

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Zabana – Relizane



Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de : **GENIE MECANIQUE**

Polycopie

Mécanique Rationnelle Cours

(Unité Fondamentale-- Domaine Sciences et Technique – S3 Licence LMD)

Dr. CHAOUCH Djamel

Maître de Conférences "A"

Novembre 2021

AVANT PROPOS

Ce polycopié de la physique 4 intitulé **mécanique rationnelle** est une matière de l'unité fondamentale du socle commun du domaine sciences et techniques. Elle s'adresse aux étudiants de troisième semestre licence nouveau régime (LMD). Le contenu de ce polycopié regroupe le programme enseigné dans le département de Génie Mécanique et Génie Civil. Il s'agit en particulier des étudiants de Faculté des sciences et de la Technologie – Université Ahmed Zabana - Relizane. Il résulte d'une compilation structurée de plusieurs sources: polycopiés préexistants à l'université de Relizane, Wikipédia et autres contributions disponibles librement sur Internet.

L'objectif de ce polycopié est essentiellement de mettre à la disposition de l'étudiant un document de travail qui lui permet d'illustrer le cours sur la mécanique rationnelle avec des exemples.

Dr. CHAOUCH DJAMEL

Département : Génie Mécanique

Faculté des Sciences et de la Technologie

Université Ahmed Zabana – Relizane

Table des matières

Chapitre I: Eléments de calcul vectoriel

I.1	Scalaire et vecteur.....	5
I.1.1	scalaire.....	5
I.1.2	vecteur.....	5
I.2	Classification.....	6
I.2.1	vecteur libre.....	6
I.2.2	vecteur glissant.....	6
I.2.3	Vecteur lié.....	7
I.3	Représentation analytique des vecteurs.....	7
I.3.1	Notion de vecteur unitaire	7
I.3.2	Représentation analytique des vecteurs	7
I.4	Les opérations sur les vecteurs ...	9
I.4.1	Somme vectorielle	9
I.4.2	Multiplication d'un vecteur par un scalaire	10
I.4.3	Produit scalaire	10
I.4.4	Produit vectoriel	12

Chapitre II: Généralité et définition de base

II.1	Définition et sens physique de la force	15
II.2	Représentation mathématique de la force.....	15
II.3	Opérations sur la force	16
II.3.1	Composantes d'une force	16
II.3.2	Composition de la force.....	17

II.3.3 Décomposition d'une force sur des directions quelconque.....	18
II.3.4 Décomposition d'une force sur des directions perpendiculaire....	19
II.3.5 Résultante de plusieurs forces concourantes.....	20
II.4 classification des actions mécaniques.....	22
II.4.1 Actions mécaniques à distance.....	23
II.4.2 Action mécanique de contact.....	23
II.5 Classification des forces.....	25
II.6 Notion de moments.....	26
II.6.1 Moment d'une force par rapport a un point.....	26
II.6.2 Moment d'une force par rapport à un axe.....	27
II.6.3 Théorème de VARIGNON.....	28

Chapitre III: Statique

III.1 Axiomes de la statique.....	30
III.1.1 Axiome 1 : Principe d'équilibre.....	30
III.1.2 Axiome 2 : Principe de l'action et de la réaction.....	30
III.1.3 Axiome 3 : Principe de parallélogramme.....	31
III.2 Lisons, appuis et réactions	31
III.2.1 Différents types des liaisons	31
III.3 Axiome des liaisons.....	33
III.4 Principe fondamental de la statique.....	34
III.4.1 Cas des forces quelconques.....	35
III.4.2 Cas des forces concourantes.....	36
III.4.3 Cas des forces planes.....	36
III.5 Frottement.....	36
III.5.1 Notion de frottement	36

Chapitre IV : Géométrie des masses

IV.1 Introduction.....	44
IV.2 Systèmes matériels.....	44
IV.2.1 Système continu.....	44
IV.2.2 Système discrets.....	45
IV.3 Centre de masse d'un système matériel.....	45
IV.3.1 Détermination du centre d'inertie de corps simple	45
IV.3.2 Centre d'inertie d'un système composé.....	48
IV.3.3 Détermination du centre d'inertie par la méthode de Guldin.....	51
IV.4 Moment d'inertie et tenseur d'inertie.....	53
IV.4.1 Définition du moment d'inertie d'un solide.....	53
IV.4.2 Expression analytique.....	54
IV.4.3 Matrice d'inertie d'un solide (S) en O.....	55
IV.4.4 Matrice principale d'inertie.....	58
IV.4.5 Théorème de Huygens	61
IV.4.6 Moment d'inertie par rapport à une droite quelconque.....	62

Chapitre I

Éléments de calcul vectoriel (Rappels mathématiques)

I.1 Scalaire et vecteur

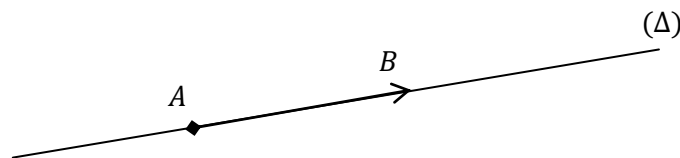
I.1.1 Scalaire

Définition : un scalaire est une quantité physique qui n'est spécifié que par sa grandeur. On peut exprimer avec un nombre et une unité.

Exemple : La température $\longrightarrow$ 25 °C
 La masse $\longrightarrow$ 30 kg
 Énergie $\longrightarrow$ 18 J
 Temps $\longrightarrow$ 15s

I.1.2 Vecteur

Définition : un vecteur est une quantité physique qui est spécifié par une origine, une direction, un sens et une intensité.

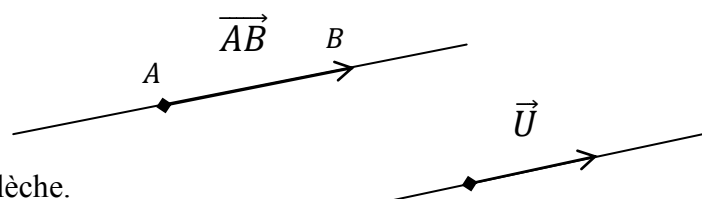


- L'origine : le point d'application (A)
- La direction : la droite qui porte le vecteur (Δ)
- Le sens : l'orientation origine – extrémité (de A vers B) du vecteur et est symbolisé par une flèche.
- L'intensité : représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur.

Exemple : vecteur vitesses $\vec{V}$, vecteur force $\vec{F}$

Comment se note un vecteur :

- Deux lettres surmontées d'une flèche si le vecteur est représenté par une flèche d'origine A et d'extrémité B.



- Une lettre surmontée d'une flèche.

Exemple : Une force peut être modélisée par un vecteur

Le poids $\vec{P}$ d'un corps de masse 1 kg (Figure I.1) peut être représenté par un vecteur ayant les caractéristiques suivantes :

- Origine : le centre de gravité de l'objet
- Direction : verticale
- Sens : du haut vers le bas
- Module : $\|\vec{P}\| = P = mg = 1 \cdot 9,81 = 9,81 \text{ N}$

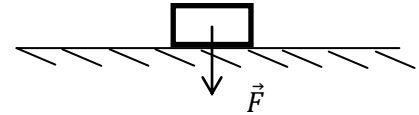


Figure I.1

Si on choisit une échelle : $1 \text{ cm} \longrightarrow 2 \text{ N}$

Donc le vecteur aura une longueur 4,9 cm

I.2 Classification

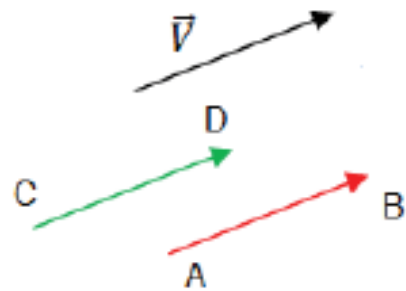
Il existe différents types de vecteurs :

I.2.1 Vecteur libre

Un vecteur libre est défini par sa direction, son sens et sa valeur, son point d'application pouvant être quelconque dans l'espace.

Exemple : le vecteur de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

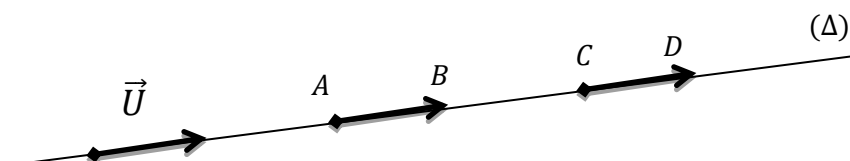
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants d'un même vecteur $\vec{V}$.



I.2.2 Vecteur glissant

Un vecteur glissant est défini par sa droite d'action, son sens et sa valeur, son point d'application n'étant pas défini.

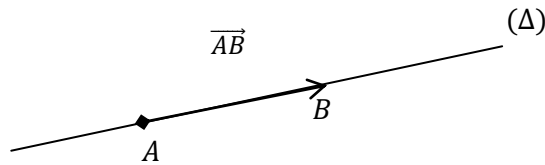
Exemple: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur glissant $\vec{U}$



I.2.3 Vecteur lié

Un vecteur est nommé "vecteur lié" si l'on fixe le point d'application. Il est caractérisé par :

1. Origine
2. Une direction
3. Un sens
4. Le module

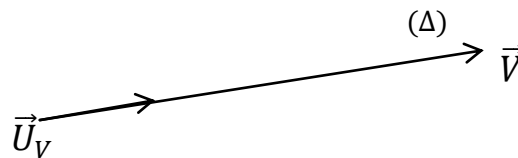


I.3 Représentation analytique des vecteurs

I.3.1 Notion de vecteur unitaire

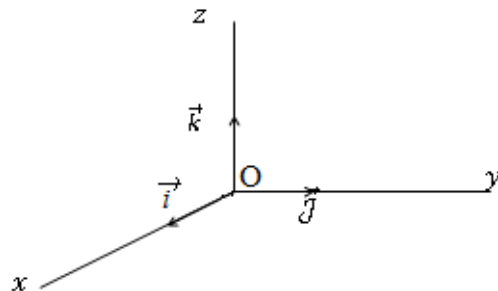
On appelle vecteur unitaire $\vec{U}$ associé au vecteur $\vec{V}$, le vecteur : $\vec{U} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$

Son module est $\|\vec{U}\| = 1$, son support est la droite (Δ) et son sens celui de $\vec{V}$



Soit un repère orthonormé est représenté par trois axes $(0x, 0y, 0z)$ perpendiculaires deux à deux, muni de trois vecteurs unitaires respectivement $\vec{i}, \vec{j},$ et $\vec{k}$.

$\vec{i}, \vec{j},$ et $\vec{k}$ Sont les vecteurs de base du repère orthonormé (O, x, y, z) où O est un point de l'espace pris comme origine.



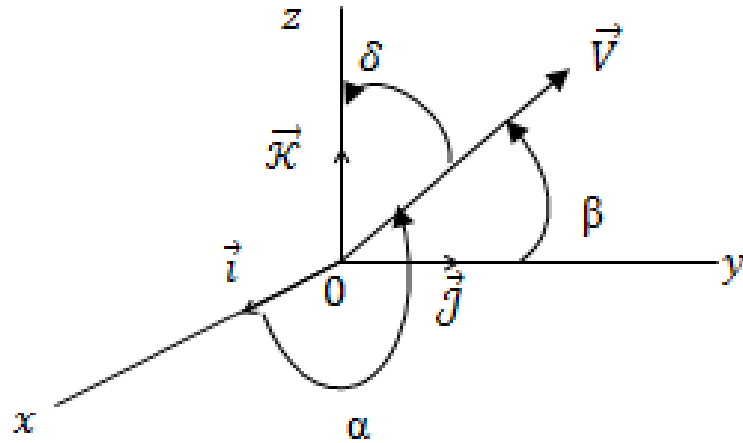
I.3.2 Représentation analytique des vecteurs

Les composantes du vecteur $\vec{V}$ sont les projections orthogonales $V_x, V_y,$ et V_z sur les trois axes.

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

Où le module de $\vec{V}$ est :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$



$$V_x = \|\vec{V}\| \cos \alpha, V_y = \|\vec{V}\| \cos \beta, V_z = \|\vec{V}\| \cos \delta$$

$$\text{Où } \alpha = (\vec{i}, \vec{V}); \beta = (\vec{j}, \vec{V}); \delta = (\vec{k}, \vec{V})$$

On appelle $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \delta$ les cosinus directeurs du support de $\vec{V}$ dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les composantes du vecteur unitaire de $\vec{V}$, noté $\vec{U}$, sont :

$$\vec{U} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_x}{\|\vec{V}\|} \vec{i} + \frac{V_y}{\|\vec{V}\|} \vec{j} + \frac{V_z}{\|\vec{V}\|} \vec{k}$$

$$\vec{U} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \delta \vec{k}$$

$$\text{Et comme } \|\vec{U}\| = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \delta = 1$$

Remarque : on a utilisé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère cartésien.

Exemple 1

déterminer le vecteur unitaire de la direction du vecteur $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

Le vecteur unitaire de la force $\vec{F}$:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{U} \Rightarrow \vec{U} = \frac{\vec{F}}{F} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} \Rightarrow \vec{U} = \frac{3}{\sqrt{50}} \vec{i} + \frac{4}{\sqrt{50}} \vec{j} + \frac{5}{\sqrt{50}} \vec{k}$$

$$\vec{U} = 0,424\vec{i} + 0,565\vec{j} + 0,707\vec{k}$$

Exemple 2

La ligne d'une force $\vec{R}$ de 800N, passe par les points A (1, 0, 2) et B (0, 1, 2) dans un repère orthonormé. Déterminer les composantes de cette force.

Solution :

$$R = 800\text{N}$$

$$A(1, 0, 2); B(0, 1, 2)$$

Détermination des composantes de la force $\vec{R}$:

$$\vec{R} = R \cdot \vec{U}_{AB}$$

Tel que $\vec{U}_{AB}$ vecteur unitaire qui donne la direction de la force $\vec{R}$

$$\text{Nous avons aussi : } \vec{AB} = AB \cdot \vec{U}_{AB} \Rightarrow \vec{U}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB}$$

$$\vec{AB} = -\vec{i} + \vec{j}$$

$$AB = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{2}$$

$$\vec{U}_{AB} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \vec{U}_{AB} = -0,707\vec{i} + 0,707\vec{j}$$

$$\vec{R} = 800\text{N} (-0,707\vec{i} + 0,707\vec{j}) \Rightarrow \vec{R} = -565,6\vec{i} + 565,6\vec{j}$$

I.4 Les opérations sur les vecteurs

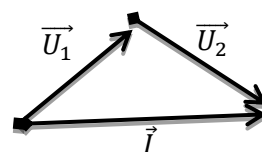
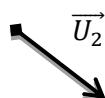
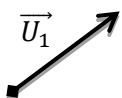
On considère des vecteurs tels que : $U_k = x_k\vec{i} + y_k\vec{j} + z_k\vec{k}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I.4.1 Somme vectorielle

$$\vec{U}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

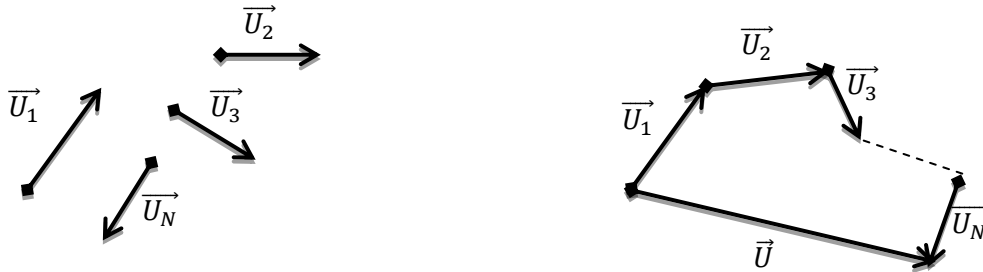
$$\vec{U}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{I} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$



Remarque : la somme est commutative ($\vec{U}_1 + \vec{U}_2 = \vec{U}_2 + \vec{U}_1$) de façon générale.

$$\vec{U}_1 = \sum_{k=1}^n \vec{U}_k = \sum_{k=1}^n (x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}) = \sum_{k=1}^n x_k \vec{i} + \sum_{k=1}^n y_k \vec{j} + \sum_{k=1}^n z_k \vec{k}$$



I.4.2 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

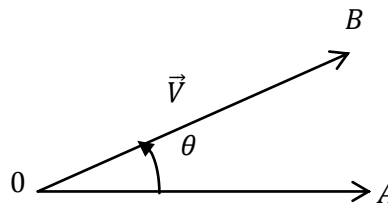
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot \vec{U} = \lambda x_U \vec{i} + \lambda y_U \vec{j} + \lambda z_U \vec{k} = \vec{U}'$$

Les propriétés vectorielle de $\vec{U}'$

- Le module $\|\vec{U}'\| = \lambda \|\vec{U}\|$
- Le support de $\vec{U}'$ est celui de $\vec{U}$
- Le sens est celui de $\vec{U}$ si $\lambda > 0$ et opposé à celui de $\vec{U}$ si $\lambda < 0$

I.4.3 Produit scalaire

Définition : le produit scalaire de vecteur $\vec{U}$ par le vecteur $\vec{V}$ est le scalaire noté $\vec{U} \cdot \vec{V}$ tel que : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \cos(\vec{U}, \vec{V})$



Propriétés du produit scalaire

- Le produit scalaire est commutatif :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$$

- Distributivité par rapport à l'addition :

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$$

- Multiplication par un scalaire :

$$\lambda(\vec{U} \cdot \vec{V}) = (\lambda \vec{U}) \cdot \vec{V} = \vec{U} \cdot (\lambda \vec{V})$$

- Si le produit scalaire est nul, alors :

$$\vec{U} = \vec{0} \text{ ou } \vec{V} = \vec{0} \text{ ou } \cos(\vec{U}, \vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \vec{U} \perp \vec{V}$$

Le produit scalaire nous permet donc de déduire la perpendicularité géométrique lors qu'il est de valeur nulle.

