## Fiche de TD 2

**Solution de L'exercice 1:**

$$\begin{aligned} 1\cdot\ \textit{Soit } x \in \complement_E (A \cup B) &\Longleftrightarrow x \notin (A \cup B) \Longleftrightarrow \overline{x \in (A \cup B)} \\ &\Longleftrightarrow \overline{x \in A \textit{ ou } x \in B} \\ &\Longleftrightarrow x \notin A \textit{ et } x \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A \textit{ et } x \in \complement_E B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A \cap \complement_E B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cdot\ \textit{Soit } x \in \complement_E (A \cap B) &\Longleftrightarrow x \notin (A \cap B) \Longleftrightarrow \overline{x \in (A \cap B)} \\ &\Longleftrightarrow \overline{x \in A \textit{ et } x \in B} \\ &\Longleftrightarrow x \notin A \textit{ ou } x \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A \textit{ ou } x \in \complement_E B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A \cup \complement_E B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\cdot\ \textit{Soit } x \in \complement_E \left(\complement_E A\right) &\Longleftrightarrow x \notin \complement_E A \\ &\Longleftrightarrow x \in A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\cdot\ \textit{Soit } x \in A \setminus B &\Longleftrightarrow x \in A \textit{ et } x \notin B \Longleftrightarrow x \in A \textit{ et } x \in \complement_E B \\ &\Longleftrightarrow x \in \left(A \cap \complement_E B\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in \left(A \cap \complement_E B\right) \cup \varnothing \\ &\Longleftrightarrow x \in \left(A \cap \complement_E B\right) \cup \left(B \cap \complement_E B\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap \complement_E B \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus B. \end{aligned}$$

**Solution de L'exercice 2:**

• $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$ ?
Hypothèse : $A \cup B = A \cap B$
But: $A = B$

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \cup B \\ &\Rightarrow x \in A \cap B \quad \text{car } \mathrm{A \cup B = A \cap B} \\ &\Rightarrow x \in B, \text{ ceci implique que } A \subset B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow x \in A \cup B \\ &\Rightarrow x \in A \cap B \quad \text{car } A \cup B = A \cap B \\ &\Rightarrow x \in A, \text{ ceci implique que } B \subset A \end{aligned}$$

Donc $A \cup B = A \cap B \Longrightarrow A = B$.
$\bullet A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A \quad ?$
Hypothèse : $A \subset B$
But: $\complement_E B \subset \complement_E A$

$$\begin{aligned} x \in \complement_E B &\Rightarrow x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \,\mathrm{car}\, A \subset B \\ &\Rightarrow x \in \complement_E A \end{aligned}$$

Donc $A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$.

$\bullet$ $B \subset C \Longrightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$ ?

Hypothèse : $B \subset C$
But : $(A \cap B) \subset (A \cap C)$
$\forall\, x \in (A \cap B) \Longrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B$

$$\begin{aligned} \textit{Comme } B \subset C &\Longrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in C \\ &\Longrightarrow x \in (A \cap C) \end{aligned}$$

Donc : $B \subset C \Longrightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$.
$\bullet$ $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longleftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$ ?

a. $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longrightarrow [(A \cup B) \subset C]$ ?

Hypothèse : $(A \subset C) \wedge (B \subset C)$
But : $(A \cup B) \subset C$
$\forall\, x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B$

$$\begin{aligned} \textit{Comme } (A \subset C) \wedge (B \subset C) &\Longrightarrow x \in C \vee x \in C \\ &\Longrightarrow x \in C \end{aligned}$$

Donc : $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longrightarrow [(A \cup B) \subset C]$

b. $[(A \cup B) \subset C] \Longrightarrow [(A \subset C) \wedge (B \subset C)]$ ?

