

Chapitre 3

Calcul des réseaux électriques

I. Introduction

Une ligne de transmission électrique a quatre paramètres qui affectent sa capacité à remplir sa fonction dans le cadre d'un système d'alimentation: la résistance **R**, l'inductance **L**, la capacité **C** et la conductance **G**. Le quatrième paramètre, la conductance, existe entre les conducteurs ou entre les conducteurs et le sol. La conductance tient compte du courant de fuite aux isolants de la ligne aérienne et de l'isolation des câbles. Puisque les fuites sur les isolateurs des lignes aériennes sont négligeables, la conductance entre les conducteurs d'une ligne aérienne est généralement négligée.

II. Lignes de transmission aériennes :

Un circuit de transport consiste de conducteurs, isolateurs et généralement des câbles de garde comme montré sur la fig. 1.

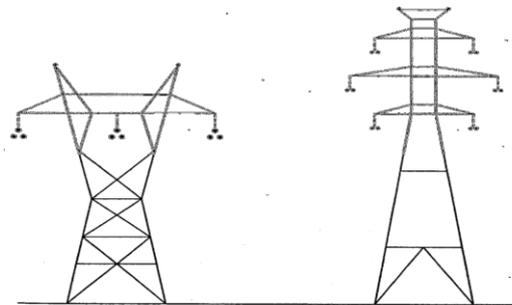


Fig.1. Structure typiquement en treillis pour une ligne de transmission à 345 kV.

Dans les premiers temps du transport de l'électricité, les conducteurs électriques étaient généralement en cuivre, mais les conducteurs en aluminium ont complètement remplacé le cuivre pour les lignes aériennes en raison du coût beaucoup plus faible d'un conducteur en aluminium par rapport à un conducteur de cuivre de même résistance. Le fait qu'un conducteur en aluminium ait un diamètre plus grand qu'un conducteur en cuivre de la même résistance est également un avantage. Avec un diamètre plus grand, les lignes de flux électrique provenant du conducteur seront plus éloignées à la surface du conducteur pour la même tension. Cela signifie qu'il y a un gradient de tension plus faible à la surface du conducteur et moins de tendance à ioniser l'air autour du conducteur. L'ionisation produit l'effet indésirable appelé couronne.

Types des conducteurs

Jusqu'à présent, nous avons considéré que les lignes de transport sont constituées de conducteurs cylindriques pleins simples pour les chemins aller-retour. Pour fournir la flexibilité nécessaire pour le cordage, les conducteurs utilisés dans la pratique sont toujours toronnés sauf pour les très petites sections transversales. Les conducteurs toronnés sont constitués de brins de fil, électriquement en parallèle, avec des couches alternées espacées dans la direction opposée pour empêcher le déroulement. Le nombre total de brins (N) dans des câbles à brins concentriques avec un espace total annulaire rempli de brins de diamètre uniforme (d) est donné par : $N = 3x^2 - 3x + 1$

où x est le nombre de couches dans lesquelles le brin central unique est compté comme première couche.
Le diamètre total (D) d'un conducteur toronné est :

$$D = (2x - 1)d$$

Les symboles identifiant différents types de conducteurs en aluminium sont les suivants:

AAC : All-Aluminum Conductors (conducteurs tout en aluminium) ;

AAAC : All-Aluminum-Alloy Conductors (conducteurs tout en alliage d'aluminium) ;

ACSR : Aluminum Conductor, Steel-Reinforced (conducteur en aluminium, renforcé en acier) ;

ACAR : Aluminum Conductor Alloy-Reinforced (conducteur en aluminium renforcé d'alliage).

La fig.2 montre la section d'un câble en aluminium renforcé par de l'acier (ACSR). Le conducteur montré a 7 brins d'acier formant un noyau central, autour de laquelle il y a deux couches de brins d'aluminium. Il y a 24 brins d'aluminium dans les deux couches extérieures. Le câblage du conducteur est spécifié comme 24 Al/7 St, ou simplement 24/7. Différentes résistances à la traction, capacités de courant et tailles de conducteurs sont obtenues en utilisant différentes combinaisons d'acier et d'aluminium.

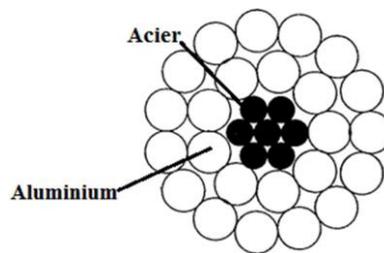


Fig.2 .Coupe transversale d'un conducteur renforcé d'acier, 7 brins d'acier, et 24 brins en aluminium.

Section des conducteurs

Les tailles des conducteurs sont basées sur le mil circulaire. Un mil circulaire est l'aire d'un cercle qui a un diamètre de 1 mil.

1 mil linéaire = 0.001 inch (pouce)=0.0254 mm.

1 mil circulaire = zone de cercle de 1 mil linéaire de diamètre

$$= \frac{1}{4} \pi \text{ mils carrés} = \frac{1}{4} \pi \times 10^{-6} = 0.7854 \times 10^{-6} \text{ ikch carré}$$

Un millier de mils circulaires est souvent utilisé comme une unité, par exemple, une taille donnée comme 250 kcmil ou MCM se réfère à 250000 mils circulaires, ou 250000 cmil

Circuit équivalent d'une ligne aérienne

Une ligne aérienne ou un câble peuvent être représentées comme un circuit à constantes distribuées, comme il est montré sur la fig.3. Les résistances, l'inductance, la capacité, et la conductance de fuite d'un circuit à constantes distribuées sont réparties uniformément le long de la ligne. En fig.3, par unité de longueur, L représente l'inductance d'un conducteur de ligne au neutre, r la résistance à courant alternatif, C la capacité d'un conducteur de ligne au neutre, et G la conductance.

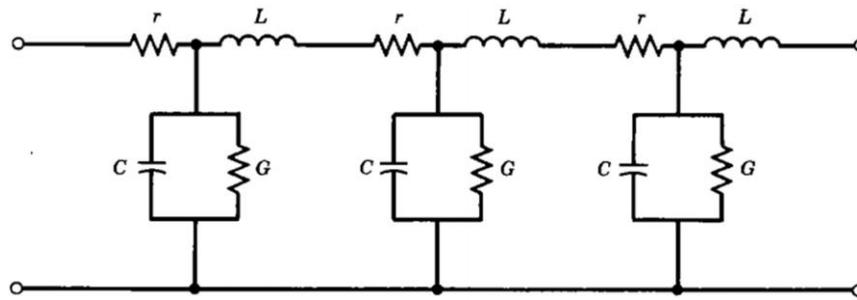


Fig.3. Circuit équivalent d'un circuit équivalent à constantes distribuées d'une ligne.