Expression analytique du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ définis dans le repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tels que :

$$\vec{U} = U_1\vec{i} + U_2\vec{j} + U_3\vec{k}$$

$$\vec{V} = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$$

Le produit scalaire s'écrit :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (U_1\vec{i} + U_2\vec{j} + U_3\vec{k}) \cdot (V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}) = U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3$$

Remarque :

- Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les vecteurs sont normés donc :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

- Les vecteurs de la base sont orthogonaux entre eux :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0; \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0; \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

- On peut calculer l'angle compris les deux vecteur, soit :

$$\left. \begin{aligned} \vec{U} \cdot \vec{V} &= \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cos \theta \\ \vec{U} \cdot \vec{V} &= U_1 \cdot V_1 + U_2 \cdot V_2 + U_3 \cdot V_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \theta = \frac{U_1 \cdot V_1 + U_2 \cdot V_2 + U_3 \cdot V_3}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} \cdot \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}}$$

Exemple 1

Soit deux vecteurs $\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{B} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Calculer : $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{B}$

Solution :

$$\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{B} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + (4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) - (4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \cdot (4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + (-1)(3) = 4$$

Exemple 2

Déterminer α de manière que les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ soient orthogonaux.

$$\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} ; \vec{V}_2 = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

Solution:

$$\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} ; \vec{V}_2 = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

Les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ soient orthogonaux $\Rightarrow \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$

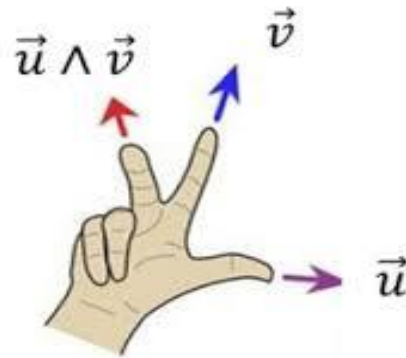
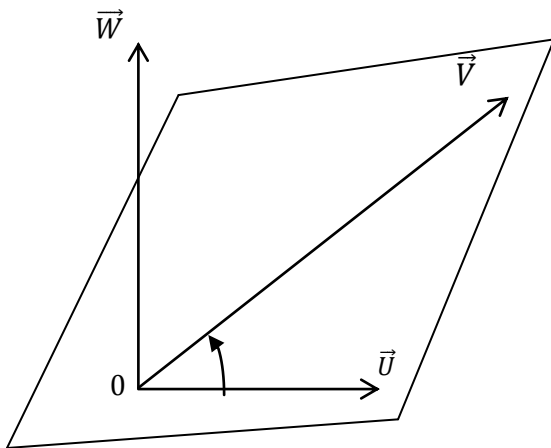
$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (\alpha\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 0$$

I.4.4 Produit vectoriel

Définition : Le produit vectoriel d'un vecteur $\vec{U}$ par un vecteur $\vec{V}$ est le vecteur $\vec{W}$ noté $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ qui vérifie les conditions suivantes :

- Support du vecteur $\vec{W}$: perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ($\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$)
- Sens du vecteur $\vec{W}$: le sens du vecteur $\vec{W}$ est donné par règle de la main droite.
- Module du vecteur $\vec{W}$: $\|\vec{W}\| = \|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \sin(\vec{U}, \vec{V})$

**Propriétés du produit vectoriel**

- Anticommutatif : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$
- Distributif par rapport à l'addition de vecteurs :

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V}) + (\vec{U} \wedge \vec{W})$$

- Associatif par rapport à la multiplication par un nombre réel :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda (\vec{U} \wedge \vec{W}) = (\lambda \vec{U}) \wedge \vec{W} = \vec{U} \wedge (\lambda \vec{W})$$

- Non associatif : $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) \neq (\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}$
- Si $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{U} // \vec{V}$

Expression analytique du produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ définis par leurs composantes dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\vec{U} = U_1 \vec{i} + U_2 \vec{j} + U_3 \vec{k}$$

$$\vec{V} = V_1 \vec{i} + V_2 \vec{j} + V_3 \vec{k}$$

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = ?$$

On utilisant un déterminant d'ordre 3, de la manière suivante :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} U_1 & U_3 \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{i}(U_2 V_3 - U_3 V_2) - \vec{j}(U_1 V_3 - U_3 V_1) + \vec{k}(U_1 V_2 - U_2 V_1)$$

Exemple 1

Soit deux vecteurs $\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{B} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Calculer : $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

Solution :

$$\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{B} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \wedge (4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}[3 \cdot 3 - 1(-1)] - \vec{j}[1 \cdot 3 - 4(-1)] + \vec{k}[1 \cdot 1 - 4 \cdot 3]$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = 10\vec{i} - 7\vec{j} - 11\vec{k}$$

Exemple 2

On donne $\vec{A} = -\vec{i} + 5\vec{k}$ et $\vec{B} = 4\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Déterminer y et z pour que les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ soient colinéaires.

Solution:

$$\vec{A} = -\vec{i} + 5\vec{k}; \vec{B} = 4\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{A} \text{ et } \vec{B} \text{ soient colinéaires} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = 0$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 5 \\ 4 & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(-5y) + \vec{j}(-z - 20) + \vec{k}(-y) = 0$$

$$\text{Donc : } y = 0 \quad \text{et } z = -20$$

Exemple3

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : A(2, 3, -3), B(5, 7, 2). Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que son module, sa direction et son sens.

Solution

$$A(2, 3, -3); B(5, 7, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 7 - 3 \\ 2 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \Rightarrow \sqrt{50} = 7,071$$

La direction est déterminée par les angles α, β et θ qu'il fait avec chacun des axes du repère.

$$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \vec{i}): \overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = AB \cdot 1 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i}}{AB} = \frac{3}{7,071} \Rightarrow \alpha = 64,89^\circ$$

$$\beta = (\overrightarrow{AB}, \vec{j}): \overrightarrow{AB} \cdot \vec{j} = AB \cdot 1 \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{j}}{AB} = \frac{4}{7,071} \Rightarrow \beta = 55,54^\circ$$

$$\theta = (\overrightarrow{AB}, \vec{k}): \overrightarrow{AB} \cdot \vec{k} = AB \cdot 1 \cdot \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{k}}{AB} = \frac{5}{7,071} \Rightarrow \theta = 44,99^\circ$$

CHAPITRE II

Généralité et définition de base

II.1 Définition et sens physique de la force

La force est une grandeur physique, elle correspond à l'action d'appuyer, pousser, tirer, même sans mouvement.

Par exemple:

- La force de gravitation exercée par la Terre sur une pomme se note $F_{\text{Terre/pomme}}$
- La force magnétique exercée par un aimant sur un clou en fer se note $F_{\text{aimant/clou}}$
- La force de contact exercée par l'eau sur un nageur se note $F_{\text{eau/nageur}}$
- La force exercée par le sol sur un ballon posé sur lui se note $F_{\text{sol/ballon}}$

Tous ces exemples (Figure II.1) conduisent vers la conclusion que les forces sont utilisées pour modéliser des actions mécanique diverses (action de contact, poids, attraction magnétique, effort).

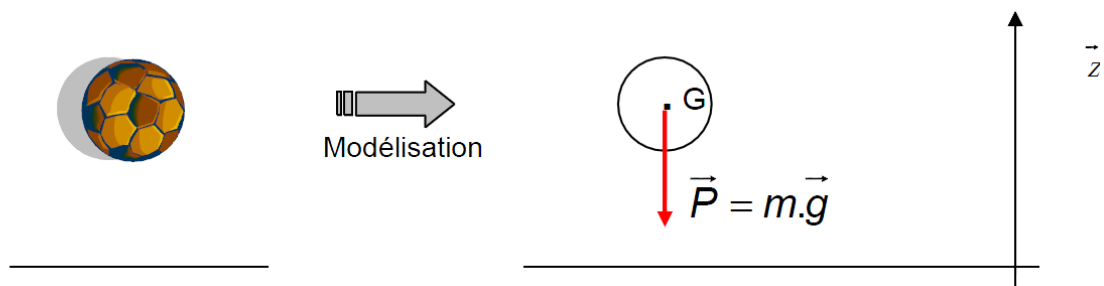


Figure II.1

II.2 Représentation mathématique de la force

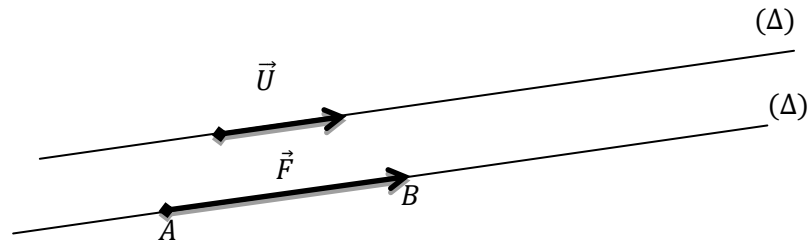
Issac newton qui au 17^e siècle donne la définition de la force.

Une force se définit par un vecteur ; caractérisé par les éléments suivants :

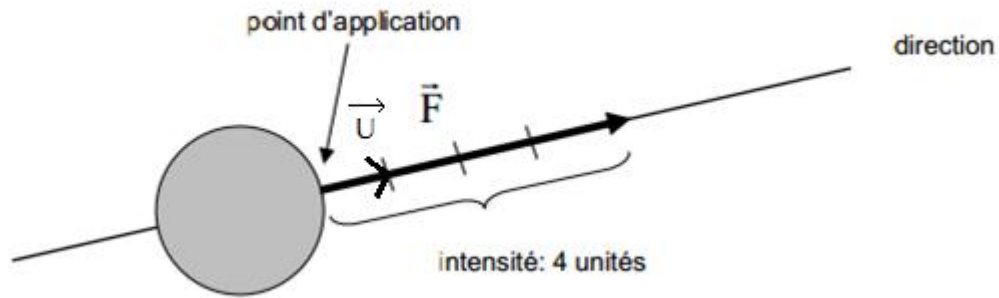
- La direction de la force s'appelle aussi ligne d'action.
- Le sens dans lequel elle agit : $A \rightarrow B$
- Le point d'application de la force.
- L'intensité ou le module qui mesure l'effort qu'il faut fournir pour produire une action.

Graphiquement, la force est représentée, par une flèche droite orientée et on peut écrire :

$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \cdot \vec{U}$$



Exemple



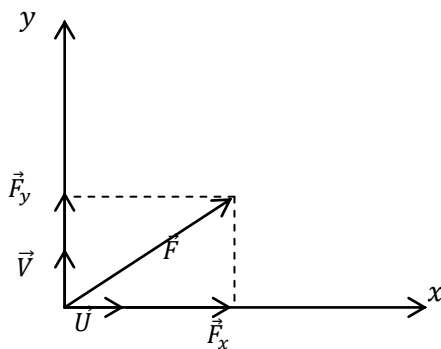
Chaque unité est égale 2, donc :

Intensité $F = 8 \text{ Newton} = 8 \text{ N}$

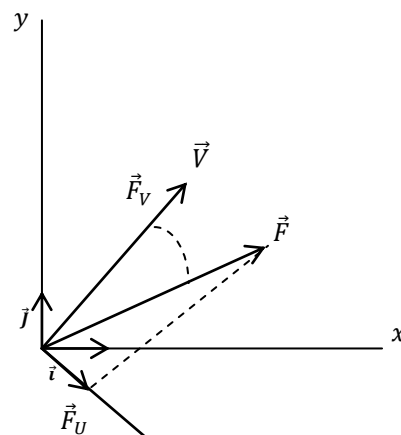
II.3 Opérations sur la force

II.3.1 Composantes d'une force

Une force $\vec{F}$ peut toujours être remplacée par deux force agissant au même point. il existe infinité de solutions possibles.



$$\vec{F} = F_x \vec{U} + F_y \vec{V}$$



$$\vec{F} = F_u \vec{U} + F_v \vec{V}$$

II.3.2 Composition de la force

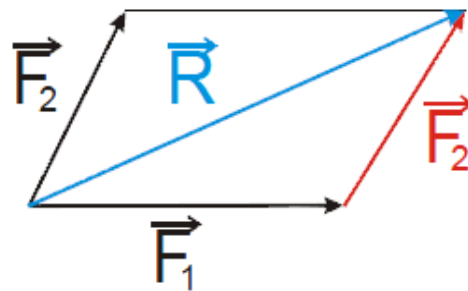
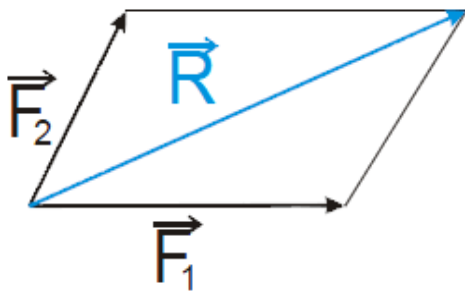
II.3.2.1 Résultante de deux forces

On appelle résultante $\vec{R}$ de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ la force unique qui produit le même effet que les deux forces appelées composantes.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont les composantes de $\vec{R}$

II.3.2.2 Deux forces concourantes



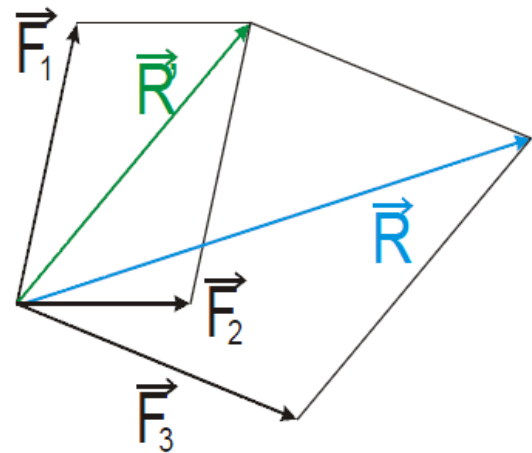
$\vec{R}$ s'obtient comme diagonale du parallélogramme construit sur $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ comme côtés.

Méthode simplifiée (construction du triangle): mettre $\vec{F}_2$ à la suite de $\vec{F}_1$, $\vec{R}$ s'obtient en reliant l'origine de $\vec{F}_1$ à l'extrémité de $\vec{F}_2$.

II.3.2.3 Trois forces concourantes

$$\vec{R} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 = \vec{R'} + \vec{F}_3$$

Tel que $\vec{R'} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$



Le parallélogramme construit sur $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ donne $\vec{R'}$.

le parallélogramme construit sur $\vec{R'}$ et $\vec{F}_3$ donne $\vec{R}$.

II.3.2.4 cas particuliers (deux forces de même support)

a) Deux forces de même sens



$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ de même sens

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$R = F_1 + F_2$$

La résultante à même sens que $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$

b) Deux forces de sens contraire

$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ de sens contraire

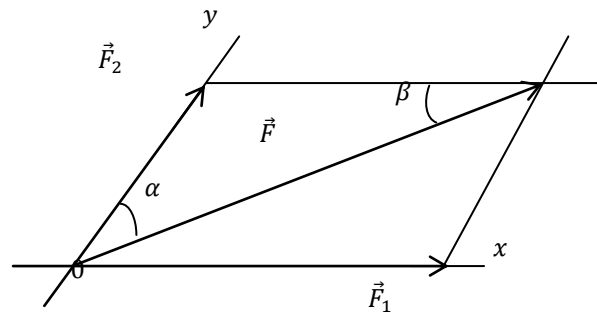
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$R = |F_1 - F_2|$$

La résultante à même sens que la force la plus grande.



II.3.3 Décomposition d'une force sur des directions quelconque



$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont appelés les projections ou composantes de $\vec{F}$ sur les directions X et Y.

$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ s'obtiennent graphiquement ou par les formules des triangles des forces.

On s'écrit : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Son module s'obtient :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2\vec{F}_1 \vec{F}_2 \cos(\pi - \alpha - \beta)}$$

Et sa direction se détermine :

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F}{\sin(\pi - \alpha - \beta)}$$

Exemple

Soient deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ faisant chacune respectivement un angle de 25° et 35° avec la résultante $\vec{R}$ qui a une valeur de 400N. Déterminer les modules des deux forces.

Solution :

$$R = 400\text{N}$$

Utilisons la règle des sinus :

$$\frac{BC}{\sin 25} = \frac{AB}{\sin 35} = \frac{AC}{\sin \alpha}$$

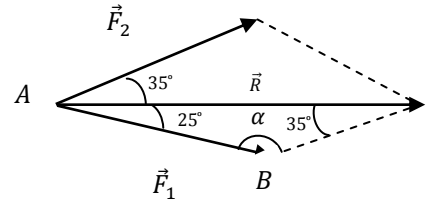
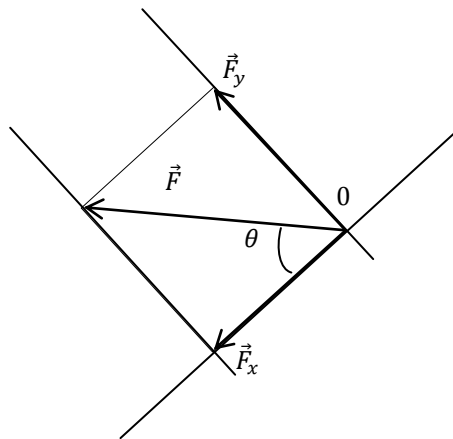
$$\alpha = 180^\circ - (25^\circ + 35^\circ) \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

Tel que $AB \equiv F_1$; $BC \equiv F_2$; $AC \equiv R$

$$\text{D'où } \frac{F_2}{\sin 25^\circ} = \frac{F_1}{\sin 35^\circ} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

$$F_2 = R \cdot \frac{\sin 25^\circ}{\sin 120^\circ} \Rightarrow F_2 = 195\text{N}$$

$$F_1 = R \cdot \frac{\sin 35^\circ}{\sin 120^\circ} \Rightarrow F_1 = 265\text{N}$$

**II.3.4 Décomposition d'une force sur des directions perpendiculaire**

F_x et F_y sont appelés les projections orthogonales de F sur les axes X et Y .

$$F_x = F \cos \theta, \quad F_y = F \sin \theta$$

F_x et F_y Seront positives si les composantes F_x et F_y ont le même sens que les axes de référence.

$$\text{Donc } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{F_y}{F_x}$$

Exemple

Les forces F_1 et F_2 agissent sur le support comme le montre la figure ci-contre.

$$F_1 = 100\text{N}, F_2 = 80\text{N}$$

Déterminer la résultante R des deux forces F_1 et F_2 .