Hypothèse : $(A \cup B) \subset C$
But : $(A \subset C) \wedge (B \subset C)$
$\forall\, x \in A \Longrightarrow x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in C$, ceci implique que $A \subset C$
$\forall\, x \in B \Longrightarrow x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in C$, ceci implique que $B \subset C$
Donc : $[(A \cup B) \subset C] \Longrightarrow [(A \subset C) \wedge (B \subset C)]$
**Conclusion :**
$[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longleftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$

**Solution de L'exercice 3:**

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = \alpha\left(x^2 - y^2\right)$$

• $\mathcal{R}$ est Réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}x \quad ?$
**a)** Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$x^3 - x^3 = \alpha\left(x^2 - x^2\right) \Rightarrow x\mathcal{R}x$$

Alors $\mathcal{R}$ est Réflexive
• $\mathcal{R}$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ ?
**b)** Soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x^3 - y^3 = \alpha\left(x^2 - y^2\right) \\ &\Leftrightarrow y^3 - x^3 = \alpha\left(y^2 - x^2\right) \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ est symétrique.
• $\mathcal{R}$ est Transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$ ?
**c)** Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ et \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3 - y^3 = \alpha\left(x^2 - y^2\right) \\ y^3 - z^3 = \alpha\left(y^2 - z^2\right) \end{array}\right. \Rightarrow x^3 - z^3 = \alpha\left(x^2 - z^2\right)$
$\Rightarrow x\mathcal{R}z$ Ainsi $\mathcal{R}$ est transitive.
**Conclusion :** $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.
**2.** la classe d'équivalence de 6

$$\begin{aligned} \dot{6} &= \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}6\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 6^3 = 7\left(x^2 - 6^2\right)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 7x^2 + 36 = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : (x-6)\left(x^2 - x - 6\right) = 0\right\} \\ &= \{6, 3, -2\} \end{aligned}$$

**II** $a\Phi b \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = b$
(1) Montrer que $\Phi$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$
a) $\Phi$ est-elle réflexive ?
$\Phi$ est réflexive $\Longleftrightarrow \forall\, a \in \mathbb{N}^*,\ a\Phi a$ ?
$\forall\, a \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \exists\, n = 1 \in \mathbb{N}$ tel que : $a^1 = a \Longrightarrow a\Phi a \Longrightarrow \Phi$ est réflexive

b) $\Phi$ est-elle antisymétrique ?
$\Phi$ est antisymétrique $\Longleftrightarrow \forall\, a, b \in \mathbb{N}^*, \qquad a\Phi b\ et\ b\Phi a \Longrightarrow a = b$ ?

$$\begin{aligned} soient\ a, b \in \mathbb{N}^*, \quad si\ a\Phi b\ et\ b\Phi a &\Longrightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ a^{n_1} = b \\ et\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ b^{n_2} = a &\Longrightarrow \left(b^{n_2}\right)^{n_1} = a^{n_1} = b \\ &\Longrightarrow n_1 n_2 = 1 \Longrightarrow n_1 = n_2 = 1 \\ &\Longrightarrow a = b \Longrightarrow \Phi\ est\ antisymtrique. \end{aligned}$$

c) $\Phi$ est-elle transitive?
$\Phi$ est transitive $\Longleftrightarrow \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}^*,\ a\Phi b\ et\ b\Phi c \Longrightarrow a\Phi c$

$$\begin{aligned} &soient\ a, b, c \in \mathbb{N}^*, \\ &a\Phi b\ et\ b\Phi c \Longrightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ a^{n_1} = b \\ &et\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ b^{n_2} = c \Longrightarrow (a^{n_1})^{n_2} = c \\ &\exists\, n = n_1 n_2 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ a^n = c \\ &\Longrightarrow a\Phi c \\ &\Longrightarrow \Phi\ est\ transitive \end{aligned}$$

(2) Cet ordre est-il total ?
L'ordre n'est pas total car pour les deux entiers $\{2, 3\}$ on a ni $2\Phi 3$ ni $3\Phi 2$ .

**Solution de L'exercice 5:**
$f$ est injective$\Longleftrightarrow \forall\, x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\},\ \ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ ?

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 2 - \frac{8 - x_1}{4x_1 + 6} = 2 - \frac{8 - x_2}{4x_2 + 6} \\ &\Rightarrow \frac{8 - x_1}{4x_1 + 6} = \frac{8 - x_2}{4x_2 + 6} \\ &\Rightarrow (8 - x_1)(4x_2 + 6) = (8 - x_2)(4x_1 + 6) \\ &\Rightarrow 32x_2 + 48 - 4x_1x_2 - 6x_1 = 32x_1 + 48 - 4x_1x_2 - 6x_2 \\ &\Rightarrow 32x_1 + 6x_1 = 32x_2 + 6x_2 \\ &\Rightarrow 38x_1 = 38x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ donc } f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