Détermination des paramètres linéiques d'une ligne

Résistance de la ligne

Bien que la contribution de la résistance de ligne à l'impédance de ligne en série puisse être négligée dans la plupart des cas, c'est la principale source de perte de puissance de ligne.

La résistance ohmique à courant continu d'un conducteur de longueur l et d'une section S est donnée par la formule :

$$R = \frac{\rho(T)l}{S} \text{ [}\Omega\text{]} \quad \rho(T) = \rho(T_0)(1 + \alpha(T - T_0))$$

Où $\rho(T_0)$ est la résistivité du matériau du conducteur à 20°C en [fi. m]. α est le coefficient de température [C⁻¹] ($\alpha = 0.004^\circ\text{C}^{-1}$ pour Cu et Al).

En courant alternatif : S augmente $\Rightarrow R_{ac} > R_{dc} \Rightarrow R_{ac} \approx 1.02 R_{dc}$ (à 60 Hz : 5% à 10%)

Inductance d'une ligne

Un conducteur porteur de courant produit des lignes de flux magnétiques concentriques autour du conducteur. Si le courant varie avec le temps, le flux magnétique change et une tension est induite. Par conséquent, une inductance est présente, définie comme le rapport de la liaison de flux magnétique λ et du courant I . Le flux magnétique produit par le courant dans les conducteurs de ligne de transmission produit une inductance totale dont l'amplitude dépend de la configuration de la ligne.

Inductance d'un conducteur simple

Considérons un conducteur cylindrique plein d'une longueur infinie, de rayon r , transportant le courant I comme indiqué à la Fig.4. Si le conducteur est constitué d'un matériau non magnétique et que le courant est supposé uniformément distribué (pas d'effet de peau), les lignes de champ magnétique interne et externe générées sont des cercles concentriques autour du conducteur dont la direction est définie par la règle de droite.

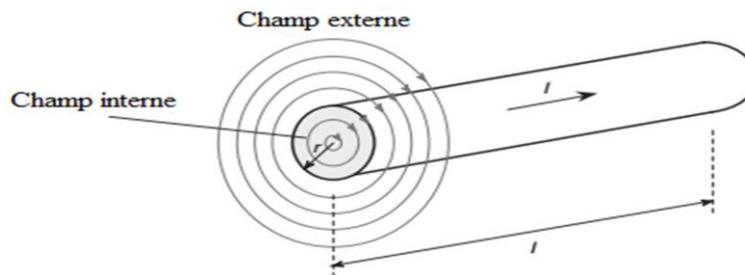


Fig.4. Lignes de flux magnétique concentriques externes et internes autour du conducteur.

L'intensité du champ magnétique H_s , autour d'un cercle de rayon x , est constant et tangent au cercle. La loi d'Ampère est donnée par :

$$\int_0^{2\pi x} H_x \cdot dl = I_x \Rightarrow H_x = \frac{I_x}{2\pi x}$$

I_s est le courant enfermé au rayon x . Comme montré en fig.5, l'équation de H_s est tout ce qui est nécessaire pour évaluer la liaison de flux λ d'un conducteur. L'inductance du conducteur peut être définie comme la somme des contributions des liaisons de flux internes et externes au conducteur.

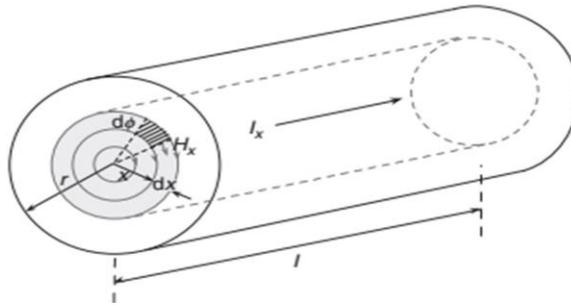


Fig.5. Flux magnétique interne.

Inductance interne due au flux magnétique interne

Pour obtenir l'inductance interne, un champ magnétique de rayon x à l'intérieur du conducteur de longueur l est choisi, comme le montre la fig.5.

En négligeant l'effet de peau et en assumant une densité de courant tout au long de la section du conducteur ; c.à.d. : $\frac{l}{hr^2} = \frac{I_x}{hS^2} \Rightarrow H_s = \frac{l}{2hr^2} x$

Pour un conducteur non magnétique à perméabilité constante μ_0 , la densité de flux magnétique est donnée par : $B_s = \mu_0 H_s$:

$$B_s = \frac{\mu_0 l}{2\pi r^2} x$$

Où μ_0 est la perméabilité de l'espace libre (ou de l'air) et est égal à $4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$.

Le flux différentiel $d\phi$ pour une petite région d'épaisseur dx et 1 mètre de longueur du conducteur est :

$$d\phi_s = B_s dx \cdot 1 = \frac{\mu_0 l}{2\pi r^2} x dx$$

Le flux $d\phi_s$ relie seulement la fraction du conducteur du centre au rayon x ; donc seulement $\frac{hS}{hr^2}$ du courant total est relié par le flux, c.à.d :

$$d\lambda_s = \left(\frac{x^2}{r^2}\right) d\phi_s = \frac{\mu_0 l}{2\pi r^4} x^3 dx$$

La liaison de flux total est le résultat de l'intégration de $d\lambda_s$ du 0 à r .

$$\lambda_{int} = \frac{\mu_0 l}{2\pi r^4} \int_0^r x^3 dx = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \text{ Wb/m}$$

à partir de $L = \frac{\lambda_{int}}{I}$, l'inductance due à la liaison du flux interne est :

$$L_{int} = L = \frac{\lambda_{int}}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

Inductance interne due au liaison de flux externe

Considérons le H_s externe du conducteur au rayon $x > r$ comme montré dans la fig.6. Puisque le cercle au rayon x entoure tout le courant, $I_s = I$: $B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$

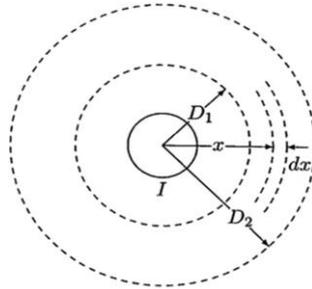


Fig.6. Liaison de flux entre D1 et D2.