Solution :

$$\vec{F}_1 = 100\text{N}$$

$$\vec{F}_2 = 80\text{N}$$

$$1) \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \Rightarrow \vec{F}_1 = F_1 \cos 40^\circ \vec{i} + F_1 \sin 40^\circ \vec{j}$$

$$\text{Donc : } \vec{F}_1 = 76,60 \vec{i} + 64,28 \vec{j}$$

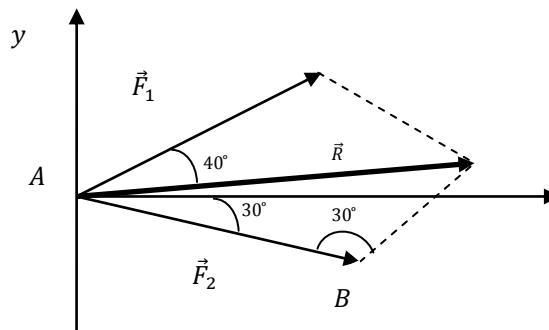
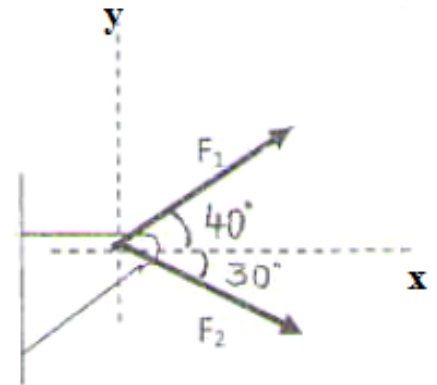
$$\vec{F}_2 = F_x \vec{i} - F_y \vec{j} \Rightarrow \vec{F}_2 = F_2 \cos 30^\circ \vec{i} - F_2 \sin 30^\circ \vec{j}$$

$$\text{Donc : } \vec{F}_2 = 69,28 \vec{i} - 40 \vec{j}$$

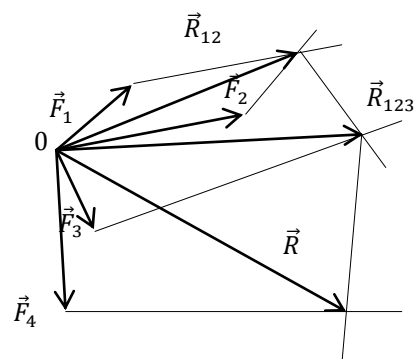
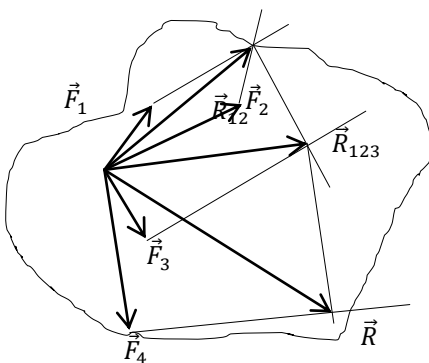
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \vec{R} = [76,60 \vec{i} + 64,28 \vec{j}] + [69,28 \vec{i} - 40 \vec{j}]$$

$$\vec{R} = 145,88 \vec{i} + 24,28 \vec{j}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = 147,88\text{N}$$

**II.3.5 Résultante de plusieurs forces concourantes**

a) On peut faire la somme de plusieurs forces appliquées en un point commun :



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

1^{er} étape : trouver la résultante : $\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

2^{ème} étape : trouver la résultante : $\vec{R}_{123} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3$

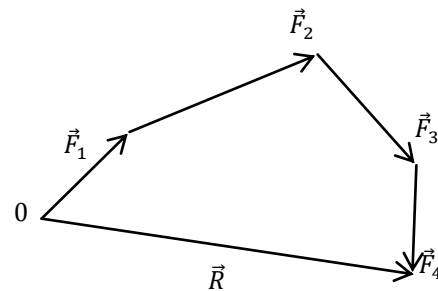
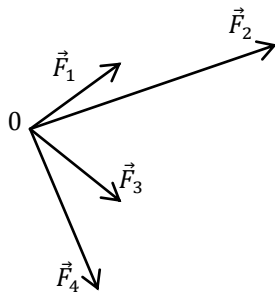
3^{ème} étape : la résultante finale : $\vec{R} = \vec{R}_{123} + \vec{F}_4$

Donc il est clair, qu'en répétant l'application du principe du parallélogramme, on peut déterminer la résultante de n forces agissant en un même point.

Cette opération correspond à la somme vectorielle :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

b) Pour la construction du polygone des forces, on respecte le sens et la direction de chaque force.

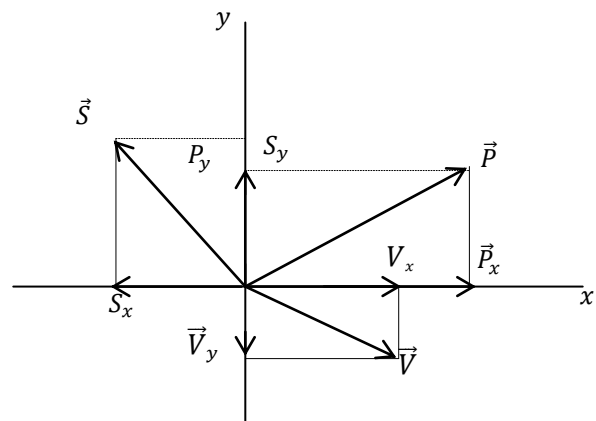
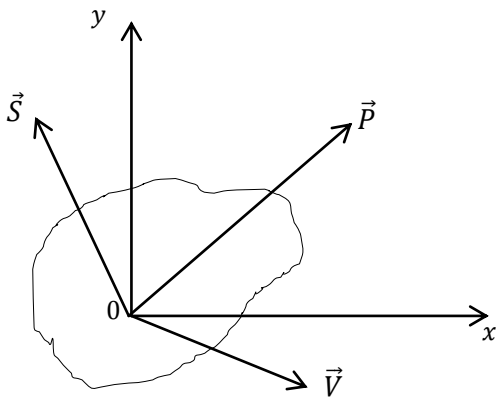


Polygone des forces

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Dans la pratique, la résultante R s'obtient par la méthode des projections suivante :

Choisissons un système d'axes (X,Y) orthonormé et recherchons les composantes ou projection orthogonales de chacune des forces sur ces axes :



La résultante $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{S} + \vec{V}$$

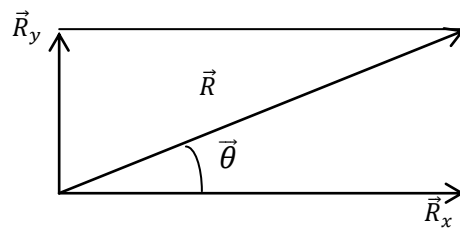
On peut alors faire la somme des composantes sur l'axe :

$$X: R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

$$Y: R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

La grandeur de la résultante R et sa direction sont alors fournies par :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \text{ et } \tan \theta = \frac{R_y}{R_x}$$

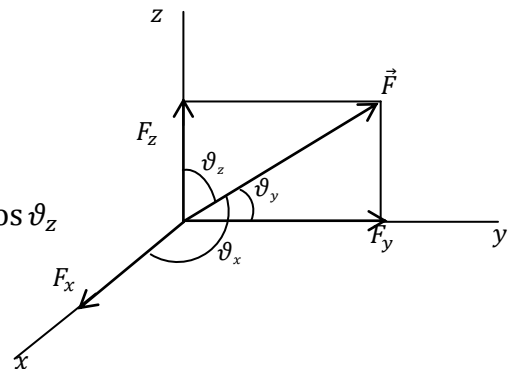


Dans le cas où on peut décomposer une force suivant trois directions (0,X,Y,Z), la force $\vec{F}$ fait les angles $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ respectivement avec les axes x, y, z du système de coordonnées cartésiennes orthogonales Oxyz.

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

$$F_x = \|\vec{F}\| \cos \vartheta_x, \quad F_y = \|\vec{F}\| \cos \vartheta_y, \quad F_z = \|\vec{F}\| \cos \vartheta_z$$

$$\text{D'où le module : } \vec{F} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$



Pour décomposer $\vec{F}$ suivant les trois axes, construisons un parallélépipède dans lequel $\vec{F}$ sera une diagonale.

II.4 classification des actions mécaniques

On appelle action mécanique toute cause physique susceptible :

- De maintenir un corps au repos,
- De créer, de maintenir ou de modifier un mouvement,
- De déformer un corps.

Ces actions sont schématisées ou modélisées par des forces, moments, couples, pressions,...

Il existe deux types d'actions mécaniques :

II.4.1 Actions mécaniques à distance

Ces actions s'exercent sans qu'il y ait contact entre l'acteur et le receveur. Elles agissent donc à travers le vide.

Les actions à distance sont les actions:

- électriques (entre particules chargées)
- magnétiques (une pièce de monnaie en nickel sont attirés à distance par un aimant)
- gravitationnelles (dont fait partie le poids, **Figure II.2**)
- nucléaires (entre les nucléons et les quarks)

Les actions électriques, magnétiques et de pesanteur sont des actions mécaniques à distance. Elles sont réparties dans tout le volume de l'objet.

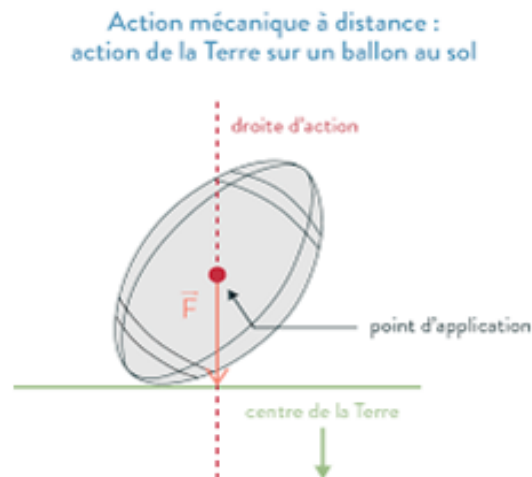


Figure II.2

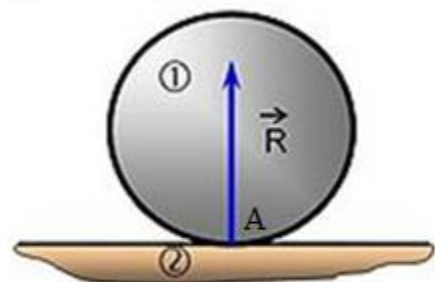
II.4.2 Action mécanique de contact

Les forces de contact sont celles qui s'exercent sur un corps B dès qu'il est en contact avec un corps A. Ces actions nécessitent un contact entre l'acteur et le receveur.

Les actions de contact se divisent en trois groupes :

II.4.2.1 contact ponctuel

Considérons l'action d'une bille (1) sur un plan (2).



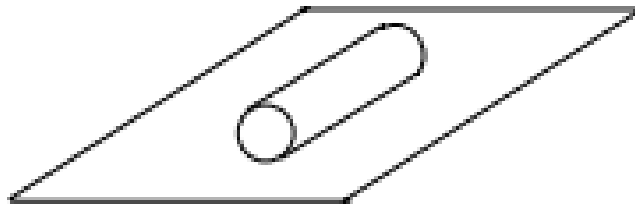
L'action mécanique de contact entre la bille et le plan est concentrée sur un point A et est schématisé par le vecteur $\vec{R} (A_{2/1})$ perpendiculaire au plan de contact (2) et passant par le centre de gravité de la bille.

Exemples

- action de contact de la pointe d'un clou sur une planche en bois
- action d'un des pieds d'une chaise sur le sol sur lequel elle repose.

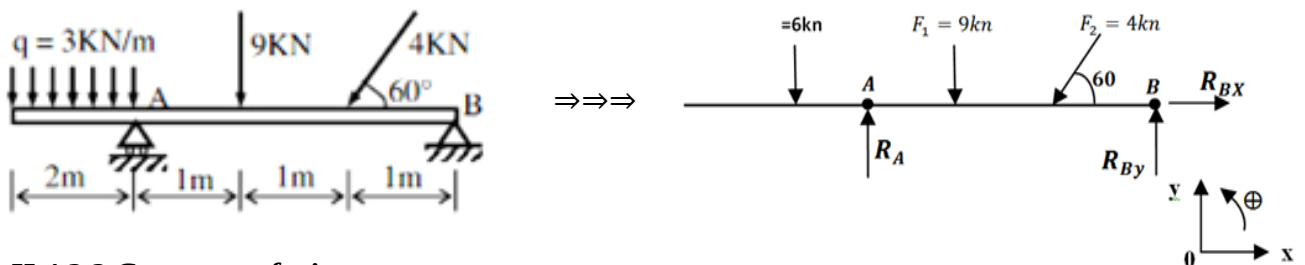
II.4.2.2 Contact linéaire

Considérons l'action d'un cylindre sur un plan horizontal.



L'effort de contact est réparti de façon uniforme le long de AB est schématisé par une charge linéique q (N.m^{-1}). On remplacera cette charge répartie par une action unique concentrée appliquée au milieu du segment AB telle que l'intensité : $Q = q.L$.

Exemple



II.4.2.3 Contact surfacique

Lorsque l'action de contact entre deux solides est concentrée sur une surface, l'action mécanique est schématisée par une pression de contact (N/m^2).

Exemple :

Action du fluide sur le piston d'un vérin (Figure II.3). Dans le cas d'une répartition uniforme du fluide sur le piston, on remplacera l'ensemble des micro-actions par une action unique appliquée au centre de gravité de la surface.

$$\|\vec{F}_{\text{Fluide/Piston}}\| = P.S$$

P: pression du fluide en Pascal (N/mm^2)

S : surface de contact du fluide en m^2

F : résultante des forces de pression en N.

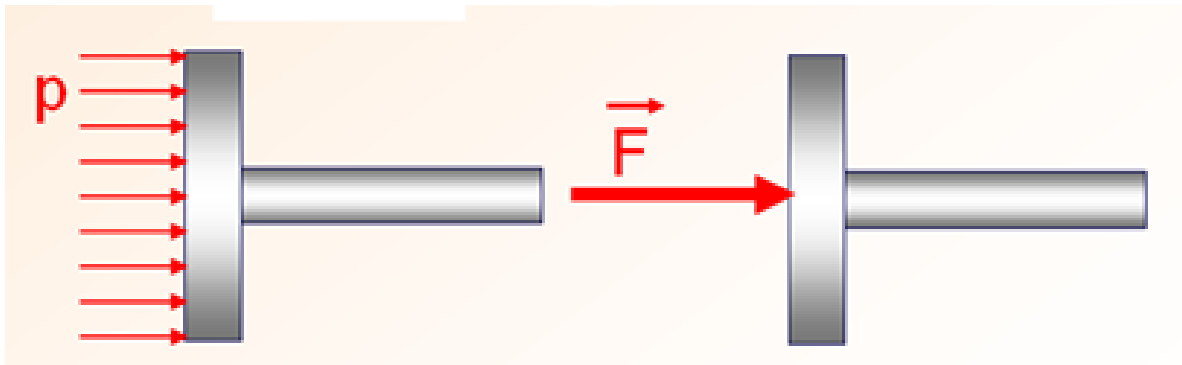
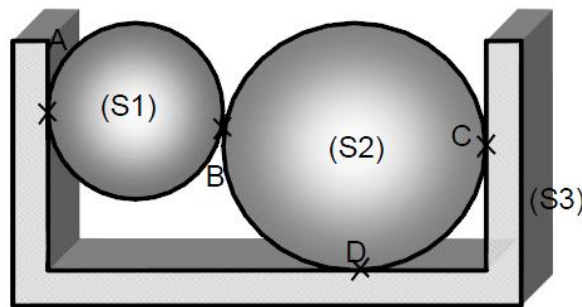


Figure II.3

II.5 Classification des forces

On considère un mécanisme constitué de trois solides.

Soit E l'ensemble constitué par le corps S_1 et S_2 : $E = \{S_1, S_2\}$



Le bilan des **actions mécaniques extérieures** qui agissent sur l'ensemble E s'établit ainsi:

- Poids de l'ensemble E (Action Mécanique à distance : Poids de S_1 et S_2).
- Actions mécaniques de contact exercées par S_3 sur l'ensemble E aux points A, C et D (Actions Mécaniques de contact).

On appelle forces extérieures, toutes les actions exercées par le milieu extérieur sur le système matériel considéré.

Exemple :

- la force $\overrightarrow{F_{3/1}}$ est une force intérieure pour le système : $\{S_3, S_1\}$, $\{S_1, S_2, S_3\}$
- l'action mécanique de S_2 sur S_1 et de S_2 sur S_3 sont des actions mécaniques **intérieures** si on isole $S = \{S_1, S_2, S_3\}$.

On appelle force intérieure toute force exercée par un élément du système matériel considéré sur un autre élément du même système.

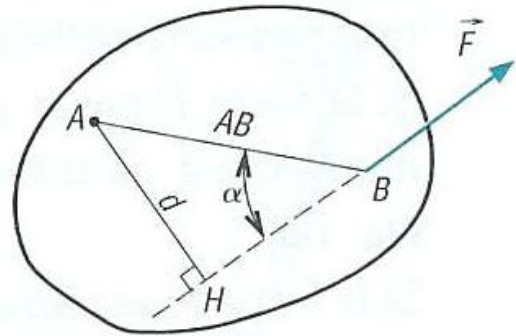
II.6 Notion de moments

Les effets d'une force sur un solide dépendent de la position de la force par rapport au corps. Ils engendrent des translations ou des rotations.

Pour traduire ces phénomènes, on fait appel à la notion de moment.

II.6.1 Moment d'une force par rapport a un point

- soit un repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- Un point A quelconque
- Soit une force $\vec{F}$ appliquée au point B.
- $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \vec{F})$, angle orienté de $\overrightarrow{AB}$ vers $\vec{F}$.

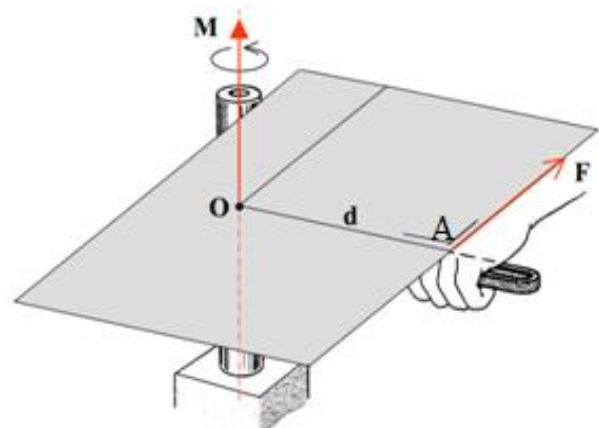
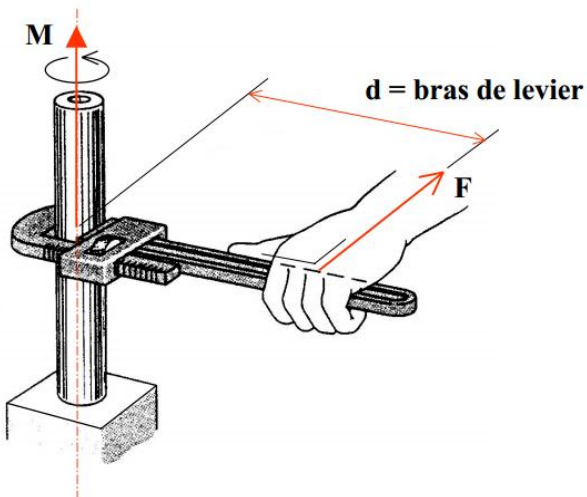


On appelle moment par rapport au point A de la force $\vec{F}$ appliquée au point B, le vecteur défini par : $\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$.

