Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Introduction

On a vu que les méthodes directes donnent la solution exacte du système d'équations linéaires. Dans ce chapitre on va introduire les méthodes itératives ou indirectes qui donnent une solution approximative du système d'équations linéaires. Ces méthodes sont très faciles à mettre en œuvre et à programmer.

Les méthodes itératives ou approximatives pour la résolution des systèmes linéaires de type A.x=b sont basées sur l'idée de construire une suite de vecteurs $x^{(k)}$ qui converge vers une solution exacte x en utilisant une fonction linéaire f telle que

$$\boldsymbol{x^{k+1} = f(x^{k}).}$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Définitions

a) Une méthode itérative est dite convergente si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{(k)} = x$ ou x est la solution exacte du système

b) Une méthode itérative $x^{k+1} = f(x^k)$ est consistante si $x = f(x)$ avec x est le vecteur de solution exacte

c) On appelle erreur à l'itération k de la méthode itérative le vecteur $e(k) = x^{(k)} - x$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Méthode de Jacobi

Soit le système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Méthode de Jacobi

Transformons le système en supposant que les éléments du pivot sont non nuls .

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = (b_n - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1})/a_{nn} \end{cases} \quad (2)$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Méthode de Jacobi

Cette forme est appelée forme réduite du système A.x=b. Pour résoudre le système (1) on utilise l'écriture (2) en portant les termes de droite à l'itération (k) et ceux à gauche à l'itération (k+1).

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n2}x_2^{(k)} - a_{n3}x_3^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} \end{cases} \quad (3)$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Méthode de Jacobi

En prenant une estimation initiale $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)$ et en utilisant le système (3) on calcule $X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}\right)$ ensuite on remplace le vecteur $X^{(1)}$ dans le système (3) avec k=1 on calcule $X^{(2)}$ et continue de la même façon de calculer les vecteurs $X^{(3)}, X^{(4)}, X^{(5)}, \cdots$ jusqu'à la convergence.

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Méthode de Jacobi

Exemple :

Résoudre par la méthode de Jacobi en utilisant 3 itérations et un vecteur initial $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le système $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ -x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

Le système s'écrira en forme réduite :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(6 + x_2^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(6 + x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Méthode de Jacobi

1ere itération

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{4}\left(6 + x_2^{(0)}\right) = 1.5 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{4}\left(4 + x_1^{(0)} + x_3^{(0)}\right) = 1 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{4}\left(6 + x_2^{(0)}\right) = 1.5 \end{cases}$$

2éme itération

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{1}{4}\left(6 + x_2^{(1)}\right) = 1.75 \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{4}\left(4 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)}\right) = 1.75 \\ x_3^{(2)} = \dfrac{1}{4}\left(6 + x_2^{(1)}\right) = 1.75 \end{cases}$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Méthode de Jacobi

3éme itération

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{4}\left(6 + x_2^{(2)}\right) = 1.9375 \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{4}\left(4 + x_1^{(2)} + x_3^{(2)}\right) = 1.875 \\ x_3^{(3)} = \dfrac{1}{4}\left(6 + x_2^{(2)}\right) = 1.9375 \end{cases}$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de la méthode de Jacobi en effet elle rend le processus itératif plus rapide.

Partons de la méthode de Jacobi, le calcul des vecteurs $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \cdots$ mène à la convergence, cela veut dire que chaque nouveau vecteur est meilleur que le précédent. On remarque dans la méthode de Jacobi que pour calculer la composante $x_2^{(2)}$ du vecteur $X^{(2)}$ on utilise celles de $X^{(1)}$ malgré que $x_1^{(2)}$ est déjà calculée et elle est meilleure que $x_1^{(1)}$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Gauss-Seidel

D'ici vient le principe de la méthode de Gauss-Seidel, on utilise chaque composante des quelle sera calculée. Ainsi, pour calculer la composante $x_i^{(k+1)}$, on utilise toutes les composantes de $x_1^{(k+1)}$ à $x_{i-1}^{(k+1)}$ déjà calculées à l'itération (k+1) en plus de celles $x_{i+1}^{(k+1)}$ à $x_n^{(k+1)}$ qui ne sont qu'à l'itération (k).