Puisque le courant total I est entouré par le flux en dehors du conducteur, la liaison de flux $d\lambda_s$ est numériquement égal au flux $d\phi_s$. Comme pour le cas précédent :

$$d\lambda_s = d\phi_s = B_s dx \cdot 1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx$$

La liaison de flux entre les deux les deux points D1 et D2 est trouvée par l'intégration de $d\lambda_s$

$$\lambda_{est} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{D_1}^{D_2} \frac{1}{x} dx = 2 \times 10^{-7} I k \frac{D_2}{D_1} \text{ Wb/m}$$

L'inductance entre deux points externes à un conducteur sont :

$$L_{est} = 2 \times 10^{-7} I k \frac{D_2}{D_1} \text{ H/m}$$

Inductance des lignes monophasées

Dans cette ligne chaque conducteur est parcouru par un courant $I_1 = -I_2$ (Fig.7). Pour obtenir l'inductance du conducteur 1 due à la liaison de flux externe nette, on évalue L_{est} de $D_1 = r_1$ à $D_2 = D$.

$$L_{1(est)} = 2 \times 10^{-7} I k \frac{D}{r_1} \text{ H/m}$$

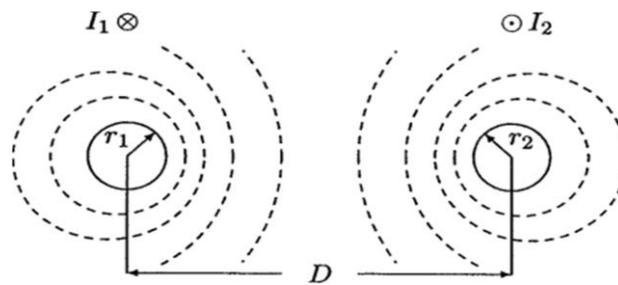


Fig.7. Ligne monophasé à deux fils.

L'inductance totale du conducteur 1 est donc : $L_1 = \frac{1}{2} \times 10^{-7} + 2 \times 10^{-7} I k \frac{D}{r_1} \text{ H/m}$

Finalement : $L_1 = 2 \times 10^{-7} I k \frac{1}{r_1'} + 2 \times 10^{-7} I k \frac{D}{r_1} \text{ H/m}$

Et $L_2 = 2 \times 10^{-7} I k \frac{1}{r_2'} + 2 \times 10^{-7} I k \frac{D}{r_1} \text{ H/m}$

Où $r_1' = r_1 e^{-1/4}$ et $r_2' = r_2 e^{-1/4}$, si les deux conducteurs sont identiques $r_1 = r_2 = r$ et $L_1 = L_2 = L$,

l'inductance par phase par mètre de longueur est donnée par :

$$L = 2 \times 10^{-7} lk \frac{1}{r'} + 2 \times 10^{-7} lk \frac{D}{1} \quad H/m$$

Le terme $r' = re^{-\frac{1}{4}}$ est connue mathématiquement comme le rayon moyen géométrique propre d'un cercle de rayon r (RMG) et il est désigné par D_s . Donc l'inductance peut s'écrire :

$$L = 0.2 lk \frac{D}{D_s} \quad mH/km$$

Inductance d'une ligne triphasée symétrique

Considérons une ligne triphasée d'un mètre de longueur avec 3 conducteurs, chacun de rayon r , symétriquement espacés en configuration triangulaire (fig.8)

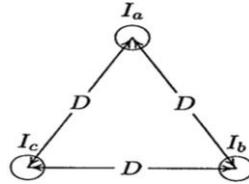


Fig.8. Ligne triphasée avec espacement équilibré.

Assumant des courants triphasés équilibrés, nous avons : $I_a + I_b + I_c = 0$

La liaison de flux totale du conducteur de phase a est :

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} (I_a lk \frac{1}{r'} + I_b lk \frac{1}{D} + I_c lk \frac{1}{D}), \text{ et substituant pour } I_b + I_c = -I_a:$$

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} (lk \frac{1}{r'} - I_a lk \frac{1}{D}) = 2 \times 10^{-7} I_a lk \frac{1}{r'}$$

à cause de la symétrie $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c$, et les trois inductances sont symétriques. donc :

$$L = 0.2 lk \frac{D}{D_s} \quad mH/km$$

r' est le rayon moyen géométrique RMG ou GMR et est connue comme D_s . $D_s = re^{-\frac{1}{4}}$ pour un conducteur rond solide, et pour les conducteurs toronnés (avec brins) D_s est évalué par les expression suivantes dans ce chapitre.

Inductance d'une ligne triphasée non symétrique (Ligne transposée)

Une méthode pour trouver la symétrie en bonne mesure et d'obtenir un modèle par phase et de considérer la transposée (Fig.9).

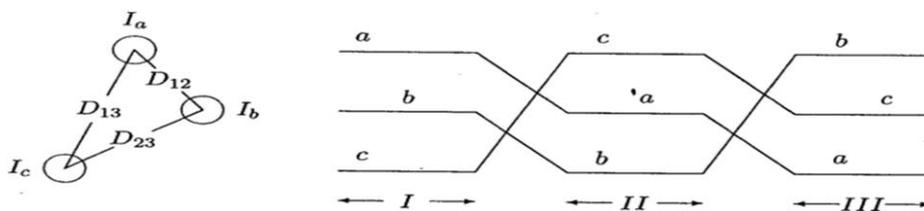


Fig.9. Ligne triphasée transposée.