Le moment $\vec{M}_A(\vec{F})$ est un vecteur ayant toutes les propriétés d'un produit vectoriel (Figure II.4) :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = F \cdot AB \cdot (\sin \alpha) = F \cdot d$$

Unité: N.m (Newton mètre)



$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

Figure II.4

Remarque :

- En fonction du repère choisi, si l'effort tend à faire tourner dans le sens trigonométrique, le moment sera de signe positif.

- D'après les propriétés du produit vectoriel, le vecteur moment est perpendiculaire à la fois à la force $\vec{F}$ et au vecteur $\vec{AB}$.

Son sens est donné par la règle des trois doigts (de la main droite, Figure II.5) :

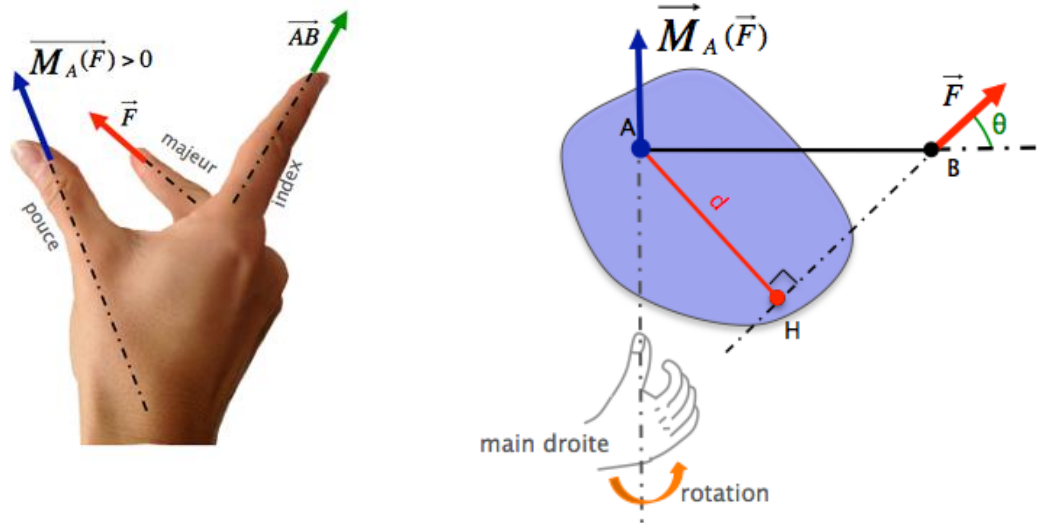
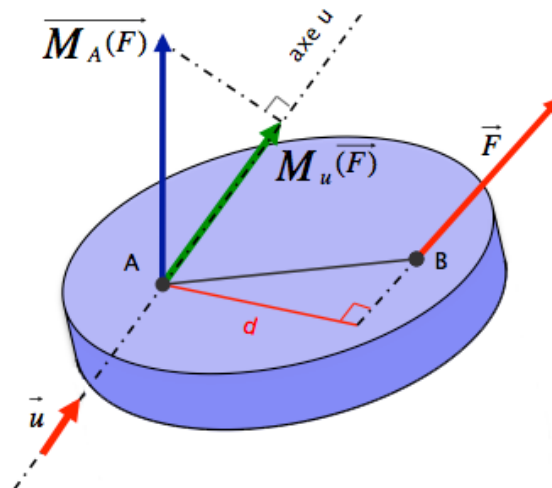


Figure II.5

II.6.2 Moment d'une force par rapport à un axe

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe défini par le vecteur unitaire $\vec{u}$, est égal au produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur moment en A de la force $\vec{F}$, où A est un point quelconque de l'axe (u) : $M_u(\vec{F}) = \vec{u} \cdot \vec{M}_A(\vec{F})$.

C'est donc une grandeur scalaire, dont le signe dépend du sens de rotation du solide par rapport à l'axe (u).

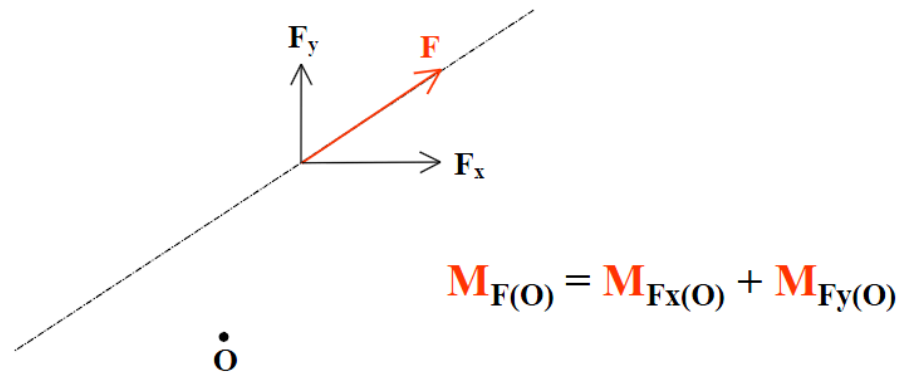


On peut remarquer que ce **moment** sera **nul** si l'axe (u) est **parallèle à la force $\vec{F}$** (le vecteur moment étant perpendiculaire à la force, donc à $\vec{u}$, et le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires étant nul), ou si l'axe (u) est **concourant avec la ligne d'action**

de la force $\vec{F}$ (dans ce cas, si on prend comme point A le point d'intersection des deux directions, le vecteur moment de la force $\vec{F}$ en A sera nul).

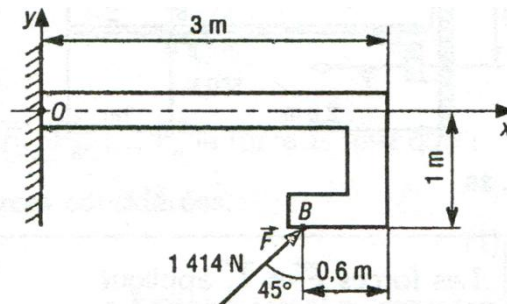
II.6.3 Théorème de VARIGNON

Le moment, par rapport à un point, d'une force est égal à la somme des moments, par rapport à ce point, des composantes de cette force.



Exemple

Calculer le moment en O de la force $\vec{F}$ agissant au point B.



Solution :

$$F=1414\text{N}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{F})/O} = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}$$

$$\overrightarrow{OB} = 2,4 \vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{F} = F \sin 45^\circ \vec{i} + F \cos 45^\circ \vec{j} \Rightarrow \vec{F} = 999,85 \vec{i} + 999,85 \vec{j}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{F})/O} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 999,85 \\ 999,85 \\ 0 \end{pmatrix} \approx 3400 \vec{k}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{F})/O} = 3400 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Exemple

Dans un repère orthonormé, deux points A et B ont pour coordonnées :

A(2, 2, -3) et B(5, 3, 2) ; Déterminer :

- 1) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport au centre O du repère ;
- 2) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport à la droite Δ passant par le point O et le point C(2, 2, 1)

Solution :

A (2, 2, -3) ; B(5, 3, 2)

- 1) le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au centre O du repère

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 13\vec{i} - 19\vec{j} - 4\vec{k}$$

- 2) le moment du $\overrightarrow{AB}$ par rapport a la droite (Δ) passant par le point O et le point C (2 2 1).

$$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}_\Delta = \left[\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}_O \cdot \vec{U} \right] \cdot \vec{U}$$

Tel que $\vec{U}$ vecteur unitaire qui donne la direction de la droite (Δ) définie par le point O et le point C :

$$\vec{U} = \frac{\overrightarrow{OC}}{OC} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{3} \Rightarrow \vec{U} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}_\Delta = [13\vec{i} - 19\vec{j} - 4\vec{k}] \cdot \left[\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k} \right] \vec{U}$$

$$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}_\Delta = -\frac{16}{3}\vec{U}$$

CHAPITRE III

STATIQUE

III.1 Axiomes de la statique

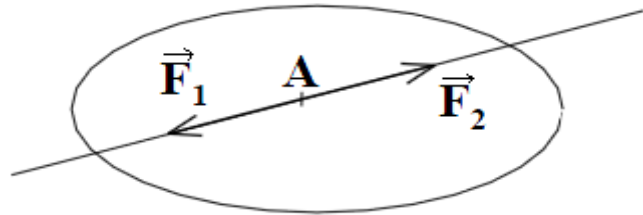
III.1.1 Axiome 1 : Principe d'équilibre

Soit deux forces appliquées à un solide

$F_1 = F_2$: même module

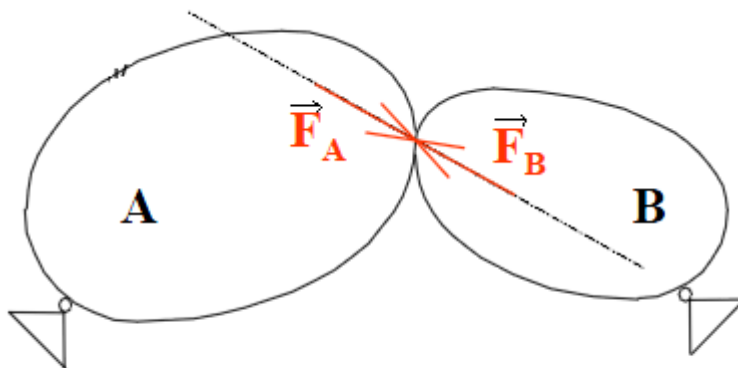
Même direction

De sens opposé.



Un système de forces est dit « à l'équilibre » si, appliqué à un corps, il ne modifie pas l'état de repos ou de mouvement de ce corps.

III.1.2 Axiome 2 : Principe de l'action et de la réaction

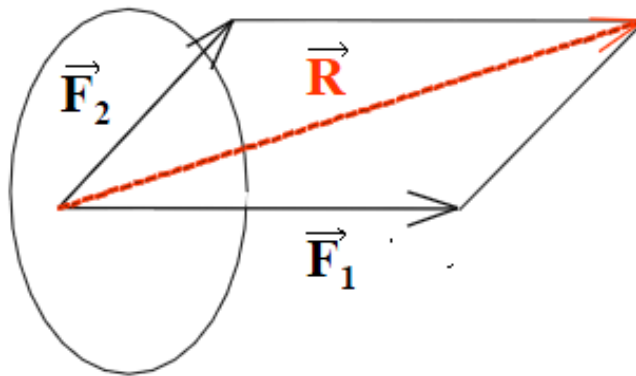


Les forces exercées par deux solides l'un sur l'autre sont toujours de même module, de même direction et de sens opposé.

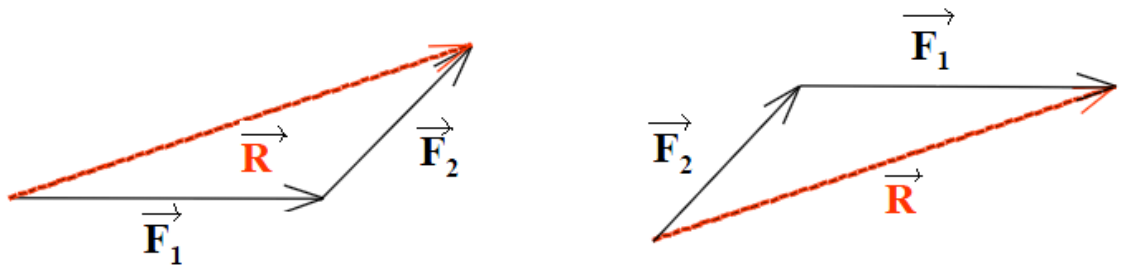
$F_A = -F_B$:

- Même support ;
- Même grandeur ;
- Sens opposé.

III.1.3 Axiome 3 : Principe de parallélogramme



$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$: La résultante de deux forces.



$\vec{R}$ s'obtient graphiquement ou par les formules des triangles quelconques.

La résultante de deux forces appliquées à un même point du solide a son point d'application en ce même point ; son module et sa direction sont déterminés par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces (Règle du parallélogramme).

III.2 Lisons, appuis et réactions

Dans la mécanique, on dit solide libre ou lié :

- Libre $\longrightarrow$ il peut se déplacer en toute direction
- Liés $\longrightarrow$ ne peut se déplacer que dans des directions déterminées.

La liaison : tout ce qui limite le déplacement d'un corps dans l'espace et les forces qu'ils exercent sur le solide, sont des réactions de liaisons.

III.2.1 Différents types des liaisons

III.2.1.1 Liaison ponctuelle et appui plan (appui simple)

Pour un solide repose simplement sur une surface parfaitement lisse (horizontale, verticale ou inclinée, Figure III.1 (a, b)) ou sur le rouleau cylindrique (Figure III.1c), la réaction de

la surface est appliquée au solide en point de contact et dirigée suivant la normale à la surface d'appui. Elle s'appelle réaction normale et se note $\vec{R}$.

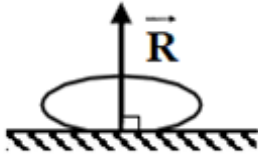


Figure III.1 a

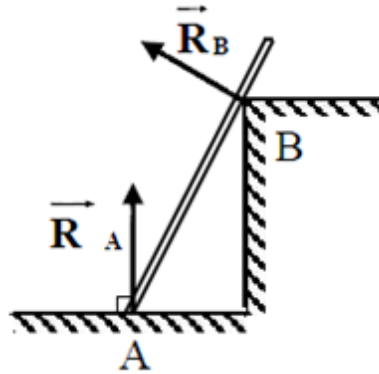


Figure III.1 b

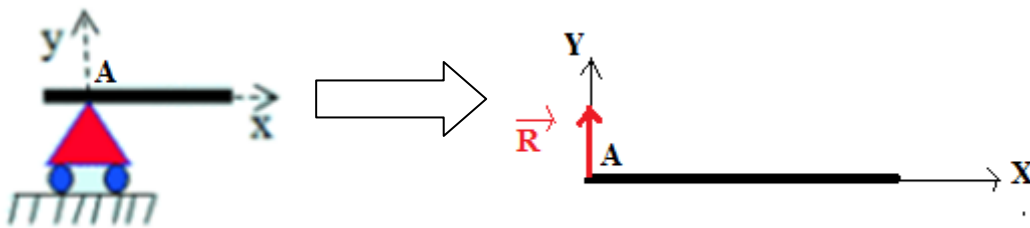


Figure III.1 c

La réaction d'appui en A, B sont perpendiculaires au plan de contact, seule son intensité suivant A_y est inconnue.

Appui simple est représenté par un triangle avec deux rouleaux. La pointe du triangle symbolise le fait qu'est l'appui ponctuel. Les deux rouleaux signifient que se dernier est glissant.

III.2.1.2 Articulation d'un solide

Dans la pratique, on trouve parfois le corps solide articulé soit par :

- un appui articulé (Figure III.2 a), il est caractérisé par deux inconnues de liaison : R_x , R_y ,
- une articulation cylindrique (liaison pivot glissant, liaison linéaire annulaire) (Figure III.2 b), il est caractérisé par deux inconnues de liaison : R_x , R_y ,
- ou une articulation sphérique (liaison rotule) (Figure III.2 c), il est caractérisé par trois inconnues de liaison : R_x , R_y , R_z .

Le module et la direction de la réaction $\mathbf{R}$ dans son plan sont inconnus.

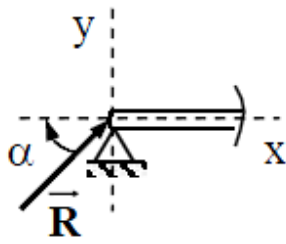


Figure III.2 a

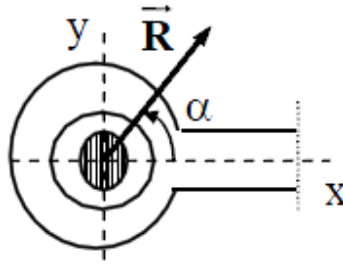


Figure III.2 b

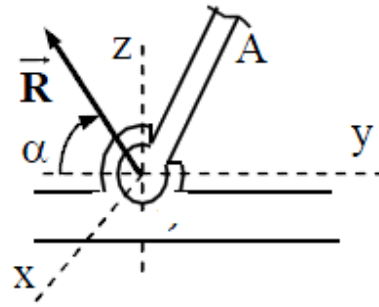
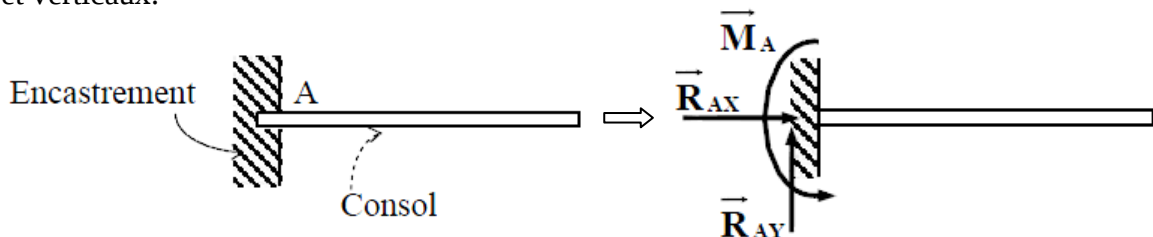


Figure III.2 c

III.2.1.3 Liaison Encastrement

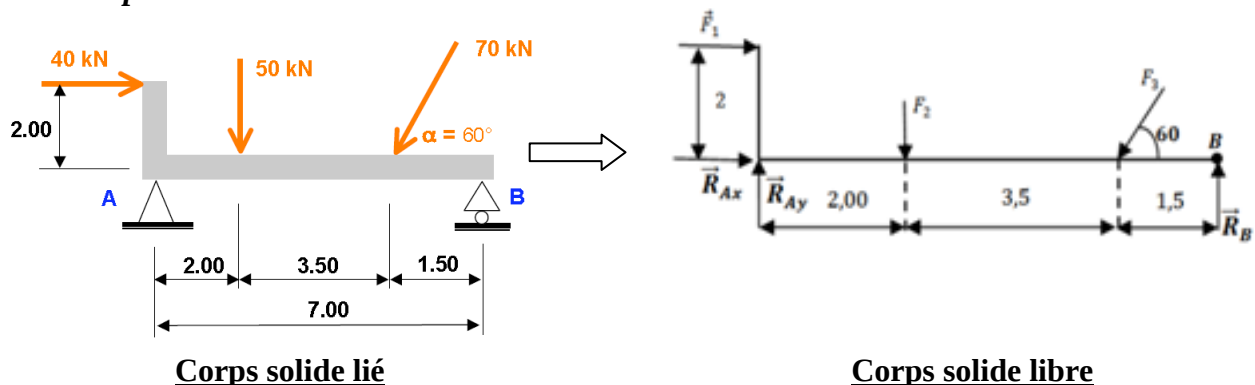
La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre les deux solides. Leurs réactions sont représentées par un moment qui empêche la rotation du solide ($\vec{M}_A$), et des réactions horizontale ($\vec{R}_{AX}$) et verticale ($\vec{R}_{AY}$), qui empêchent les déplacements horizontaux et verticaux.