$f$ est surjective$\Longleftrightarrow \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\},\ y = f(x).$
Soit $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y = f(x) \Rightarrow y = 2 - \frac{8 - x}{4x + 6} &\Rightarrow y - 2 = -\frac{8 - x}{4x + 6} \\ &\Rightarrow 8 - x = (2 - y)(4x + 6) \Rightarrow 8 - x = 8x + 12 - 4xy - 6y \\ &\Rightarrow 8 - 9x + 4xy = 12 - 6y \\ &\Rightarrow 4xy - 9x = 4 - 6y \\ &\Rightarrow x = \frac{4 - 6y}{4y - 9} \quad , \quad \text{ si } 4y - 9 \neq 0 \\ y = \frac{9}{4} &\text{ n'a pas d'antécédent, alors } f \text{ n'est pas surjective.} \end{aligned}$$

$$x = \frac{4 - 6y}{4y - 9} \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \text{ car } \frac{4 - 6y}{4y - 9} = -\frac{3}{2} \Longleftrightarrow 27 = 8 \text{ ce qui est impossible.}$$

- Pour $f$ soit bijective il faut que l'ensemble d'arrivée soit $\mathbb{R} - \left\{\frac{9}{4}\right\}$
- L'application réciproque de $f$ est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{\tfrac{9}{4}\right\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{3}{2}\right\} \\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{4-6x}{4x-9} \end{aligned}$$

## Fiche de TD 3

**Solution de L'exercice 1:**

1) $f$ est définie si, et seulement si,

$$\begin{aligned} 3x - x^3 \geq 0 &\Longleftrightarrow x(3-x^2) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[0, \sqrt{3}\right], \end{aligned}$$

donc

$$D_f = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[0, \sqrt{3}\right].$$

2) $g$ est définie si, et seulement si,

$$x-2>0 \text{ } et \text{ } x+2>0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ et \\ x>-2 \end{cases} \Longleftrightarrow x>2,$$

donc

$$D_g = ]2, +\infty[.$$

3) $h$ est définie si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \frac{2+3x}{5-2x} \geq 0 \text{ } et \text{ } 5-2x \neq 0 &\Longleftrightarrow (2+3x \geq 0 \text{ } et \text{ } 5-2x>0) \text{ } ou \text{ } (2+3x \leq \text{ } et \text{ } 5-2x<0) \\ &\Longleftrightarrow \left(x \geq -\frac{2}{3} \text{ } et \text{ } x < \frac{5}{2}\right) \text{ } ou \text{ } \left(x \leq -\frac{2}{3} \text{ } et \text{ } x > \frac{5}{2}\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[ \end{aligned}$$

donc

$$D_h = \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[.$$

| $x$ | $-\infty$ | -2/3 | | 5/2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2+3x$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $5-2x$ | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| (2+3x) / (5-2x) | $-$ | 0 | $+$ | ‖ | $-$ |

$*$ Démontrons par la définition de la limite : $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}(3x+1)=7.$
D'une manière générale, on a:
$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \alpha>0,\ \forall\, x\in D_f,\ \ |x-x_0|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$
Alors :
$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \alpha>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ |x-2|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-7|<\varepsilon$

$$\begin{aligned}|f(x)-7|<\varepsilon &\Longleftrightarrow |(3x+1)-7|<\varepsilon\\ &\Longleftrightarrow |3x-6|<\varepsilon\\ &\Longleftrightarrow |3(x-2)|<\varepsilon\\ &\Longleftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Donc
$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \alpha>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ |x-2|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-7|<\varepsilon$
Tel que $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{3}$.

**Solution de L'exercice 3:**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & si\ x\neq 0,\\ 1 & si\ x=0.\end{cases}$$

1. On a

$$\lim_{\substack{>\\x\longrightarrow 0}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\longrightarrow 0}}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (\ on\ a\ utilis\ une\ limite\ connue\ )$$
$$\lim_{\substack{<\\x\longrightarrow 0}} f(x)=\lim_{\substack{<\\x\longrightarrow 0}}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)=-1$$

Donc la limite n'existe pas .
2. On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$ n'existe pas, ce qui signifie que la fonction n'est pas continue en 0
$f$ n'est pas dérivable en 0, puisqu'elle n'est pas continue en ce point, car toute fonction dérivable est continue ce qui est équivalent à dire que toute fonction discontinue en un point ne peut être dérivable en ce point .