Les liaisons de flux sont données pour chaque conducteur par :

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} (lk \frac{1}{r'} + I lk \frac{1}{D_{12}} + I lk \frac{1}{D_{13}})$$

$$\lambda_b = 2 \times 10^{-7} (lk \frac{1}{D_{12}} + I lk \frac{1}{r'} + I lk \frac{1}{D_{23}})$$

$$\lambda_c = 2 \times 10^{-7} \left(lk_a \frac{1}{D_{13}} + I lk_b \frac{1}{D_{23}} + I c lk_r' \right)$$

Pour des courants triphasés équilibrés avec I_a comme référence, nous avons : $I_b = I_a [240^\circ = a^2 I_a$;

$I_c = I_a [120^\circ = a I_a$, avec $a^2 = 1 [240^\circ$; $a = 1 [120^\circ$, donc :

$$L_a = \frac{\lambda_a}{I_a} = 2 \times 10^{-7} \left(lk_a \frac{1}{r'} + a^2 lk_b \frac{1}{D_{12}} + a lk_c \frac{1}{D_{13}} \right)$$

$$L_b = \frac{\lambda_b}{I_b} = 2 \times 10^{-7} \left(a lk_a \frac{1}{D_{12}} + lk_b \frac{1}{r'} + a^2 lk_c \frac{1}{D_{23}} \right)$$

$$L_c = \frac{\lambda_c}{I_c} = 2 \times 10^{-7} \left(a^2 lk_a \frac{1}{D_{13}} + a lk_b \frac{1}{D_{23}} + lk_c \frac{1}{r'} \right)$$

Dans une ligne transposée, l'inductance est : $L = \frac{L_a + L_b + L_c}{3}$, et notons aussi que $a^2 + a = -1$:

$$L = \frac{2 \times 10^{-7}}{3} \left(3 lk_r' - lk_a \frac{1}{D_{12}} - lk_b \frac{1}{D_{23}} - lk_c \frac{1}{D_{13}} \right) = 2 \times 10^{-7} \left(lk_r' - k \frac{1}{(D_{12} D_{23} D_{13})^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$L = 2 \times 10^{-7} lk \frac{(D_{12} D_{23} D_{13})^{\frac{1}{3}}}{r'} \text{ H/m}$, ou l'inductance par phase par km est donnée par :

$$L = 0.2 lk \frac{GMD}{D_s} \text{ mH/km} \quad \text{où } GMD = \sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{13}}$$

Le GMD (Geometric Mean Radius) ou DMG (Distance Moyenne Géométrique) est la distance

équivalente entre conducteurs. D_s est le rayon moyen géométrique RMG ou GMR (en anglais). $D_s = r' =$

$r e^{-\frac{1}{4}}$ pour un conducteur rond solide, pour les conducteurs toronnés (avec brins) D_s est évalué par les expressions suivantes dans ce chapitre (ou donné par des tableaux).

Inductance des conducteurs composites

Considérons une ligne monophasée constituée de deux conducteurs composites x et y comme la montre la

fig.10. Le courant est assumé être divisé uniformément sur les sous-conducteurs. Le courant par brin est $\frac{I}{n}$ pour x et $-\frac{I}{m}$ pour y.

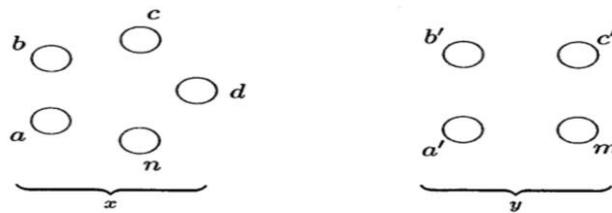


Fig.10. Ligne monophasée avec deux conducteurs composites.

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} \left(I \frac{1}{k} \left(lk_a \frac{1}{r_s} + lk_b \frac{1}{D_{ab}} + lk_c \frac{1}{D_{ac}} + \dots + lk_n \frac{1}{D_{an}} \right) - 2 \times 10^{-7} \frac{I}{m} \left(lk_a \frac{1}{r_{aaF}} + lk_b \frac{1}{D_{abF}} + lk_c \frac{1}{D_{acF}} + \dots + lk_m \frac{1}{D_{am}} \right) \right)$$

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} I lk \frac{\sqrt[3]{D_{aaF} D_{abF} D_{acF} \dots D_{am}}}{S_{abacan}}$$

L'inductance du sous-conducteur a est :

$$L_a = \frac{\lambda_a}{I/k} = 2k \times 10^{-7} l k \frac{\sqrt[n]{D_{aa}^F D_{ab}^F D_{ac}^F \dots D_{am}^F}}{n \sqrt[n]{r'^D D \dots D}}$$

De la même manière pour les autres conducteurs :

$$L_n = \frac{\lambda_n}{I/k} = 2k \times 10^{-7} l k \frac{\sqrt[n]{D_{na}^F D_{nb}^F D_{nc}^F \dots D_{nm}^F}}{n \sqrt[n]{r'^D D \dots D}}$$

L'inductance moyenne de n'importe quel sous-conducteur du groupe x est :

$$L_{moy} = \frac{L_a + L_b + L_c + \dots + L_n}{k}$$

Puisque les sous-conducteurs du conducteur x sont électriquement parallèle :

$$L_S = \frac{L_{moy}}{k} = \frac{L_a + L_b + L_c + \dots + L_n}{k^2}$$

En substituant les valeurs de $L_a, L_b, L_c, \dots, L_n$ nous avons :

$$L_S = 2 \times 10^{-7} l k \frac{GMD}{GMR_S} \quad H/m$$

$$GMD = \sqrt[n]{(D_{aa} D_{bb} \dots D_{nn}) \dots (D_{na} D_{nb} \dots D_{nm})}; \text{ et } GMR_S = \sqrt[n]{(D_{aa} D_{bb} \dots D_{nn}) \dots (D_{na} D_{nb} \dots D_{nm})} \quad \text{ou } D_{aa} = D_{bb} = \dots = D_{nn} = r'_S$$

L'inductance du conducteur y peut être obtenue d'une façon similaire. GMR_y est différent mais GMD est le même.

GMR des conducteurs en faisceaux

Les lignes de transport THT sont généralement construites avec des conducteurs en faisceaux. Typiquement, les conducteurs en faisceaux sont constitués de deux, trois, ou quatre sous conducteurs arrangés symétriquement en configuration comme montré en fig.11.

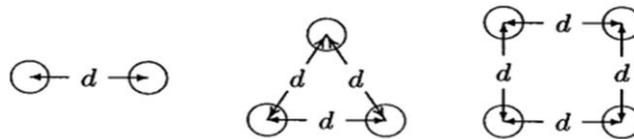


Fig.11. Exemples des arrangements en faisceaux.

