}{ll} g:\mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$, $\begin{array}{ll} f:\mathbb{R} & \\ x & \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 1, & si\ x = 0 \end{cases} \end{array}$

L'application f *est prolongement de* g. $(g = f_{|\mathbb{R}^*})$

De plus on peut montrer que f *est continue sur* $\mathbb{R}$, *et on dit que* f *est le prolongement par continuité de* g.