III.3 Axiome des liaisons

Lors d'une étude analytique d'un corps solide lié, il est possible de supprimer les liaisons en les remplaçant par les réactions et, de lui considérer comme un corps solide libre soumis à l'action des forces données et des réactions de liaisons.

Exemple



Calculer les réactions d'appuis de la poutre ci-dessus :

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0} \dots \dots \dots (I)$$

La projection (xx') :

$$F_1 - F_3 \cos 60 + R_{AX} = 0 \Rightarrow R_{AX} = F_3 \cos 60 - F_1 \Rightarrow R_{AX} = -5\text{kN}$$

La projection (yy') :

$$R_{Ay} - F_2 - F_3 \sin 60 + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = F_2 + F_3 \sin 60 \dots \dots \dots (1)$$

On a deux inconnues : R_{Ay} et R_{By}

$$\sum_i \overline{M(\vec{F}_{\text{ext}})}_A = \vec{0} \Rightarrow R_{By} \cdot 7 - F_3 \sin 60 \cdot 5,5 - F_2 \cdot 2 - F_1 \cdot 2 = 0 \dots \dots \dots (II)$$

$$\Rightarrow R_{By} \cdot 7 = F_2 \cdot 2 + F_1 \cdot 2 + F_3 \sin 60 \cdot 5,5 \Rightarrow R_{By} = 73,6\text{KN}$$

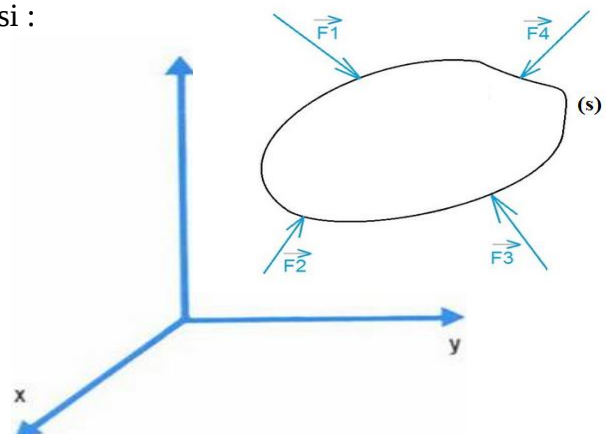
$$(1) : R_{Ay} = 37,4\text{KN}$$

Nous représentons dans le tableau ci dessous les différents types d'appuis et de liaisons et les composantes des réactions associées à celles-ci.

Type de liaisons	Composantes de la réaction
Appui simple rouleau ou Surface lisse sans frottement :	$\vec{R}$: la réaction est normale au point d'appui.
Appui simple avec frottements	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$: deux composantes dans le plan de contact
Articulation cylindrique d'axe Oz	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$ avec $\vec{R}_z = \vec{0}$; La composante suivant l'axe de l'articulation est nulle
Articulation sphérique	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$: trois composantes
Encastrement	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ et $\vec{M}_A$ trois composantes plus le moment au point d'encastrement.

III.4 Principe fondamental de la statique

Le solide (S) reste en équilibre sous l'action de n forces extérieures (des actions mécaniques extérieures : $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots \dots \vec{F}_n$) si :



a) $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext} = 0$, la somme vectorielle des n forces est nulle.

b) $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{M_O(\vec{F}_{ext})}$, le moment résultant des n forces en n'importe quel point de l'espace est nul.

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{M_O(\vec{F}_{ext})} = \overrightarrow{M_O(\vec{F}_1)} + \overrightarrow{M_O(\vec{F}_2)} + \overrightarrow{M_O(\vec{F}_3)} + \dots + \overrightarrow{M_O(\vec{F}_n)} = \vec{0}$$

III.4.1 Cas des forces quelconques

Soit un repère orthonormé R(O, XYZ), La projection des forces sur les axes :

$$\text{Soit } \vec{F}_1 \begin{cases} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{cases} \quad \vec{F}_2 \begin{cases} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{cases} \quad \vec{F}_3 \begin{cases} F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{3z} \end{cases}$$

Le principe fondamental de la statique se traduit, dans le cas le plus général par les 6 équations scalaires.

- Trois équations liées à la résultante des forces extérieures :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases}$$

Et, trois équations liées au moment des forces par rapport aux axes du repère :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_{Ox} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{ix}(\vec{F}_i) = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oy} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iy}(\vec{F}_i) = \vec{0} \\ \vec{M}_{Oz} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iz}(\vec{F}_i) = \vec{0} \end{cases}$$

III.4.2 Cas des forces concourantes

Dans le cas d'un système de forces concourantes au centre **O** (les forces passent toutes par le même point O), le moment sera nul par rapport à O, il reste seulement trois équations pour la projection de la résultante:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases}$$

III.4.3 Cas des forces planes

Dans le cas d'un problème plan (par exemple X et Y), on aura trois équations d'équilibre.

- Deux équations liées à la résultante statique :

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{0} \end{cases}$$

- Et une équation pour le moment des forces par rapport au centre O : $\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}$

III.5 Frottement

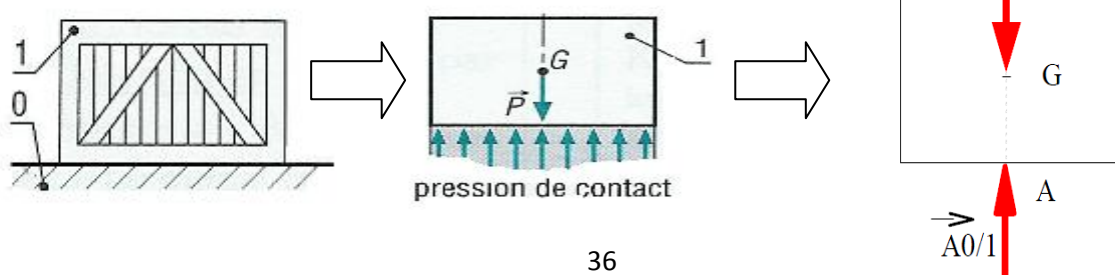
III.5.1 Notion de frottement

Si deux surfaces se déplacent ou glissent l'une par rapport à l'autre, on dit qu'il y a **frottement**.

Si deux surfaces tendent à glisser mais ne se déplacent pas, on dit qu'il y a **adhérence**.

Exemple : Considérons une caisse sur un plan horizontal.

Premier cas du repos :



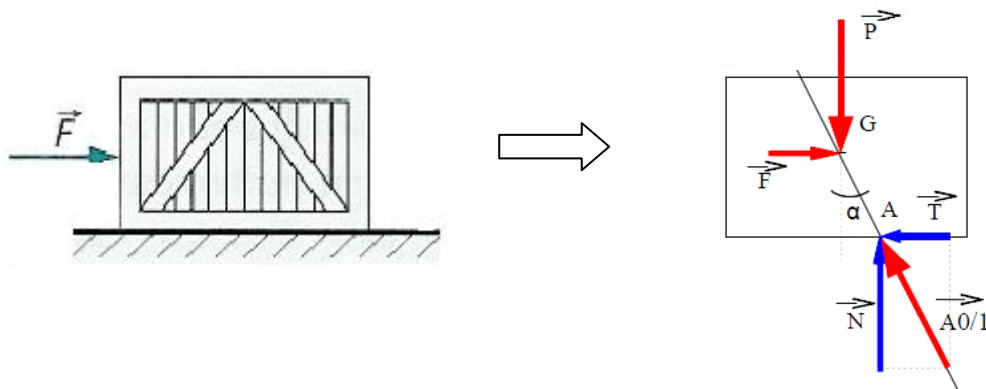
L'action de contact entre deux solides est concentrée est schématisée par une pression de contact (N/m^2). On remplacera l'ensemble des micro-actions par une action unique appliquée au centre de gravité sur une surface, l'action mécanique de la surface ($\overrightarrow{A_{0/1}}$).

La caisse est au repos, sous l'action de deux forces, $\vec{P}$ et $\overrightarrow{A_{0/1}}$.

La caisse reste en équilibre tel que La réaction du plan horizontal est égale et opposée au poids de la pièce. : $\vec{P} + \overrightarrow{A_{0/1}} = \vec{0} \implies \vec{P} = - \overrightarrow{A_{0/1}}$

Deuxième cas de l'adhérence

Maintenant on exerce une force $\vec{F}$ horizontale. Cette force est très petite pour déplacer la caisse.



La caisse reste toujours en équilibre statique sous l'action de trois forces : $\vec{F}$, $\vec{P}$ et $\overrightarrow{A_{0/1}}$.

La caisse ne bougera pas tant que la force $\vec{F}$ est inférieure à une certaine valeur limite. Il existe alors une contre force $\vec{T}$ qui équilibre et s'oppose à cette force $\vec{F}$. $\vec{T}$ est appelée force de frottement statique.

Donc, L'action $A_{0/1}$ s'incline d'un angle α . La composante T s'oppose à F, la composante N s'oppose à P.

$$\tan \alpha = \frac{T}{N} \implies T = \tan \alpha \cdot N \implies T = \mu \cdot N$$

T : force de frottement statique

μ : Coefficient de frottement statique

Cette force de frottement statique obéit à la variation représentée sur la figure suivante.

Si μ est le coefficient de frottement statique (*dépend uniquement de la nature des surfaces de contact*) nous pouvons écrire :

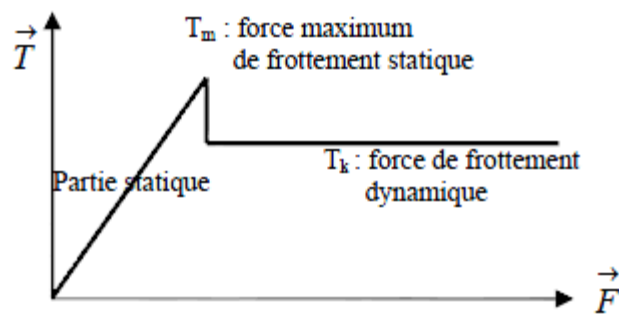


Figure III.3

- Pour que l'équilibre statique soit réalisable il faut que : $|\vec{T}| < \mu |\vec{N}|$
- A l'équilibre limite on aura : $|\vec{T}| = \mu |\vec{N}|$

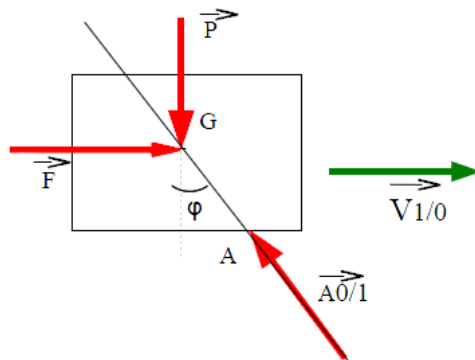
On augmente l'intensité de l'action F , la valeur de T augmente donc. L'angle α augmente également, pour atteindre une valeur limite $\alpha = \varphi$.

On dit qu'il y a alors équilibre strict. La caisse ne se déplace pas.

- Si $|\vec{F}| > |\vec{T}_m|$: On augmente encore l'intensité de la force $\vec{F}$.

La caisse se met en mouvement. Donc l'effort F est suffisant pour vaincre l'adhérence.

Le problème n'est plus statique, mais dynamique.



Le vecteur vitesse $\vec{V}_{1/0}$ caractérise la **vitesse de glissement** de la caisse 1 par rapport au plan 0. Ce vecteur est contenu dans le plan tangent au contact.

$$|\vec{T}| = k |\vec{N}| \quad \text{avec } k < \mu \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{|\vec{T}|}{|\vec{N}|} = k$$

Ce coefficient k indépendant du temps est appelé coefficient de frottement dynamique, il est aussi indépendant de la vitesse.

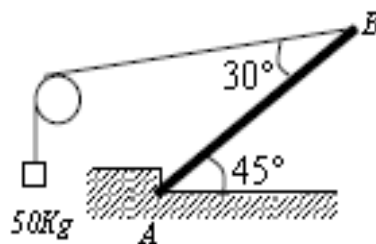
Ce tableau reprend quelques coefficients de frottement statiques et dynamiques des surfaces de matériaux en contact :

	Coefficient de frottement statique μ_0		Coefficient de frottement dynamique k
Acier / Acier	Mouillé	0.1	0.05
	A sec	0.6	0.4
Bois / Bois	Mouillé	0.5	0.3
Métal / glace		0.03	0.01
Téflon / Acier		0.04	0.04
Cuivre / Acier	A Sec	0.5	0.4

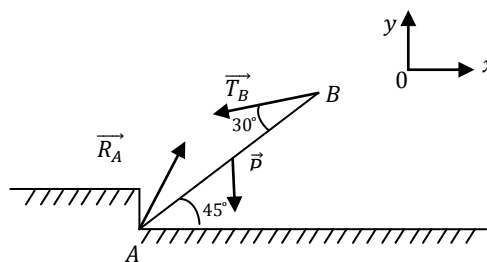
Exemple 1

On maintient une poutre en équilibre statique à l'aide d'une charge **P** suspendue à un câble inextensible de masse négligeable, passant par une poulie comme indiqué sur la figure. La poutre a une longueur de **8m** et une masse de **50 Kg** et fait un angle de **45°** avec l'horizontale et **30°** avec le câble.

Déterminer la tension dans le câble ainsi que la grandeur de la réaction en **A** ainsi que sa direction par rapport à l'horizontale.



Solution :



$$L = 8\text{m} ; m = 50\text{kg}$$

Déterminer T_B et R_A

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{P} + \vec{T}_B = \vec{0} \dots \dots \dots (I)$$

La projection sur les axes :

$$(x \ x') : R_{Ax} - T_B \cos 15 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$(y \ y') : R_{Ay} - T_B \sin 15 = P \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum_i \overrightarrow{M(\vec{F}_{ext})}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{M(\vec{P})}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{T}_B)}_{/A} = \vec{0} \dots \dots \dots (II)$$

$$(II) : \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_B = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T_B \cos 15 \\ -T_B \sin 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2\sqrt{2}P - 4\sqrt{2} T_B \sin 45 + 4\sqrt{2} T_B \sin 45 = 0$$

$$\text{Donc : } T_B = \frac{P}{2(\cos 15 - \sin 15)} \dots \dots \dots (3)$$

$$A.N : T_B = 346,89N$$

En remplaçant l'expression (3) dans (1) et (2) :

$$R_{Ax} = \frac{P \cos 15}{2(\cos 15 - \sin 15)} \Rightarrow R_{Ax} = 335N$$

$$R_{Ay} = \frac{P \sin 15}{2(\cos 15 - \sin 15)} + P \Rightarrow R_{Ay} = 580,28N$$

$$R_A = 670N$$

Exemple 2

Un mât vertical de poids négligeable est soumis à une force horizontale F de 4 KN (parallèle à l'axe y) et est maintenue à la vertical par deux câbles BC et BD et par une liaison rotules (sphérique) en A.

- 1) Exprimer vectoriellement la force F et les deux tensions T_{BC} et T_{BD} agissant sur le mât en fonction de i, j et k.
 - 2) Ecrire l'équation vectorielle exprimant la première condition d'équilibre du mât désignant une résultante nulle. Déduire les équations projetées selon les trois axes x, y et z.
 - 3) Déterminer les vecteurs moments par rapport à A de F, T_{BC} et T_{BD} .
 - 4) Donner les équations d'équilibre, projetées selon les trois axes, caractérisant un moment résultants nul.
 - 5) Déduire les deux tensions T_{BC} et T_{BD} ainsi que la réaction R_A .
- on donne B (0, 0, 6) ; C(-4,0, 0) ; D(3, 3, 1) ; G(0, 0, 3)

Solution :

$$F = 4 \text{ KN}$$

$$B(0 \ 0 \ 6); C(-4 \ 0 \ 0); D(3 \ 3 \ 1); G(0 \ 0 \ 3)$$

Liaison sphérique En A: R_{Ax} ; R_{Ay} ; R_{Az}

1) Exprimer vectoriellement la force F et T_{BC} ; T_{BD}

$$\vec{F} = -F\vec{j}$$

$$\vec{T}_{BC} = T_{BC} \cdot \vec{U}_{BC}$$

$\vec{U}_{BC}$: Vecteur unitaire qui donne la direction de $\vec{T}_{BC}$

$$\vec{U}_{BC} = \frac{\vec{BC}}{BC} = \frac{-4\vec{i} - 6\vec{k}}{\sqrt{16+36}} = -0,447\vec{i} - 0,894\vec{k}$$

$$\vec{T}_{BC} = T_{BC} (-0,447\vec{i} - 0,894\vec{k})$$

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD} \cdot \vec{U}_{BD}$$

$$\vec{U}_{BD} = \frac{\vec{BD}}{BD} = \frac{3\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}}{\sqrt{9+9+25}} = 0,458\vec{i} + 0,458\vec{j} - 0,763\vec{k}$$

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD} (0,458\vec{i} + 0,458\vec{j} - 0,763\vec{k})$$

2) les équations d'équilibre :

La barre en équilibre statique : $\sum_i \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

$$\vec{F} + \vec{T}_{BD} + \vec{T}_{BC} + \vec{R}_A = \vec{0}$$

$$\begin{cases} R_{Ax} - 0,447T_{BC} + 0,458T_{BD} = 0 \dots\dots\dots (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Ay} - F + 0,458 T_{BD} = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Az} - 0,894 T_{BC} - 0,763 T_{BD} = 0 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

Déterminer les vecteurs moments par rapport à A :

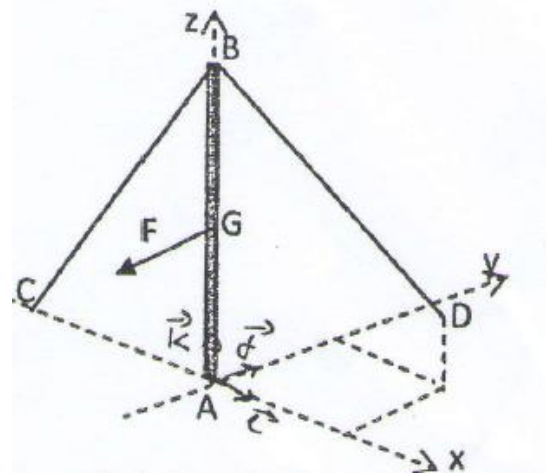
$$\overrightarrow{M(\vec{F})}_{/A} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{F})}_{/A} = 3F\vec{i}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BC})}_{/A} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0,447 T_{BC} \\ 0 \\ 0,894 T_{BC} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BC})}_{/A} = 2,682 T_{BC}\vec{j}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BD})}_{/A} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0,458 T_{BD} \\ 0,458 T_{BD} \\ -0,763 T_{BD} \end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BD})}_{/A} = -2,748 T_{BD} \vec{i} + 2,748 T_{BD} \vec{j}$$

4) Donner les équations d'équilibre, projetées selon les trois axes, caractérisant un moment résultant nul.

$$\overrightarrow{M(\vec{F}_{ext})}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{M(\vec{F})}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{T}_{BC})}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{T}_{BD})}_{/A} = 0$$

$$\begin{cases} 3F - 2,748 T_{BD} = 0 \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,748 T_{BC} + 2,748 T_{BD} = 0 \dots\dots\dots (5) \end{cases}$$

5) Dédurre les deux tensions T_{BC} et T_{BD} ainsi que la réaction R_A

$$(4): T_{BD} = \frac{3}{2,748} F \Rightarrow T_{BD} = 1,09F$$

$$T_{BD} = 4,37 \text{ kN}$$

$$T_{BC} = \frac{2,748}{2,682} T_{BD} \Rightarrow T_{BC} = 1,02 T_{BD} \Rightarrow T_{BC} = 4,48 \text{ kN}$$

$$(1): R_{Ax} = 0,447 T_{BC} - 0,458 T_{BD} \Rightarrow R_{Ax} \simeq 0$$

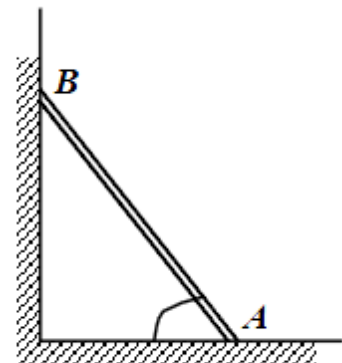
$$(2): R_{Ay} = -F + 0,458 T_{BD} \Rightarrow R_{Ay} = 2 \text{ kN}$$

$$(3): R_{Az} = 0,894 T_{BC} - 0,763 T_{BD} \Rightarrow R_{Az} = 0,671 \text{ kN}$$

Exercice

Une échelle de longueur **20 m** pesant **400 N** est appuyée contre un mur parfaitement lisse en un point situé à **16 m** du sol. Son centre de gravité est situé à **1/3** de sa longueur à partir du bas. Un homme pesant **700 N** grimpe jusqu'au milieu de l'échelle et s'arrête. On suppose que le sol est rugueux et que le système reste en équilibre statique.