Le GMR du conducteur équivalent singulier est obtenu en utilisant l'expression de GMR_S . Si D_s est le GMR de chaque sous-conducteur :

- Pour le faisceau de deux sous-conducteurs : $D_s^b = \sqrt[4]{(D \times d)^2} = \sqrt{D \times d}$

- Pour le faisceau de trois sous-conducteurs : $D_s^b = \sqrt[9]{(D \times d \times d)^3} = \sqrt[3]{D \times d^2}$

- Pour quatre sous-conducteurs : $D_s^b = \sqrt[16]{(D \times d \times d \times d \times \frac{1}{2})^4} = 1.09 \sqrt[4]{D \times d^3}$

Capacité d'une ligne

Capacité d'une ligne monophasée

Par définition la capacité est donnée par $C = \frac{q}{V}$. Considérons un long conducteur rond de rayon r portant une charge de q coulombs/m comme montré sur la fig.12.

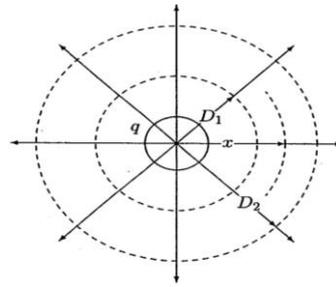


Fig.12. Champ électrique autour d'un long conducteur rond.

A partir de la loi de Gauss, pour un mètre de longueur, la densité de flux électrique à un cylindre de rayon

$$x \text{ est : } D = \frac{q}{\mathcal{A}} = \frac{q}{2\pi x l} \Rightarrow E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 x l}$$

Avec E est l'intensité du champ électrique, et ϵ_0 est la permittivité du vide ($8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$).

Par la suite la différence de potentiel entre les cylindres de la position D1 à D2 est :

$$V_{12} = \int_{D_1}^{D_2} E dx = \int_{D_1}^{D_2} \frac{q}{2\pi \epsilon_0 x} dx = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{D_2}{D_1}$$

Considérant une ligne monophasée d'un mètre constituée de deux long conducteurs ronds solides chacun de rayon r comme le montre la fig.13. suivante :

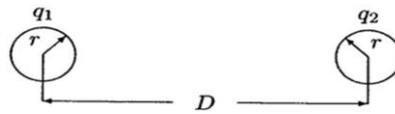


Fig.13. Ligne monophasée à deux fils.

Considérons le conducteur 1 seul à avoir une charge q_1 , la tension entre le conducteur 1 et 2 :

$$V_{12(q_1)} = \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{D}{r}$$

Pour le conducteur 2 seul à avoir une charge q_2 , la tension entre le conducteur 2 et 1 :

$$V_{21(q_2)} = \frac{q_2}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{D}{r}$$

Puisque $V_{12(q_2)} = -V_{21(q_2)}$, la différence de potentiel due au deux charges est donné par :

$$V_{12} = V_{12(q_1)} + V_{12(q_2)} = \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{D}{r} + \frac{q_2}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{D}{r}$$

Pour une ligne monophasée $q_2 = -q_1 = -q$, donc : $V_{12} = \frac{q}{\pi \epsilon_0} \ln \frac{D}{r} \text{ F/m}$, Donc :

$$C_{12} = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{D}{r}} \text{ F/m}$$

C_{12} est la capacité entre les conducteurs. Pour trouver la capacité entre chaque conducteur et le neutre

(Fig.14), nous savons que $V_{1n} = \frac{1}{2} V_{12}$, par la suite $C = 2C_{12}$ ou :

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{D}{r}} \text{ F/m} \quad \text{ou} \quad C = \frac{0.0556}{\ln \frac{D}{r}} \mu\text{F/km}$$



Fig.14. Illustration de la capacité au neutre.

La capacité par phase contient les termes analogues à celles de l'inductance par phase. Cependant, contrairement à l'inductance (GMR), le rayon du conducteur est utilisé.

Capacité des lignes triphasées

Considérant une ligne triphasée avec trois longs conducteurs d'un mètre de longueur, chacun de rayon r , avec espacement des conducteurs comme montré en fig.15.

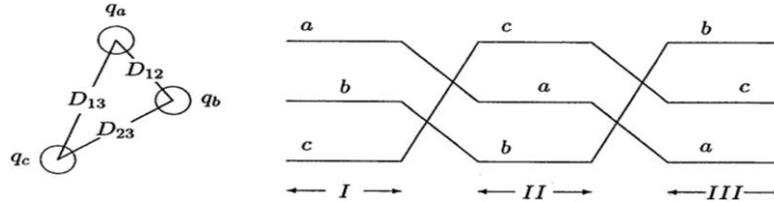


Fig.15. ligne de transport triphasée.

Pour un système équilibré $q_a + q_b + q_c = 0$. Négligeant l'effet du sol et les câbles de garde et en

assumant que la ligne est transposée : $V_{ab(I)} = \frac{1}{2hs_0} (q_a l k \frac{D_{12}}{r} + q_b l k \frac{r}{D_{12}} + q_c l k \frac{D_{23}}{D_{13}})$

Pour la deuxième section de la transposition : $V_{ab(II)} = \frac{1}{2hs_0} (q_a l k \frac{D_{23}}{r} + q_b l k \frac{r}{D_{23}} + q_c l k \frac{D_{13}}{D_{12}})$

Et pour la troisième section : $V_{ab(III)} = \frac{1}{2hs_0} (q_a l k \frac{D_{13}}{r} + q_b l k \frac{r}{D_{13}} + q_c l k \frac{D_{12}}{D_{23}})$

La valeur moyenne de V_{ab} est : $V_{ab} = \frac{1}{(3)2hs_0} (q_a l k \frac{D_{12}D_{23}D_{13}}{r^3} + q_b l k \frac{r}{D_{12}D_{23}D_{13}} + q_c l k \frac{D_{12}D_{23}D_{13}}{D_{12}D_{23}D_{13}})$ ou

$$V_{ab} = \frac{1}{2hs_0} (q_a l k \frac{(D_{12}D_{23}D_{13})^{\frac{1}{3}}}{r} + q_b l k \frac{r}{(D_{12}D_{23}D_{13})^{\frac{1}{3}}})$$

$$V_{ab} = \frac{1}{2hs_0} (q_a l k \frac{GMD}{r} + q_b l k \frac{r}{GMD}), \text{ de même : } V_{ac} = \frac{1}{2hs_0} (q_a l k \frac{GMD}{r} + q_c l k \frac{r}{GMD})$$

$$\text{Avec : } GMD = \sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{13}}$$

