Table des Matières

Chapitre 1

Suites de Nombres réels

On appelle **suite d'éléments de nombres réels** une application d'un sous ensemble $A = \{n_0, n_0+1, \cdots\}$ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. On la note:

$$\begin{array}{ccc} u & : & A \to \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

u_n est appelé **terme général** de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Exemple 1 $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, u_n = 2 + \frac{5}{n+1}$,
$v : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, , v_n = \sqrt{n-1}$.

1.1 Suites bornées

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Définition 1.1.2 *Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Définition 1.1.3 *Une suite (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée à la fois.*

Exemple 2

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 - \frac{1}{u_{n-1}}. \end{cases}$$

Montrons par récurrence que:

$$u_n > 1, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

En effet: pour $n = 0$, on a:$u_0 = 2 > 1$.

Supposons que: $u_n > 1$ et montrons que: $u_{n+1} > 1$.

on a:

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} > 2 - 1 = 1$$

1.2 Suites convergentes

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

c'est à dire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 $u_n = \frac{1}{n}, l = 0$.

On montre que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ il suffit de montrer,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$

On a,

$\frac{1}{\varepsilon} \leq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Longrightarrow \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} \leq \varepsilon$

et on a aussi,

$n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} \leq \varepsilon.$

1.2.1 Propriétés des suites convergentes

Proposition 1.2.1 *Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.*

Preuve. ... ∎

Proposition 1.2.2 *Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 tend vers 0.*

Preuve. ..... ∎

Proposition 1.2.3 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites convergentes vers la même limite* l *et* (w_n) *une suite telle que:*

$$u_n \leq w_n \leq v_n \text{ ou bien } u_n < w_n < v_n$$

Alors la suite (w_n) *est convergente sa limite est égale à* l*.*

Proposition 1.2.4

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = l \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |l\ |.$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \ \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$$

1.2.2 Opérations arithmétiques sur les suites convergentes

Théorème 1.2.1 *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites convergentes* $(u_n \to l, v_n \to l')$*. Alors*

(1) La suite $(u_n + v_n)_n$ *convergever vers* $l + l'$*.*

(2) La suite $(u_n.v_n)_n$ *convergever vers* $l.l'$*.*

(3) Supposons $l \neq 0$*. suite* $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_n$ *convergever vers* $\frac{1}{l}$*.*

Preuve. ..... ■

1.3 Extensions aux limites infinies

Définition 1.3.1 *Soit* $(u_n)_{n\in N}$ *une suite de nombres réels.*

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$*, on dit que la suite* u_n *tend vers* $+\infty$

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow u_n > A.$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$*, on dit que la suite* u_n *tend vers* $-\infty$*.*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow u_n < -A.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente.*

1.3.1 Infiniment petit et infiniment grand

1.3.2 Suites monotones

Pour étudier la monotonie d'une suite on calcul la valeur suivante:

$$u_{n+1} - u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc on a les cas suivants:

1) si $u_{n+1} - u_n \geq 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **croissante**.
2) si $u_{n+1} - u_n > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **strictement croissante**.
3) si $u_{n+1} - u_n \leq 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **décroissante**.
4) si $u_{n+1} - u_n < 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **strictement décroissante**.
5) si $u_{n+1} - u_n = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **constante**.

Exemple 4

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 - \frac{1}{u_{n-1}}. \end{cases}$$

Alors on a:

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n} < 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \ \textit{car} \ u_n > 0.$$

donc la suite est décroissante.

Proposition 1.3.1 *1) Une suite croissante majorée est une suite convergente.*

2) Une suite décroissante minorée est une suite convergente.

1.3.3 Suites adjacentes:

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites deux suites adjacentes si et seulement si:

1) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante,
2) $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante,
3) $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$,
4) $U_n \leq V_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

1.4 Suites extraites

On appelle une **sous-suite (suite extraite ou bien suite partielle)** d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite (v_k) définie par:

$$v_k = u_{(s(k))}, \forall k \in \mathbb{N}$$

avec:

$$\begin{array}{ccc} s & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ k & \mapsto & s(k) \end{array}$$

est une application d'indice strictement croissante.

Exemple 5 *La suite* $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}, \left(resp\,(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}\right)$ *est une sous suite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.4.1 Suite de Cauchy

On dit $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, si:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \Longrightarrow |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

1.4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 1.4.1 *De toute suite réelle bornée on peut en extraite une sous suite convergente.*

1.5 Généralisation de notion de la limite

1.5.1 Points d'adhérence

Définition 1.5.1 *Un nombre a est dit valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ s'ilexiste une sous-suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de $(u_n)_{n\geq 0}$, convergente vers a.*

On note par $Ad\left((u_n)_{n\geq 0}\right)$ l'ensemble des points d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 6 $u_n = (-1)^n$.

$u_{2n} = 1, u_{2n+1} = -1.$

Donc $Ad\left((u_n)_{n\geq 0}\right) = \{-1, 1\}$.

1.5.2 Limite supérieure

On appelle limite supérieure la borne supérieure de $Ad\left((u_n)_{n\geq 0}\right)$.

On notera $\overline{\lim}\ u_n = \sup Ad\left((u_n)_{n\geq 0}\right)$.

Exemple 7 $u_n = (-1)^n$.

$u_{2n} = 1, u_{2n+1} = -1.$

Donc $Ad\left((u_n)_{n\geq 0}\right) = \{-1, 1\}$.

$\overline{\lim}\ u_n = 1.$

1.5.3 Limite inférieure

On appelle limite inférieure la borne supérieure de $Ad\left((u_n)_{n\geq 0}\right)$.

On notera $\underline{\lim}\ u_n = \inf Ad\left((u_n)_{n\geq 0}\right)$.

Exemple 8 $u_n = (-1)^n$.

$u_{2n} = 1, u_{2n+1} = -1.$

Donc $Ad\left((u_n)_{n\geq 0}\right) = \{-1, 1\}$.

$\underline{\lim}\ u_n = -1.$

1.5.4 Suites récurrentes.

On a deux types de suites:

1. Une suite définie par un terme général qui est défini par un indice n.

Exemple 9

$$u_n = \frac{1}{n^2+1}, v_n = \sin n.$$

2. Une suite récurrente:

   C'est une suite qui est définie par une relation entre ces termes d'ordre $n, n-1, n+1, \cdots$

Exemple 10

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \sqrt{u_{n-1}+1}. \end{cases}$$