Déterminer les réactions aux points de contact de l'échelle avec le mur et le sol.



Problème

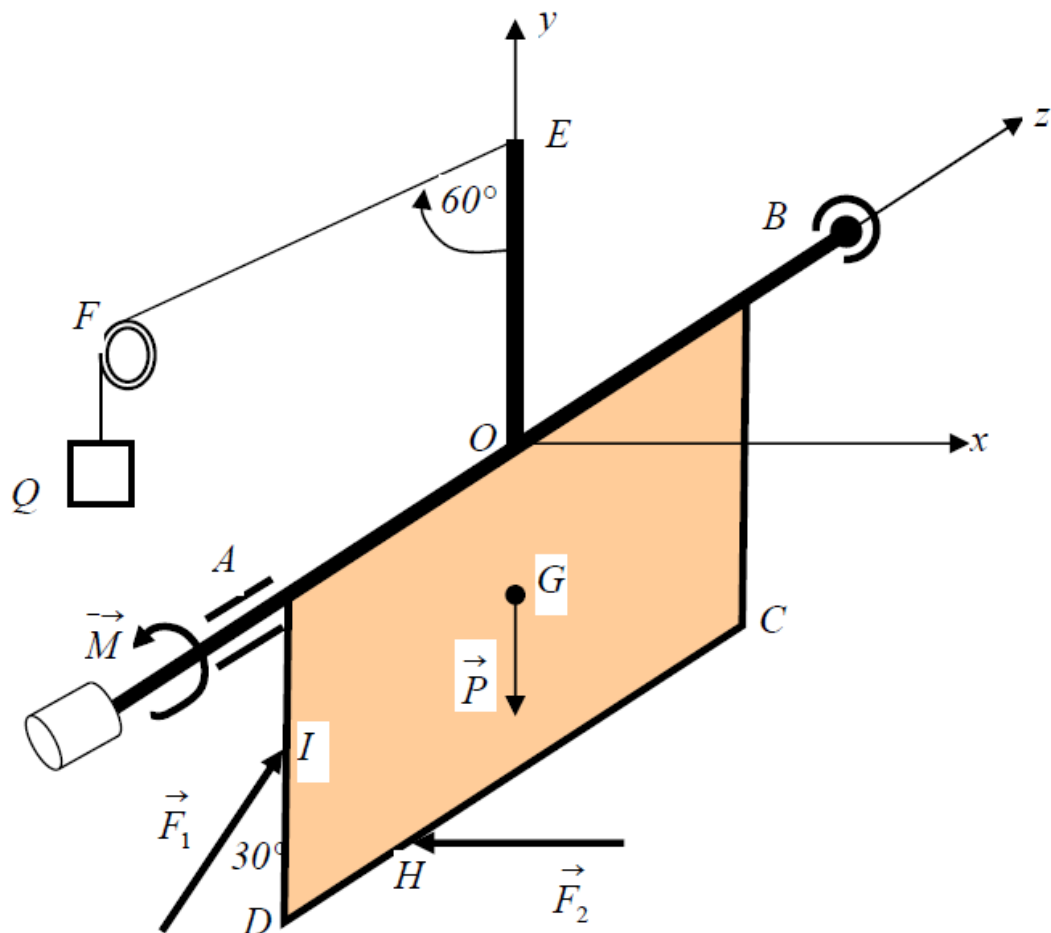
Un clapet de régulation de débit hydraulique est constitué d'une plaque rectangulaire homogène ABCD de poids $\vec{P}$, soudée à une tige OE de masse négligeable. Le système est soumis aux actions des articulations cylindrique en **A**, sphérique en **B**, d'un câble au point **E** auquel est accrochée une charge **Q** et à deux forces $\vec{F}_1$, dans le plan de la plaque en **I** (milieu de **AD**), et $\vec{F}_2$ en **H**, parallèle à l'axe **(Ox)**.

Ce système est en équilibre statique dans la position indiquée sur la figure ci-dessous, à l'aide d'un moteur qui développe un couple de moment $\vec{M}$.

(La plaque est dans le plan (yoz) et le câble EF appartient au plan (xoz).

On donne : **AB = DC = 2a**; **AD = BC = OE = a**, **DH = a/2**, **Q = P/3**, **F1 = 2P**, **F2 = 4P**

- 1) Donner les coordonnées des points: A, B, E, G, H, I ;
- 2) Ecrire les équations d'équilibre statique du système;
- 3) Déterminer en fonction de **a** et **P** les réactions aux points **A** et **B** ainsi que le moment **M**.



CHAPITRE IV

GEOMETRIE DES MASSES

IV.1 Introduction

Le chapitre quatre concerne les notions purement géométrique :

- Masse
- Centre de masse
- Moment d'inertie

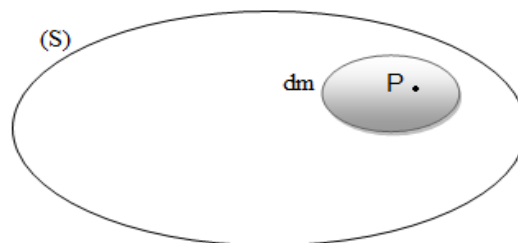
L'intérêt de ces trois grandeurs apparaîtra en cinétique et en dynamique.

IV.2 Systèmes matériels

On appelle système de points matériels ou système matériels une quantité de matière, homogène ou non, dont la masse reste constante pendant son étude. La masse est une grandeur scalaire positive.

IV.2.1 Système continu

Si le système est constitué d'un ensemble continu de masses, la masse du système s'écrirait sous la forme suivante :



(S) est un ensemble matériel si à tout points $P \in (S)$ on associe la grandeur $\rho(P)$ telle que :

$$\rho(P) = \frac{dm(P)}{dv(P)} \quad \text{où}$$

$\rho(P)$: densité spécifique

$dv(P)$: volume élémentaire entourant (P)

$dm(P)$: la masse de l'élément de matière occupant le volume dv .

Donc la masse de (S) est alors : $m = \int_{P \in S} dm(P)$

IV.2.1.1 Expression de la masse suivant la nature du domaine

- a) (S) est un volume (Exemple : ballon)

$$\mathbf{M} = \iiint_{(v)} \rho(\mathbf{P}) d\mathbf{v}$$

$\rho(\mathbf{P})$ est la masse volumique au point P et $d\mathbf{v}$ un élément de volume du solide (S).

b) (S) est une surface, le cas d'une plaque fine d'où l'épaisseur est négligeable.

$$\mathbf{M} = \iint_S \sigma(\mathbf{P}) d\mathbf{s}$$

$\sigma(\mathbf{P})$ est la densité surfacique au point P et $d\mathbf{s}$ un élément de surface du solide (S).

c) (S) est une ligne, le cas d'une ligne matériel (tige fine)

$$\mathbf{M} = \int_L \lambda(\mathbf{P}) d\mathbf{l}$$

$\lambda(\mathbf{P})$ est la densité linéique au point P et $d\mathbf{l}$ un élément de longueur du solide (S).

Remarque : dans les systèmes homogènes (solides homogènes) la densité des solides est constante.

IV.2.2 Système discrets

La masse d'un système constitué de n points matériels de masse $\mathbf{m}_i$ est la somme des masses :

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i$$

IV.3 Centre de masse d'un système matériel

IV.3.1 Détermination du centre d'inertie de corps simple

IV.3.1.1 Définition

On appelle centre d'inertie d'un système matériel (S) le point G par la relation :

$$\int_{\mathbf{P} \in (S)} \overrightarrow{\mathbf{GP}} d\mathbf{m} = \vec{0}$$

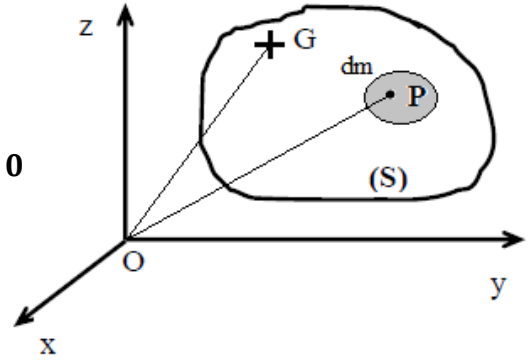
Soit un repère orthonormé (O, xyz)

dm : élément de masse au point P

$$\int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0} \Rightarrow \int (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) dm = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \int \overrightarrow{GO} dm + \int \overrightarrow{OP} dm = \vec{0}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{OG} = \frac{\int \overrightarrow{OP} dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int \overrightarrow{OP} dm$$



$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \int \overrightarrow{OP} dm$$

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Les coordonnées du centre d'inertie G d'un système homogène sont donc exprimées par :

$$X_G = \frac{1}{M} \int_{P \in (S)} x dm \quad Y_G = \frac{1}{M} \int_{P \in (S)} y dm \quad Z_G = \frac{1}{M} \int_{P \in (S)} z dm$$

Remarque :

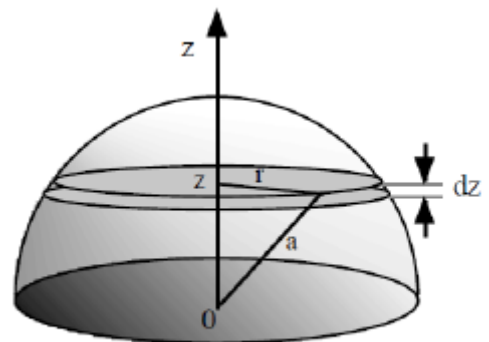
- Si un solide homogène présente un centre de symétrie, alors ce centre de symétrie est le centre d'inertie.
- Si un solide homogène présente un axe de symétrie, alors le centre d'inertie appartient à cet axe de symétrie.
- Si un solide homogène présente un plan de symétrie, alors le centre d'inertie appartient à ce plan de symétrie.

IV.3.1.2 Exemple d'application

a) Soit (S) un volume

Exemple :

Déterminer la position du centre d'inertie d'une demi-sphère homogène (pleine) de rayon R.



Par raison de symétrie le centre de masse se trouve sur l'axe OZ. Donc $x_G = y_G = 0$

$$Z_G = \frac{1}{M} \int z dm = \frac{\int z dv}{V}$$

L'équation d'une demi-sphère est : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ donc $x^2 + y^2 = R^2 - z^2$ tel que $r^2 = x^2 + y^2$

$$dv = S \cdot dz \Rightarrow dv = \pi r^2 dz \Rightarrow dv = \pi(R^2 - z^2) dz$$

$$Z_G = \frac{\int_0^R \pi(R^2 - z^2) dz}{\frac{2}{3}\pi R^3} \Rightarrow Z_G = \frac{3}{8}R$$

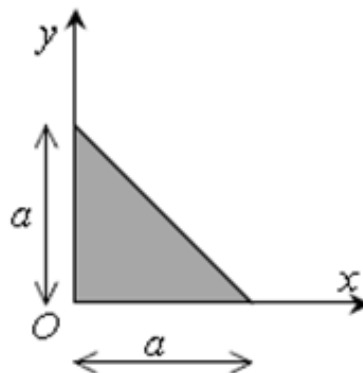
Les coordonnées du centre de masse d'un hémisphère plein de

$$G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \frac{3}{8}R \end{cases}$$

b) Soit (S) une surface

Exemple :

Déterminer les coordonnées du centre de masse de la surface du triangle isocèle présenté ci-contre :



Solution :

Soit S : la surface du triangle

$dS = dx dy$: la droite limitant le triangle a pour équation :

$y = -x + a$; où $x = -y + a$

$$S = \int dx dy = \int_0^a dx \cdot \int_0^{a-x} dy = \int_0^a (a - x) dx = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$dm = \sigma ds \Rightarrow m = \sigma \cdot S \Rightarrow m = \sigma \frac{a^2}{2}$$

$$x_G = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{\sigma a^2} \int x \sigma dx dy = \frac{2}{a^2} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy$$

$$x_G = \frac{2}{a^2} \int x(a - x) dx \Rightarrow x_G = \frac{2}{a^2} \left[\int_0^a ax dx - \int_0^a x^2 dx \right]$$

$$x_G = \frac{2}{a^2} \left[\frac{a^3}{6} \right] \Rightarrow x_G = \frac{a}{3}$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{\sigma a^2} \int y \sigma dx dy = \frac{2\sigma}{\sigma a^2} \int_0^a y dy \int_0^{a-y} dx$$

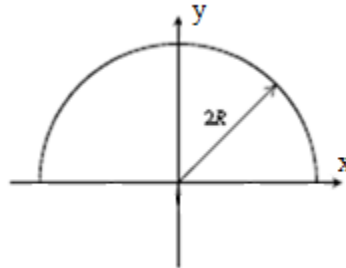
$$y_G = \frac{2}{a^2} \int y(a - y) dy \Rightarrow y_G = \frac{a}{3}$$

Les coordonnées du centre de masse du triangle isocèle : $G\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$

c) Soit (S) une ligne

Exemple

Déterminer la position du centre d'inertie d'un demi-cercle de rayon $2R$.



Centre d'inertie d'un demi-cercle de rayon $2R$:

L'axe (O_y) est un axe de symétrie, donc :

$$X_G = 0$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int y dm. \text{ (le centre de masse du solide est situé sur l'axe } O_y \text{)}$$

Le solide est linéaire, sa masse est donné par :

$m = \int \lambda d\ell$ où λ est la densité linéaire et $d\ell$ un élément de longueur.

$$d\ell \begin{cases} x = 2R \cos \theta \\ y = 2R \sin \theta \end{cases} \text{ avec } 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$m = \lambda \int d\ell = \lambda \int 2R d\theta \Rightarrow m = \lambda 2R \int_0^\pi d\theta \Rightarrow m = \lambda \pi 2R.$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{m} \int 2R \sin \theta \lambda 2R d\theta \Rightarrow y_G = \frac{1}{\lambda 2R \pi} \cdot 4R^2 \lambda \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$y_G = \frac{2R}{\pi} [-\cos \theta]_0^\pi \Rightarrow y_G = \frac{4R}{\pi}$$

$$G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{4R}{\pi} \end{cases} \text{ avec } m = \lambda 2\pi R$$

IV.3.2 Centre d'inertie d'un système composé

Soit un corps solide (S), on suppose que le solide

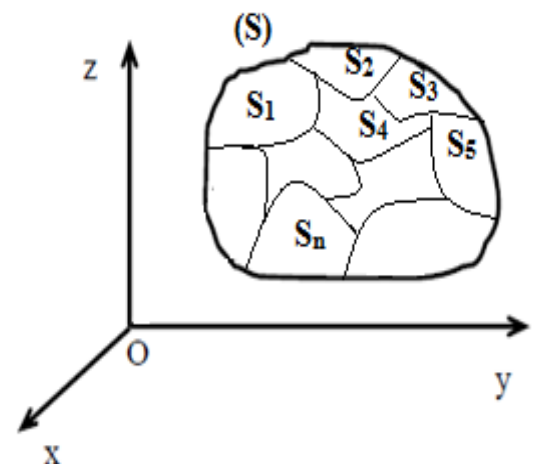
a été décomposé en n éléments $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$

de centre de masse $(G_1, G_2, G_3, \dots, G_n)$ et de masse

$m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. Cette décomposition étant arbitraire

et du purement géométrique.

Les coordonnées du centre d'inertie G du solide (S) se



détermine à partir de la relation suivante :

$$\overrightarrow{M OG} = \sum_{i=1}^n (m_i \overrightarrow{OG_i})$$

$$X_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

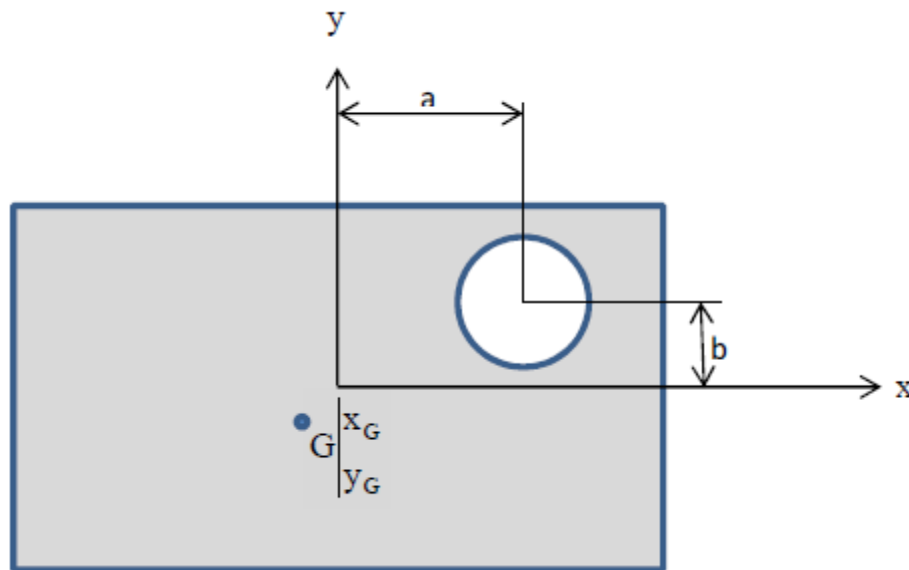
$$Z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Le point G est donc le barycentre des points G_i affectés des coefficients m_i . On procède donc en deux étapes pour déterminer le centre d'inertie :

- On détermine le centre d'inertie G_i pour chacun des sous-ensembles de masse m_i .
- On détermine le centre d'inertie G comme barycentre des points G_i affectés des coefficients m_i .