Substituant pour $q_b + q_c = -q_a$, nous avons :

$$V_{ab} + V_{ac} = \frac{1}{2\pi s_0} (2q_a l k \frac{GMD}{r} - q_a l k \frac{r}{GMD}) = \frac{3q_a}{2\pi s_0} l k \frac{GMD}{r}$$

Pour des tensions triphasées équilibrées : $V_{ab} = V_{an} 0^\circ - V_{an} -120^\circ$; $V_{ac} = V_{an} 0^\circ - V_{an} -240^\circ$, donc :

$V_{ab} + V_{ac} = 3V_{an}$, par la suite la capacité par phase au neutre :

$$C = \frac{q_a}{V_{an}} = \frac{2\pi s_0}{l k \frac{GMD}{r}} \text{ F/m} \quad \text{ou} \quad C = \frac{0.0556}{l k \frac{GMD}{r}} \mu\text{F/km}$$

Effet des conducteurs en faisceaux

La procédure pour trouver la capacité d'une ligne triphasée transposée avec des conducteurs en faisceaux suit les mêmes étapes que dans la section précédente :

$$C = \frac{2\pi s_0}{l k \frac{GMD}{r^b}} \text{ F/m}$$

L'effet des faisceaux est d'introduire un rayon équivalent r^b . r^b est similaire au GMR calculé pour l'inductance à l'exception que le rayon r de chaque sous-conducteur est utilisé à la place de D_s . Donc :

- Pour le faisceau de deux sous-conducteurs : $r^b = \sqrt{r \times d}$

- Pour le faisceau de trois sous-conducteurs : $D_{\xi} = 3\sqrt{r \times d^2}$

- Pour quatre sous-conducteurs : $D_{\xi} = 1.094\sqrt{r \times d^3}$

Effet du sol sur la capacité

L'effet du sol est d'augmenter la capacité. Le sol est une surface équipotentielle donc les lignes de flux sont forcées de couper la surface d'une façon orthogonale. L'effet de la présence du sol peut être pris en compte par la méthode des charges images introduits par Kelvin. Pour appliquer la méthode des images par le calcul de la capacité pour une ligne triphasée. Considérons dans la fig.16 une ligne transposée et des conducteurs a, b, c portant des charges q_a, q_b, q_c et occupent les positions 1,2, et 3, respectivement, dans la première partie du cycle de transposition. Au-dessous se trouvent les conducteurs avec les charges images $-q_a, -q_b, -q_c$, la capacité au neutre est donnée par :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{lk \frac{GMD}{r^b} - lk \left(\frac{\sqrt{H_{12}H_{23}H_{31}}}{\sqrt[3]{H_1H_2H_3}} \right)} \quad F/m \text{ au neutre}$$

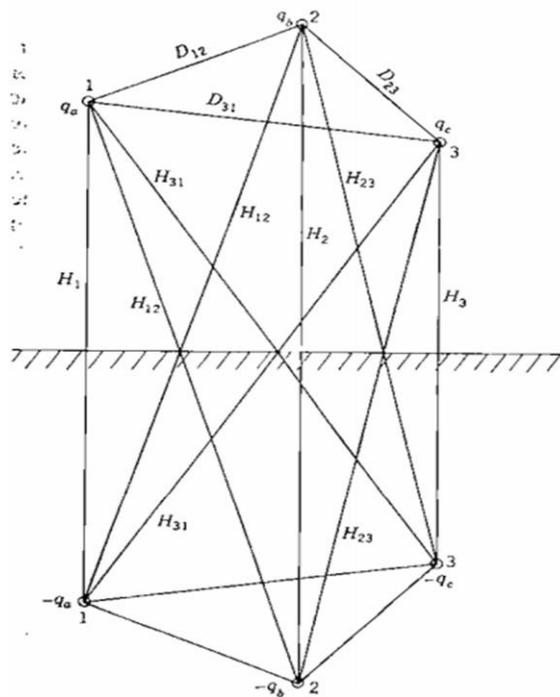


Fig.16. Ligne triphasée et son image.

III. Modélisation et performance des lignes électriques

Dans les sections précédentes les paramètres par phase des lignes de transport sont obtenus. Dans ce qui va suivre, nous allons établir la représentation de la performance des lignes de transport sous les conditions d'opération normales. Les lignes de transport sont représentées par un modèle équivalent avec les paramètres «par phase » appropriés du circuit. Le modèle utilisé pour calculer les tensions, les courants, et les écoulements de puissance dépend de la longueur de la ligne.

Modèle d'une ligne courte

La capacité peut souvent être ignorée sans une erreur considérable si les lignes sont d'une longueur de moins de 80 km (60 Hz) ou n'excédant pas 69 kV. Le modèle de la ligne courte (Fig.17) est obtenu par :

$$Z = z.l = (r + j\omega L).l = R + jX$$

Où r, L sont la résistance et l'inductance par phase par unité de longueur respectivement, l est la longueur de la ligne.

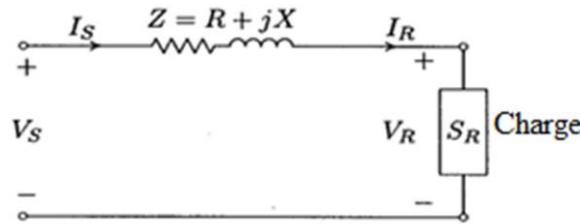


Fig.17. Modèle d'une ligne courte.

Si une charge triphasée est connectée à la fin de la ligne, le courant à l'extrémité réceptrice est :

$$I_R = \frac{S_{(3\phi)}^*}{3V_R^*}$$

$V_S = V_R + ZI_R$ et puisque la capacité shunt est négligée, donc $I_S = I_R$.

La ligne de transport peut être représentée par un quadripôle comme le montre la Fig. 18.

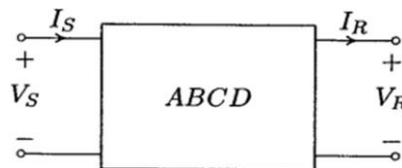


Fig.18. Représentation à deux ports d'une ligne de transport.