**Solution de L'exercice 4:**

1. La fonction est clairement cntinue pour $x\neq 0$. Pour $x=0$

$$\lim_{\substack{>\\x\longrightarrow 0}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\longrightarrow 0}} x^3\cos\frac{1}{x}=0, \quad (\ on\ a\ utilis\ le\ thorme\ d'encadrement\ )$$
$$\lim_{\substack{<\\x\longrightarrow 0}} f(x)=\lim_{\substack{<\\x\longrightarrow 0}} x^3\sin\frac{1}{x}=0, \quad (\ on\ a\ utilis\ le\ thorme\ d'encadrement\ )$$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=f(0)$ : $f$ est continue en 0.
2. Pour $x\neq 0$ la fonction est clairement dérivable et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\dfrac{1}{x} + x\sin\dfrac{1}{x} & si\ x > 0, \\ \\ 3x^2 \sin\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x} & si\ x < 0. \end{cases}$$

La droite tangente à $f$ en $x = x_0$ a équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ donc pour $x_0 = \dfrac{1}{\pi}$ on a $y = -\dfrac{3}{\pi^2}x + \dfrac{2}{\pi^3}$.

3. La fonction est dérivable en $x = 0$ si et seulement si la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a une limite finie.
On a

$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \frac{x^3 \cos\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$
$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$

Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ : $f$ est dérivable en 0 et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\dfrac{1}{x} + x\sin\dfrac{1}{x} & si\ x > 0, \\ \\ 0, & si\ x = 0 \\ \\ 3x^2 \sin\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x} & si\ x < 0. \end{cases}$$

4. $f'$ est clairement continue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ on a

$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} f'(x) = \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \left(3x^2 \cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}\right) = 0,$$
$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} f'(x) = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \left(3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\right) = 0$$

alors $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f'(x) = f'(0)$, donc $f'$ est continue en 0. Par conséquent $f$ est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

**Solution de L'exercice 5:**

a) $f\ :\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

La fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ( on a utilis le thorme dencadrement )

Donc le prolongement par continuité définie par $\tilde{f}\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

b) $f\ :\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

La fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \ln\left(\frac{e^0 + e^{-0}}{2}\right)}{x - 0} \\ &= \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{e^0 + e^{-0}}\right) = 0\ car\ :\ \left(\ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.\end{aligned}$$

Donc le prolongement par continuité définie par $\tilde{f}\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

c) $f\ :\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{(1+x)}.$$

Donc $f$ a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand $x$ tend vers 1. Et donc en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. En $-1$ la fonction $f$ n'est pas prolongeable par continuité car $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^{\pm}} f(x) = \mp\infty$ .

Donc $f$ n'admet pas un prolemngement par continuité sur $\mathbb{R}$.

**Rappel :**

## THÉORÈME DE L'HÔPITAL

**Theorem** : *Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables au voisinage de $x_0 \in ]a,b[$.*

*Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ *et* $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ *où* $A, B$ *sont tous les deux nuls ou tous les deux infinis,* $g'(x) \neq 0$ *pour* $x$ *voisin de* $x_0$*, et si* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe alors:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1) Soient $f(x) = e^{2x} - 1$ et $g(x) = x$, alors $f'(x) = 2e^{2x}$ et $g'(x) = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

Donc

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2.$$

2) Soient $f(x) = 1+\cos\pi x$ et $g(x) = x^2-2x+1$, alors $f'(x) = -\pi\sin\pi x,\ f''(x) = -\pi^2\cos\pi x$ et $g'(x) = 2x-2,\ g''(x) = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1} = \frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-\pi\sin\pi x}{2x-2} = \frac{0}{0},$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-\pi^2\cos\pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Donc

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1} = \frac{\pi^2}{2}.$$

3) Soient $f(x) = \ln(\cos 3x)$ et $g(x) = \ln(\cos 2x)$, alors $f'(x) = -\frac{3\sin 3x}{\cos 3x}$ et $g'(x) = -\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{3}{2}\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \times \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \\
&= \frac{3}{2}\left[\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos 3x} \times \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{3}{2}\right] \\
&= \frac{9}{4} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}
\end{aligned}$$