Exemple 1

Appelons S_1 la plaque rectangulaire de dimensions $L \times l$ et S_2 le cercle de rayon R . On cherche les coordonnées du centre de gravité G de la plaque.



On applique les définitions suivantes : $X_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$ et $Y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$

Avec M = masse totale du système = $\sum m_i$

Ici $M = \rho \cdot S = \rho(L \cdot l - \pi R^2)$

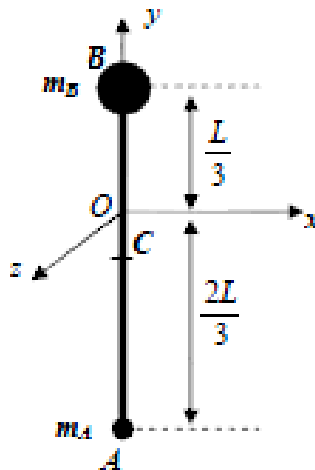
$$X_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 x_{G1} - m_2 x_{G2}}{M} = \frac{\rho \cdot 0 - \rho \pi R^2 \cdot a}{\rho(L \cdot l - \pi R^2)} = -\frac{\pi R^2 \cdot a}{L \cdot l - \pi R^2}$$

$$Y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 y_{G1} - m_2 y_{G2}}{M} = \frac{\rho \cdot 0 - \rho \pi R^2 \cdot b}{\rho(L \cdot l - \pi R^2)} = -\frac{\pi R^2 \cdot b}{L \cdot l - \pi R^2}$$

Donc les coordonnées du centre de gravité G de la plaque : $G \begin{pmatrix} -\frac{\pi R^2 \cdot a}{L \cdot l - \pi R^2} \\ -\frac{\pi R^2 \cdot b}{L \cdot l - \pi R^2} \end{pmatrix}$

Exemple 2

On considère la tige AB homogène et de masse M avec les masses m_A et m_B aux extrémités. Calculer en fonction de m, L et M le centre de masse du système par rapport au repère (OXYZ).



Solution :

1) on détermine la position de la masse m_A et m_B et la barre :

$$m_A \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2L}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad m_B \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} 0 \\ y_M \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le centre d'inertie de la barre

$$\begin{cases} \vec{OC} = \vec{OA} - \vec{CA} \\ \vec{OC} = \vec{OB} - \vec{CB} \end{cases} \Rightarrow 2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} \Rightarrow \vec{OC} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

$$\text{Donc } \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{L}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le centre d'inertie de système :

$$y_G = \frac{m_A y_A + m_B y_B + M y_G}{m_A + m_B + M} = \frac{\left(-\frac{2L}{3}\right)m + \left(\frac{L}{3}\right)3m + \left(-\frac{L}{6}\right)M}{m + 3m + M}$$

$$y_G = \frac{2m - M}{4m + M} \cdot \frac{L}{6}$$

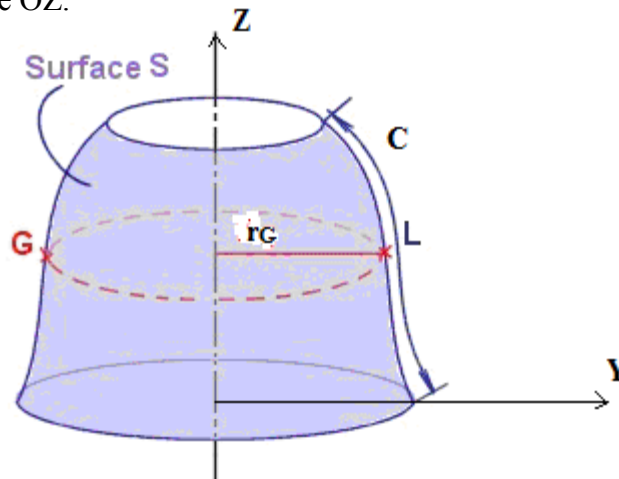
$$\text{Le centre de masse de la tige AB : } G \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2m - M}{4m + M} \cdot \frac{L}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

IV. 3.3 Détermination du centre d'inertie par la méthode de GULDIN

Les deux théorèmes, formulés par PAPPUS et refaits par GULDIN, s'occupent des relations qui existent entre les surfaces et les volumes des corps obtenus comme suite à la rotation d'une surface ou d'une ligne autour d'un axe.

❖ 1^{er} théorème : le centre d'inertie d'une courbe plane

Considérons un arc de courbe C homogène de longueur L , dans le plan OYZ et ne traversant pas l'axe OZ .



En faisant tourner cet arc de courbe autour de l'axe OZ , on engendre une surface de révolution dans l'air A_L vaut :

$$S = 2\pi r_G \cdot L$$

D'où

$2\pi r_G$: La longueur de la circonférence d'écrite par G , centre de masse de la courbe C .

Premier théorème de Guldin : La surface de révolution engendrée par une ligne tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas est égale au produit de la longueur L de l'arc par la longueur de la circonférence $2\pi r_G$ décrite par le centre d'inertie G de l'arc de courbe. $S = 2\pi r_G L$

Exemple d'application

Déterminer le centre de masse d'un quart de circonférence homogène de rayon r_0 .

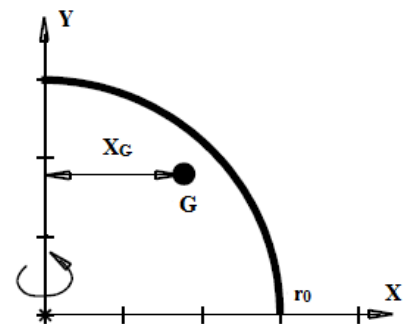
La pièce est symétrique tel que $x_G = y_G$

On applique le premier théorème de Guldin.

En faisant tourner le quart de circonférence autour de Oy , on engendre une surface hémisphérique ($S = 2\pi r_0^2$).

$$S = 2\pi r_G L$$

$$\text{Donc : } 2\pi r_0^2 = 2\pi x_G \left(\frac{\pi r_0}{2} \right)$$



Ce qui donne : $x_G = y_G = \frac{2r_0}{\pi}$

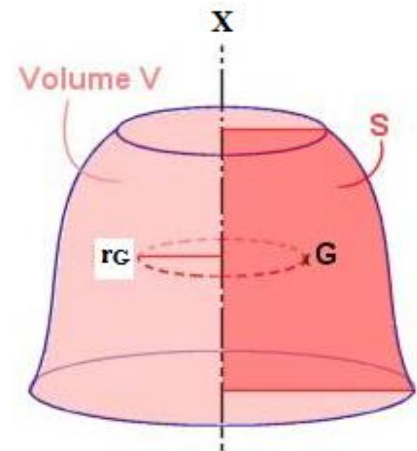
❖ 2^{ème} théorème : le centre d'inertie d'une surface plane

Dans un plan δ , considérons une surface d'air S et un axe Ox ne traversant pas, la position du centre d'inertie G de cette surface est donnée par :

$$V = 2\pi r_G \cdot S$$

r_G : Distance séparant G de OX

V : le volume engendré par S en tournant autour de OX



Deuxième théorème : le volume de révolution engendré par une surface tournant autour d'un axe a , situé dans son plan et ne la traversant pas, est égal au produit de l'air de cette surface par la circonférence que décrit son centre de masse.

$$V = 2\pi r_G \cdot S$$

Exemple : Déterminer la position du centre de masse d'un quart de disque homogène de rayon r_0

La pièce est symétrique : $x_G = y_G$

Appliquons le second théorème de Guldin

En faisant tourner le quart de disque autour de Oy , on engendre un volume hémisphérique :

$$V = 2\pi r_G \cdot S$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r_0^3 \right) = 2\pi x_G \left(\frac{\pi r_0^2}{4} \right)$$

Ce qui donne :

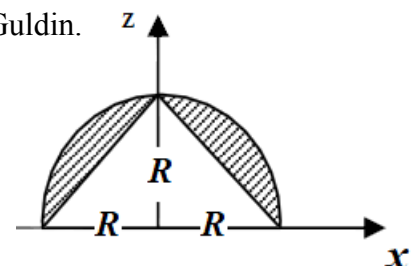
$$x_G = y_G = \frac{4r_0}{3\pi}$$

Exercice

Déterminer le centre d'inertie du système par le théorème de Guldin.

Solution :

L'axe (Oz) est un axe de symétrie ; donc :



$$x_G=0 ; z_G= ?$$

Par le théorème de Guldin, en faisant tourner le solide autour des axes, nous déduisons le centre d'inertie du solide composé :

Demi-disque (surface) $\rightarrow$ une sphère (volume)

Triangle (surface) $\rightarrow$ 2 cones (volume)

$$Z_G = \frac{V_{\text{tot}}/x}{2\pi S_{\text{tot}}} = \frac{V_{\text{sphère}} - V_{\text{cone}}}{2\pi(S_{\text{demi-disque}} - S_{\text{triangle}})}$$

$$Z_G = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - 2\pi \cdot \frac{R}{3} \cdot R^2}{2\pi(\frac{\pi R^2}{2} - R^2)} \Rightarrow Z_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{\pi - 2}$$

IV.4 Moment d'inertie et tenseur d'inertie

IV.4.1 Définition du moment d'inertie d'un solide

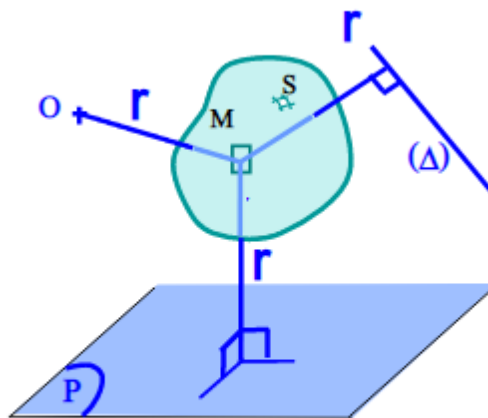
Le moment d'inertie est une grandeur physique qui caractérise la géométrie d'un solide, c'est-à-dire la répartition de la matière en son sein. Il quantifie également la résistance à mise en rotation de ce solide.

Plus le moment d'inertie est grand, plus la matière est éloignée de l'axe et plus l'énergie cinétique emmagasinée pour une vitesse de rotation donnée sera grande.

Le moment d'inertie d'un solide S par rapport à un plan P, une droite Δ ou un point O est égal à la somme du carré de la distance entre les éléments de référence et les masse élémentaires par leur masse, comme le montre l'équation suivante :

$$I = \sum_i^n m_i d_i^2 \quad \text{Pour un système discret}$$

$$I(S) = \int_{(S)} r^2 dm \quad \text{Pour un système continu}$$



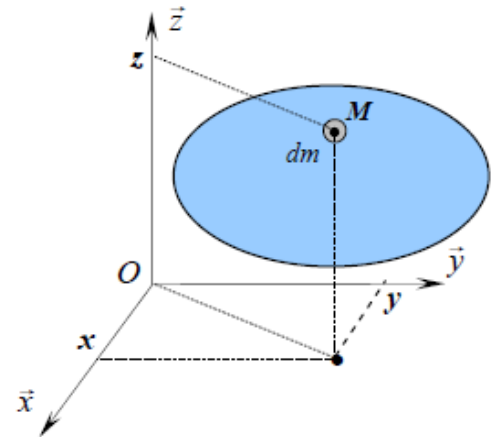
IV.4.2 Expression analytique

Soit un repère orthonormé $R(O, XYZ)$ et un solide (S) tel que $M \in (S)$.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le moment d'inertie de ce solide par rapport au point O :

$$I_O(S) = \int \overrightarrow{OM}^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

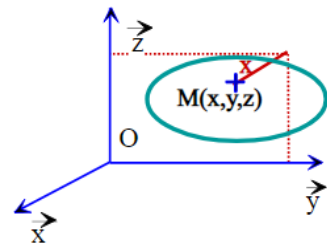


a) Moment d'inertie par rapport aux plans

- Plan (YOZ)

$$y_m = z_m = 0$$

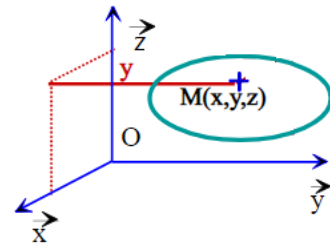
$$I_{yoz} = \int x^2 dm$$



- Plan (ZOX)

$$z_m = x_m = 0$$

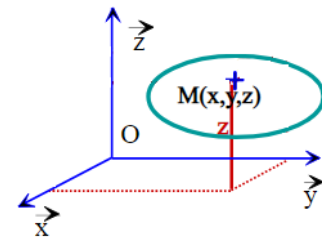
$$I_{zox} = \int y^2 dm$$



- Plan (XOY)

$$x_m = y_m = 0$$

$$I_{xoy} = \int z^2 dm$$



b) Moment d'inertie par rapport aux axes

- Moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox) : $I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$
- Moment d'inertie par rapport à l'axe (Oy) : $I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$
- Moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) : $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$

c) Moment d'inertie par rapport au point O

$$I_O(S) = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

$$I_O(S) = I_{yoz} + I_{zox} + I_{xoy}$$

$$I_O(S) = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})$$

d) Produit d'inertie

On appelle Produit d'inertie d'un solide par rapport aux plans de coordonnées associés deux à deux :

$$I_{yz} = \int yz dm$$

$$I_{zx} = \int zx dm$$

$$I_{xy} = \int xy dm$$

IV.4.3 Matrice d'inertie d'un solide (S) en O

La matrice d'inertie s'écrit sous la forme suivante :

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Autre notation de la matrice d'inertie :

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

A, B et C : moment d'inertie par rapport aux axes Ox, Oy et Oz.

D, E et F : Produit d'inertie.

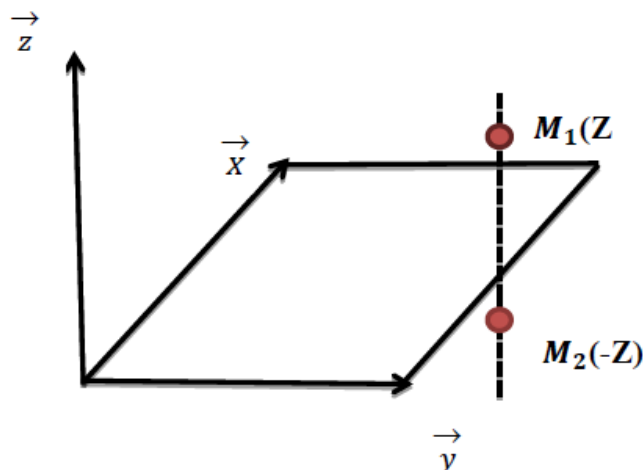
IV.4.3.1 Propriétés de la matrice d'inertie

a) Si le solide admet des plans de symétrie

Certains solides présentent des formes particulières admettant des plans de symétrie par rapport aux axes du repère (O, xyz), choisi. Pour chaque plan de symétrie, les produits d'inertie sur les deux autres plans sont nuls :

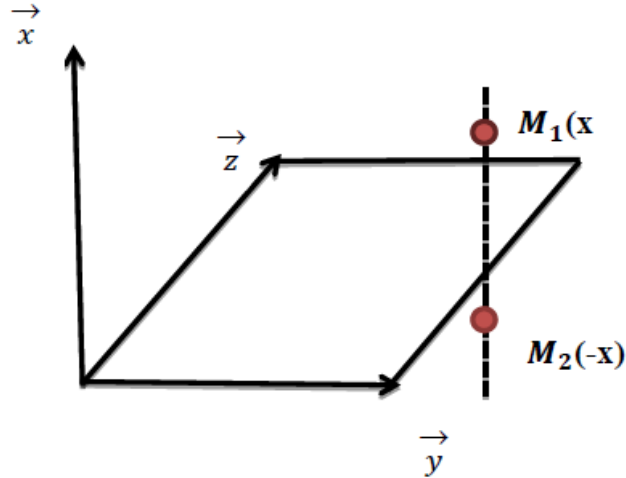
- Si XOY plan de symétrie, alors z varie de $\pm z_0$ donc :

$$E = \int xz dm = 0 \text{ et } D = \int yz dm = 0$$



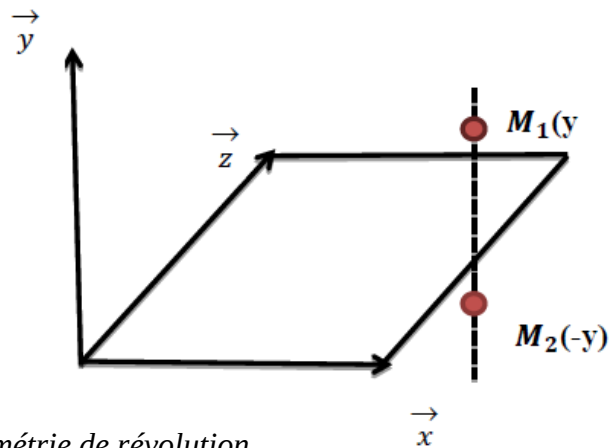
- Si YOZ plan de symétrie, alors x varie de $\pm x_0$ donc :

$$E = \int xz dm = 0 \text{ et } F = \int xy dm = 0$$



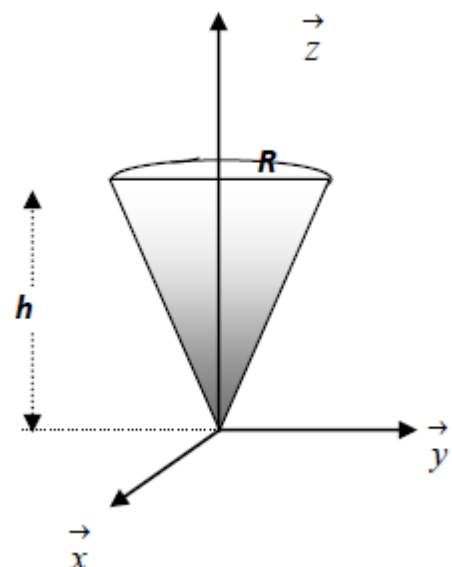
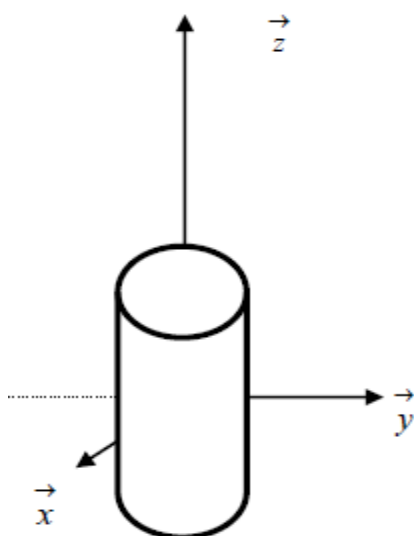
- Si XOZ plan de symétrie, alors y varie de $\pm y_0$ donc :

$$D = \int yz dm = 0 \text{ et } F = \int xy dm = 0$$



b) *Solide à symétrie de révolution*

Pour un solide présentant un axe de révolution (cylindre, cône, disc....), la masse est uniformément distribuée autour de cet axe.