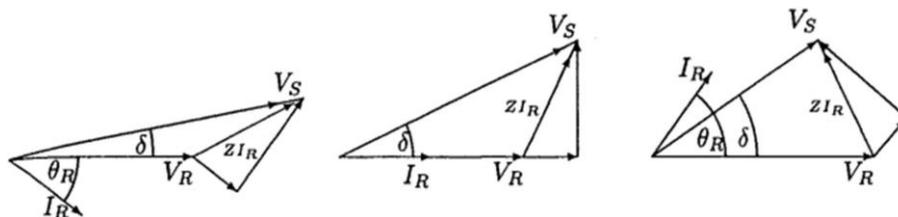
$$\begin{cases} V_S = AV_R + BI_R \\ I_S = CV_R + DI_R \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \Rightarrow A = 1; B = Z; C = 0; \text{ et } D = 1$$

Régulation de la tension

La régulation de la tension de la ligne peut être définie comme le changement en % en tension à l'extrémité de réception passant de charge nulle à la charge totale : $V_R = \frac{|V_{R(NoLoad)}| - |V_{R(FullLoad)}|}{|V_{R(FullLoad)}|} \times 100\%$

A charge nulle $I_R = 0$; donc : $V_{R(NoLoad)} = \frac{V_S}{A}$. Pour une ligne courte $A=1$ et $V_{R(NoLoad)} = V_S$.

La régulation de la tension est mesurée de la chute de tension de la ligne et dépend du facteur de puissance de la charge. La régulation de la tension sera plus faible pour des Fp en retard faible. Pour des charges capacitives, c.à.d. Fp en avance, la régulation peut devenir négative (Fig. 19).



a) Charge à Fp retard b) charge à Fp unitaire c) charge à Fp en avance

Fig. 19. Diagramme de phase pour une ligne courte.

Une fois la tension à l'entrée est calculée, la puissance $S_{S(3\phi)} = 3V_S I_S^*$, et les pertes totales de la ligne sont

données par : $S_{L(3\phi)} = S_{S(3\phi)} - S_{R(3\phi)}$ et le rendement de la ligne est donnée par : $\eta = \frac{P_{R(3\phi)}}{P_{S(3\phi)}}$

avec $P_{R(3\phi)}$ et $P_{S(3\phi)}$ sont les puissances actives totales à la sortie et à la rentrée de la ligne respectivement.

Modèle d'une ligne moyenne

L'admittance shunt, habituellement la capacité pure, est incluse dans les calculs pour une ligne de longueur moyenne ($80\text{km} < l < 250\text{km}$). Si l'admittance totale de la ligne est divisée en deux parties égales placées aux extrémités émettrice et réceptrice de la ligne, le circuit est appelé un π nominal. Nous nous référons à la Fig. 20 pour dériver des équations. $Z = (r + j\omega L) \cdot l$ et $Y = (g + j\omega C) \cdot l$ sont l'impédance et l'admittance shunt totales de la ligne.

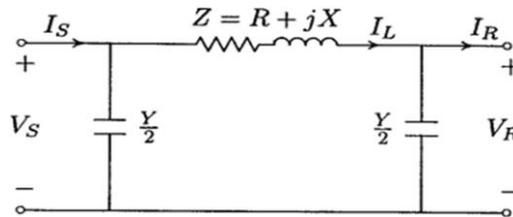


Fig.20. Modèle en π nominal d'une ligne de longueur moyenne.

Par application des loi de Kirchhoff en courant KCL et en tension KVL :

$$\begin{cases} I_L = I_R + \frac{Y}{2}V_R \\ V_S = V_R + ZI_L \end{cases} \Rightarrow V_S = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right)V_R + ZI_R$$

Le courant à l'extrémité émettrice est : $I_S = I_L + \frac{Y}{2}V_S$, en substituant pour I_L et V_S :

$$I_S = Y \left(1 + \frac{ZY}{4}\right)V_R + ZI_R$$

Pour une écriture en quadripole ABCD pour le modèle π nominal, nous avons :

$$A = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right); \quad B = Z; \quad C = Y \left(1 + \frac{ZY}{4}\right); \quad D = A = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right)$$

Le déterminant du système matriciel $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ est égal à 1 : $AD - BC = 1$

Donc, n peut écrire pour la deuxième extrémité : $\begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix}$ (*)

Modèle d'une ligne longue

Pour les lignes courtes et moyennes, des modèles raisonnablement exacts sont obtenus en assumant que les paramètres de la ligne sont à constantes localisés. Pour les lignes $\geq 250\text{km}$ et pour une solution plus exacte, l'effet exact des paramètres distribués doit être considéré. Dans cette section, les expressions des tensions et des courants en chaque point sur la ligne sont dérivées. Puis en se basant sur ces équations un modèle en π équivalent est obtenu pour la ligne longue. Le fig. 21 montre une phase d'une ligne distribuée de longueur l km.

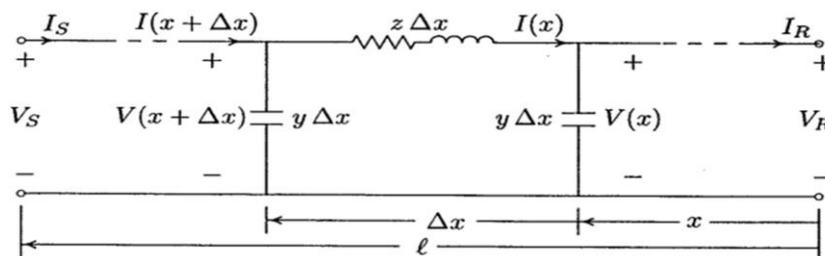


Fig.21. Ligne longue à paramètres distribués.

$z = (r + j\omega L)$ et $y = (g + j\omega C)$ sont l'impédance et l'admittance shunt de la ligne/km ou m.

Par application des lois de Kirchhoff en tension KVL :

$$V(x + \Delta x) = V(x) + z\Delta x \cdot I(x) \Rightarrow \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} = z \cdot I(x)$$

En posant $\Delta x \rightarrow 0$: $\frac{dV(x)}{dx} = z \cdot I(x)$ (*)

De même, Par application des lois de Kirchhoff en tension KVL :

$$I(x + \Delta x) = I(x) + y\Delta x \cdot V(x + \Delta x) \Rightarrow \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = y \cdot V(x + \Delta x)$$

En posant $\Delta x \rightarrow 0$: $\frac{dI(x)}{dx} = y \cdot V(x)$, en dérivant la 1^{ère} équation et en substituant par la 2^{ème} :

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = z \frac{dI(x)}{dx} = zy \cdot V(x), \quad \text{mettons: } \gamma^2 = zy \Rightarrow \frac{d^2V(x)}{dx^2} - \gamma^2 \cdot V(x) = 0$$

La solution de cette équation est de la forme : $V(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}$ (**), où $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{zy} = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)}$ est la constante de propagation, α est la constante d'atténuation, et β est la constante de phase mesurée en radian par unité de longueur.