On écrit donc :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ x_3^{(k+1)} = (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)})/a_{33} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn} \end{cases} \quad (4)$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Gauss-Seidel

En prenant une estimation initiale $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)$ et en utilisant le système (4) on calcule $X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}\right)$ ensuite on remplace le vecteur $X^{(1)}$ dans le système (4) avec k=1 on calcule $X^{(2)}$ et continue de la même façon de calculer les vecteurs $X^{(3)}, X^{(4)}, X^{(5)}, \cdots$ jusqu'à la convergence.

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Gauss-Seidel

Exemple :

Résoudre par la méthode de Gauss-seidel en utilisant 3 itérations et un vecteur initial $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le système

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ -x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

Le système s'écrira

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(6 + x_2^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(6 + x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Gauss-Seidel

1ere itération

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{4}\left(6 + x_2^{(0)}\right) = 1.5 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{4}\left(4 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)}\right) = 1.375 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{4}\left(6 + x_2^{(1)}\right) = 1.8437 \end{cases}$$

2éme itération

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{1}{4}\left(6 + x_2^{(1)}\right) = 1.8437 \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{4}\left(4 + x_1^{(2)} + x_3^{(1)}\right) = 1.9218 \\ x_3^{(2)} = \dfrac{1}{4}\left(6 + x_2^{(2)}\right) = 1.9804 \end{cases}$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: Gauss-Seidel

3éme itération

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{4}\left(6 + x_2^{(2)}\right) = 1.9804 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_1^{(3)} + x_3^{(2)}\right) = 1.9902 \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{4}\left(6 + x_2^{(3)}\right) = 1.9975 \end{cases}$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: convergence

Condition de convergence des méthodes itératives

Pour que les méthodes itératives de résolution des systèmes d'équations linéaires convergent il faut que la matrice A soit diagonalement dominante ce qui est très facile à vérifier.

On dit qu'une matrice est diagonalement dominante si la valeur absolue de l'élément de la diagonale est supérieure à la somme des valeurs absolues de tous les autres éléments sur la même ligne. On écrit donc $|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| + \cdots + |a_{in}| \quad (5)$

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Avec i variable entre 1 et n le nombre de lignes ou de colonnes de la matrice.

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: convergence

Exemple :

Résoudre par la méthode de Jacobi en utilisant 3 itérations et un vecteur initial $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le système $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

Le système s'écrira en forme réduite :

$$\begin{cases} x_1 = (-1 - x_2 - 3x_3)/-1 \\ x_2 = (2 - x_1)/2 \\ x_3 = (1 - 3x_1 - x_2)/-1 \end{cases} \quad \text{sera} \quad \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 + 3x_3 \\ x_2 = 1 - x_1/2 \\ x_3 = -1 + 3x_1 + x_2 \end{cases}$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: convergence

1ere itération

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + x_2^0 + 3x_3^0 \\ x_2^1 = 1 - x_1^0/2 \\ x_3^1 = -1 + 3x_1^0 + x_2^0 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^1 = 1 \\ x_2^1 = 1 \\ x_3^1 = -1 \end{cases}$$

2éme itération

$$\begin{cases} x_1^2 = 1 + x_2^1 + 3x_3^1 \\ x_2^2 = 1 - x_1^1/2 \\ x_3^2 = -1 + 3x_1^1 + x_2^1 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^2 = -1 \\ x_2^2 = 0.5 \\ x_3^2 = 3 \end{cases}$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: convergence

3éme itération

$$\begin{cases} x_1^3 = 1 + x_2^2 + 3x_3^2 \\ x_2^3 = 1 - x_1^2/2 \\ x_3^2 = -1 + 3x_1^2 + x_2^2 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^3 = 10{,}5 \\ x_2^3 = 1{,}5 \\ x_3^3 = -3{,}5 \end{cases}$$

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires: convergence

Critère d'arrêt de calcul pour la méthode de Jacobi et Gauss-Seidel

On arrête les calculs pour cette méthode lorsque la différence absolue entre deux itérations successives soit inférieure à une certaine précision ε donnée.

$$\left|X^{(n+1)} - X^{(n)}\right| < \varepsilon \qquad (6)$$

Ici, il faut vérifier la différence pour toutes les composantes une par une.

$$\left|x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}\right| < \varepsilon, \left|x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}\right| < \varepsilon, \cdots, \left|x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)}\right| < \varepsilon$$