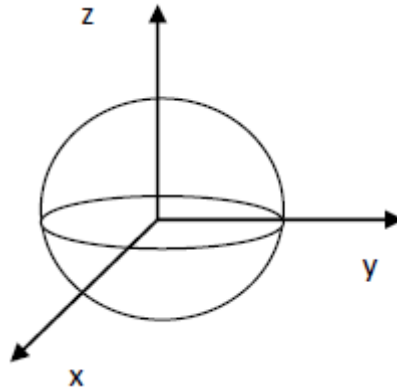


Si l'axe OZ est un axe de révolution, alors tout plan contenant ou passant par l'axe OZ est un plan de symétrie, en particulier les plans OXZ et OYZ.

Donc : $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$ et $I_{xx} = I_{yy}$

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

c) Solides à symétrie sphériques



Pour les solides avec une symétrie sphérique (sphère pleine ou creuse), tous les axes du repère jouent le même rôle, les moments d'inertie sont donc égaux :

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ et tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

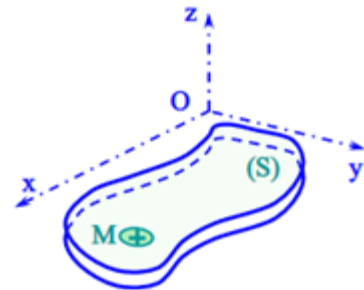
d) Solides plans

Dans le cas des solides plans, l'une des coordonnées de l'élément dm est nulle par exemple, si S est une plaque d'épaisseur négligeable dans le plan (XOY), alors $z = 0$.

Donc : $A = \int y^2 dm$,

$$B = \int x^2 dm,$$

$$C = \int (x^2 + y^2) dm = A + B$$



$$I_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A + B \end{bmatrix}$$

IV.4.4 Matrice principale d'inertie

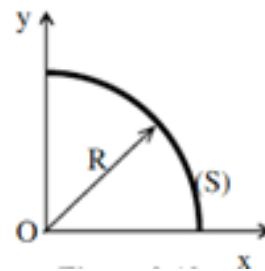
La matrice d'inertie $I_O(S)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles.

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Les termes de la diagonale sont les moments d'inerties principales ou moment d'inertie autour des axes OX, OY, OZ. Les produits d'inertie sont nuls.

Exemple1

Déterminer Le tenseur d'inertie en O, relativement au repère orthonormé (O, XYZ) du solide homogène: quart de disque de rayon R.



Solution :

le solide (quart de disque) se trouve dans le plan (O, XY) : $z = 0$

$$I_{xx} = \int y^2 dm ; I_{yy} = \int x^2 dm ; I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = I_{xx} + I_{yy}$$

Les produit d'inertie sont donnees par :

$$I_{xy} = \int xy dm ; I_{xz} = I_{yz} = 0$$

La matrice d'inertie est de la forme :

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$dm = \sigma dS = \sigma r dr d\theta \quad 0 \leq r \leq R \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$dS \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$M = \sigma \int_0^R r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \Rightarrow M = \sigma \pi \frac{R^2}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{4M}{\pi R^2}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma dS = \int r^2 \sigma r dr d\theta$$

$$I_{zz} = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \Rightarrow I_{zz} = \sigma \left[\frac{R^4}{4} \right] \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_{zz} = \frac{4M}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_{zz} = M \frac{R^2}{2}$$

Les axes (OX) et (OY) jouent le même rôle : $I_{xx} = I_{yy}$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \Rightarrow I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2} \quad \text{et} \quad I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{MR^2}{4}$$

$$I_{xy} = \int xy \, dm = \int r^2 \cos \theta \sin \theta \, \sigma r dr d\theta$$

$$I_{xy} = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \Rightarrow I_{xy} = \sigma \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

Remarque :

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$I_{xy} = \sigma \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \Rightarrow I_{xy} = \frac{\sigma R^4}{8} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

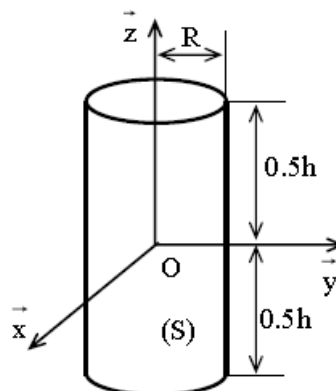
$$I_{xy} = \frac{M}{2\pi} R^2$$

La matrice d'inertie par rapport au repère (O,XYZ) :

$$I_0 = \begin{vmatrix} \frac{MR^2}{4} & -\frac{MR^2}{2\pi} & 0 \\ -\frac{MR^2}{2\pi} & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{vmatrix}$$

Exemple 2

Déterminer la matrice d'inertie en O, par rapport à un repère orthonormé (O, XYZ), d'un cylindre homogène (S) et de rayon R.



Solution :

La matrice d'intérêt dans le centre 0 du cylindre, s'écrit :

$$I_0 = \begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

On remarque que l'axe OZ est un axe révolution, donc tout plan contenant l'axe OZ est un plan de symétrie, en particulier : (OXZ) et (OYZ), les produits d'inertie sont nuls :

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Les deux axes (OX) et (OY) jouent le même rôle : $I_{xx} = I_{yy}$

Puisque $x=y$, la base du cylindre forme l'équation du cercle : $x^2 + y^2 = r^2$

$$I_{zz} = \int_{(s)} (x^2 + y^2) dm = \int_{(s)} r^2 dm$$

- Détermination la masse du cylindre :

$$dm = \rho dV = \rho r dr d\theta dz$$

$$0 \leq r \leq R ; 0 \leq \theta \leq 2\pi ; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

$$M = \int \rho dV \Rightarrow M = \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \Rightarrow M = \rho \pi R^2 h$$

$$I_{zz} = \int_{(s)} r^2 dm = \int_{(s)} r^2 \rho r dr d\theta dz = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz$$

$$I_{zz} = \rho \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot h \Rightarrow I_{zz} = \frac{MR^2}{2}$$

Détermination : I_{xx} ou I_{yy}

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm ; I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm ; I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$\text{On peut écrire : } I_{xx} + I_{yy} = \int_{(s)} (x^2 + y^2) dm + 2 \int_{(s)} z^2 dm$$

$$\text{Tel que : } I_{xx} = I_{yy}$$

$$\text{Donc : } I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2} + \int_{(s)} z^2 dm = \frac{MR^2}{4} + I'$$

$$I' = \int z^2 dm = \int_{(s)} z^2 \rho r dr d\theta dz = \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \rho \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$I' = \rho R^2 \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h^3}{4} \Rightarrow I' = M \frac{h^2}{12}$$

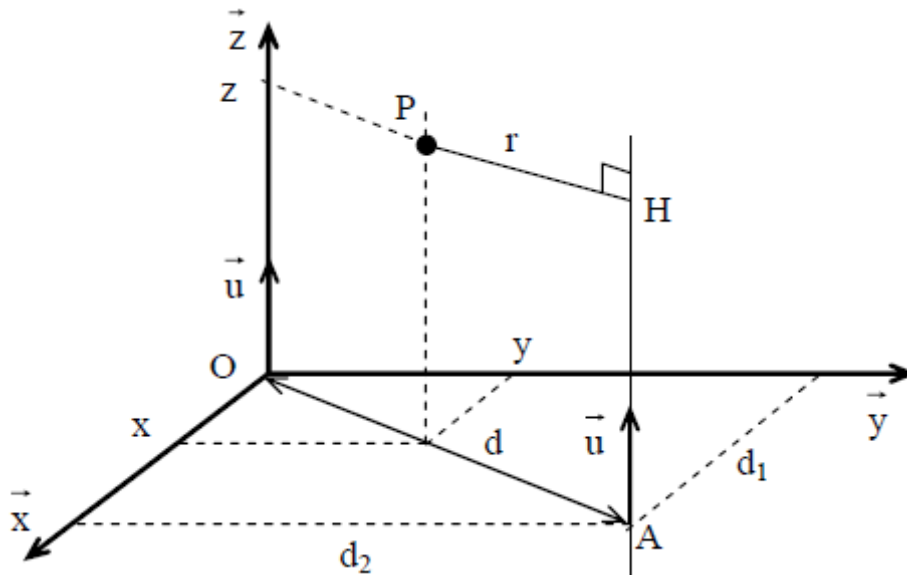
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12}$$

La matrice d'inertie du cylindre dans le centre 0, s'écrit :

$$I_0 = \begin{vmatrix} \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{vmatrix}$$

IV.4.5 Théorème de Huygens

Le théorème de König-Huygens permet de déterminer le moment d'inertie d'un élément par rapport à un axe, en connaissant le moment d'inertie de cet élément par rapport à un axe passant par son centre de gravité et parallèle au premier axe.



Soit le repère $R(O, xyz)$

Soit $A\vec{u}$ et $O\vec{u}$ deux droites parallèles tel que $O\vec{u}$ passe par le centre de gravité du corps S.

$$\overrightarrow{OP} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \overrightarrow{OH} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{HP} \begin{pmatrix} x - d_1 \\ y - d_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe $A\vec{u}$:

$$\begin{aligned} I_{A\vec{u}}(S) &= \int [(x - d_1)^2 + (y - d_2)^2] dm \\ &= \int (x^2 + y^2) dm + \int (d_1^2 + d_2^2) dm - 2d_1 \int x dm - 2d_2 \int y dm \\ I_{A\vec{u}} &= I_{O\vec{u}} + md^2 \end{aligned}$$

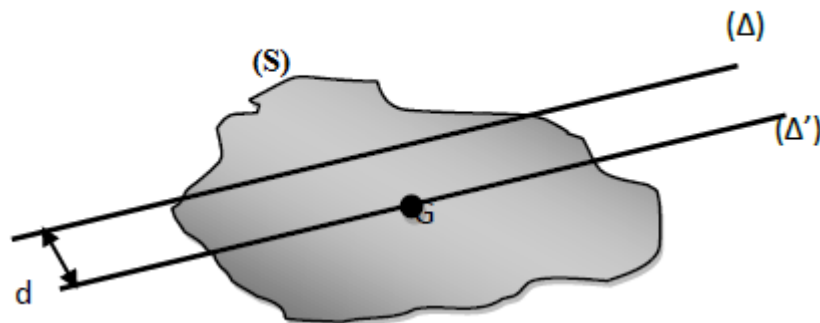
Avec : $\int x dm = \int y dm = 0$ car O est le centre d'inertie

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 \text{ (d : distance entre deux axes parallèle } A\vec{u} \text{ et } \vec{u} \text{)}$$

Théorème :

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe (Δ) parallèle à un axe passant par son centre d'inertie est égal au moment d'inertie de ce corps par rapport à l'axe passant par son centre de masse (Δ') plus le carré de la distance entre les deux axes par la masse du corps.

$$I_{\Delta} = I_{\Delta'} + md^2$$

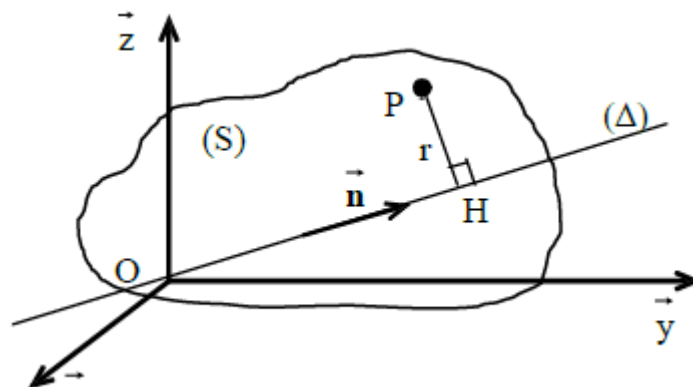


IV.4.6 moment d'inertie par rapport à une droite quelconque

Considérons le repère (O, xyz),

Soit un P appartenant en solide (S) tel que H est la projection orthogonal du point P sur l'axe (Δ) .

$\vec{n}$: vecteur unitaire qui donne la direction de la droite (Δ) .



Connaissant le moment d'inertie en O (I_O), le moment d'inertie par rapport à la droite (Δ) passant par O et de direction $\vec{n}$ est :

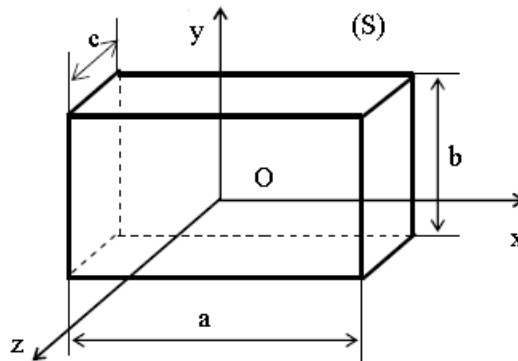
$$I_{\Delta} = \vec{n}^t \cdot I_O \cdot \vec{n}$$

Où $\vec{n}^t$ est le transposé du vecteur unitaire de la droite (Δ)

Exemple

On considère un parallélépipède(s) de cotés a, b et c, les axes OX, Oy et OZ passent par le centre O et son parallèles aux cotés du parallélépipède.

- 1) déterminer la matrice en O, par rapport a un repère orthonormé (O,XYZ).
- 2) Déduire la matrice d'inertie d'une plaque rectangulaire sans épaisseur et de coté a et b.
- 3) déterminer le moment d'inertie par rapport à une diagonale(Δ) de la plaque.

**Solution :**

1) tenseur d'inertie du parallélépipède :

Les plans XOZ et YOZ sont des plans de symétrie, alors tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

On choisit un petit élément de volume $dV = dx dy dz$ tel que :

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}; \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}; \quad -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}$$

Masse du parallélépipède : $dm = \rho dV$

$$M = \rho \int_{(S)} dV = \rho \int dx dy dz \Rightarrow m = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \Rightarrow M = \rho a \cdot b \cdot c$$

Pour calculer les moments d'inertie, nous allons d'abord calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{(S)} x^2 dm = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \Rightarrow \int_{(S)} x^2 dm = \rho \frac{a^3 bc}{12} = \frac{Ma^2}{12}$$

$$\int_{(S)} y^2 dm = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \Rightarrow \int_{(S)} y^2 dm = \rho \frac{b^3 ac}{12} = \frac{Mb^2}{12}$$

$$\int_{(S)} z^2 dm = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz \Rightarrow \int_{(S)} z^2 dm = \rho \frac{c^3 a \cdot b}{12} = \frac{Mc^2}{12}$$

D'où :

$$I_{xx} = \int_{(S)} (z^2 + y^2) dm = \int y^2 dm + \int z^2 dm = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

$$I_{yy} = \int_{(s)} (x^2 + z^2) dm = \int x^2 dm + \int z^2 dm = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$$

$$I_{zz} = \int_{(s)} (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

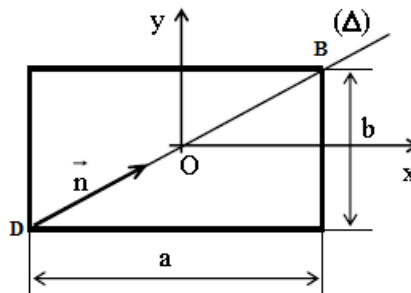
Donc la matrice d'inertie au centre O du parallélépipède de côté a, b et c, s'écrit :

$$I_0 = \frac{M}{12} \begin{vmatrix} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{vmatrix}$$

2) la matrice d'inertie d'une plaque d'épaisseur négligeables ($c \approx 0$)

$$I_0 = \frac{M}{12} \begin{vmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{vmatrix}$$

3) le moment d'inertie par rapport à une diagonale (Δ) de la plaque :



Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par le centre de solide, est donné par la relation :

$$I_{\Delta} = \vec{n}^t \cdot I_0 \cdot \vec{n}$$

$\vec{n}$: vecteur unitaire qui donne la direction de l'axe (Δ)

$\vec{n}^t$: est le transposé du vecteur $\vec{n}$

I_0 : le moment d'inertie par rapport au centre O.

- détermination du vecteur unitaire $\vec{n}$

$$\vec{n}(\alpha \quad \beta \quad 0)$$

$$\overrightarrow{DB} = DB \vec{n} \Rightarrow \vec{n} = \frac{\overrightarrow{DB}}{DB}$$

$$D(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) ; B(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$$

$$\vec{n} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \vec{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \vec{j}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}; \vec{n}^t \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$I_{\Delta} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right) \cdot \frac{M}{12} \begin{vmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_{\Delta} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{Mb^2}{12}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{Ma^2}{12}, 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_{\Delta} = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{Mb^2}{12}, \frac{b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{Ma^2}{12} + 0 \right) \Rightarrow I_{\Delta} = \frac{M}{6} \cdot \frac{a^2+b^2}{12}$$

Bibliographie

- D. CHAOUCH**, Mécanique Rationnelle - exercices corrigés, Polycopie, Avril 2016.
- I. Corminboeuf**, Cours de statique version 3.9.5 – septembre 2016.
- F. Golay, S. Bonelli**, Mécanique des Milieux Continus, Février 2011.
- N.HAKIKI**, Physique générale, Rappel de cours et exercices corrigés, 2009.
- A. KASSOUL**, Physique 4: Mécanique Rationnelle Cours et Exercices, Polycopie, 2009.
- S. Pommier**, Dynamique des systèmes de Solides, 2005-2006.
- A. Kadi**, Mécanique Rationnelle Cours & Exercices Résolus, Université de Boumerdès Algérie.
- T. HANI**, Mécanique générale – Exercices et problèmes résolus avec rappels de cours, Office des publications Universitaires, 1983, 386p.