à partir de (*): $I(x) = \frac{1}{z} \frac{dV(x)}{dx} = \frac{\gamma}{z} (A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}) = \sqrt{\frac{y}{z}} (A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x})$

$$I(x) = \frac{1}{Z_c} (A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}) (***) \Rightarrow Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}}$$

Pour trouver A_1 et A_2 , nous notons que lorsque $x = 0$, $V(x) = V_R$, $I(x) = I_R$, à partir de (**) et (***) :

$$A_1 = \frac{V_R + Z_c I_R}{2}; \quad A_2 = \frac{V_R - Z_c I_R}{2}, \quad \text{en substituant dans (**) et (**), nous avons:}$$

$$V(x) = \frac{V_R + Z_c I_R}{2} e^{\gamma x} + \frac{V_R - Z_c I_R}{2} e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{V_R + I_R Z_c}{2} e^{\gamma x} - \frac{V_R - I_R Z_c}{2} e^{-\gamma x}$$

Les équations de la tension et du courant peuvent être réarrangées sous forme :

$$V(x) = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} V_R + Z_c \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} I_R = \cosh \gamma x V_R + Z_c \sinh \gamma x I_R$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_c} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} V_R + \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} I_R = \frac{1}{Z_c} \sinh \gamma x V_R + \cosh \gamma x I_R$$

En mettant $x = l$, $V(l) = V_S$, $I(l) = I_S$, les équations de tension et du courant deviennent :

$$\begin{cases} V(l) = \cosh \gamma l V_R + Z_c \sinh \gamma l I_R & (*1) \\ I(l) = \frac{1}{Z_c} \sinh \gamma l V_R + \cosh \gamma l I_R & (*2) \end{cases} \Rightarrow A = \cosh \gamma l, B = Z_c \sinh \gamma l, C = \frac{1}{Z_c} \sinh \gamma l, \text{ et } D = A$$

Il est maintenant possible de trouver un modèle π équivalent exact, montré en Fig.22, pour remplacer les constantes ABCD du quadripôle. D'une façon similaire aux expressions d'une ligne moyenne obtenues pour le modèle en π nominal, pour le modèle π équivalent, nous avons :

$$V_S = \left(1 + \frac{Z'Y'}{2}\right) V_R + Z' I_R$$

$$I_S = Y' \left(1 + \frac{Z'Y'}{4}\right) V_R + Z' I_R$$

En comparant ces deux équations avec (* 1) et (* 2) et en notant que $\tanh \frac{\gamma l}{2} = \frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l}$, nous avons :

$$Z' = Z_c \operatorname{sikh} \gamma l = Z \frac{\operatorname{sikh} \gamma l}{\gamma l}; \quad \frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_c} \operatorname{takh} \frac{\gamma l}{2} = \frac{Y \operatorname{takh} \gamma l / 2}{\gamma l / 2}$$

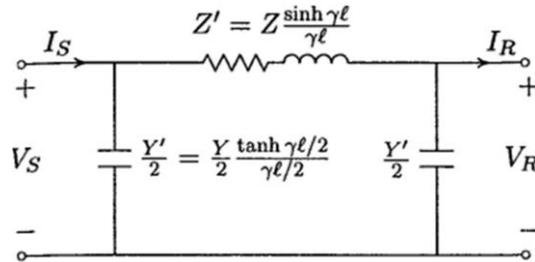


Fig.22. Modèle en π équivalent pour une ligne longue.

Écoulement de puissance à travers une ligne de transport :

Les expressions spécifiques de l'écoulement de puissance complexe sur une ligne peut être obtenues en termes des tensions à l'entrée et à la sortie et les angles de phase et les cstes ABCD. Considérant la Fig.18 et l'écriture matricielle ; en donnant les constantes ABCD en forme exponentielle : $A = |A| \angle \theta_A$, $B = |B| \angle \theta_B$, $V_s = |V_s| \angle \delta$, et $V_r = |V_r| \angle 0$, à partir de l'expression de V_s , I_R peut être écrit comme :

$$I_R = \frac{|V_s| \angle \delta - |A| \angle \theta_A |V_r| \angle 0}{|B| \angle \theta_B} = \frac{|V_s|}{|B|} \angle \delta - \theta_B - \frac{|A| |V_r|}{|B|} \angle \theta_A - \theta_B$$

La puissance complexe à l'extrémité de réceptrice : $S_{R(3\phi)} = P_{R(3\phi)} + jQ_{R(3\phi)} = 3V_R I_R^*$

$$\text{Substituant pour } I_R: S_{R(3\phi)} = 3 \frac{|V_s| |V_r|}{|B|} \angle \theta_B - \delta - 3 \frac{|A| |V_r|^2}{|B|} \angle \theta_B - \theta_A$$

En termes de tensions ligne-ligne (composée), nous avons :

$$S_{R(3\phi)} = \frac{|V_{S(L-L)}| |V_{R(L-L)}|}{|B|} \angle \theta_B - \delta - \frac{|A| |V_{R(L-L)}|^2}{|B|} \angle \theta_B - \theta_A$$

Les puissances active et réactive à l'extrémité réceptrice de la ligne sont :

$$P_{R(3\phi)} = \frac{|V_{S(L-L)}| |V_{R(L-L)}|}{|B|} \cos(\theta_B - \delta) - \frac{|A| |V_{R(L-L)}|^2}{|B|} \cos(\theta_B - \theta_A)$$

$$Q_{R(3\phi)} = \frac{|V_{S(L-L)}| |V_{R(L-L)}|}{|B|} \operatorname{sikh}(\theta_B - \delta) - \frac{|A| |V_{R(L-L)}|^2}{|B|} \operatorname{sikh}(\theta_B - \theta_A)$$

La puissance à l'entrée de la ligne est :

$$S_{S(3\phi)} = P_{S(3\phi)} + jQ_{S(3\phi)} = 3V_S I_S^*$$

à partir de (*), I_S peut être écrit comme :

$$|I_S| = \frac{|A| \angle \theta_B |V_s| \angle \delta - |V_r| \angle 0}{|B| \angle \theta_B}$$

Substituant dans S_S , nous avons :

$$P_{S(3\phi)} = \frac{|A| |V_{S(L-L)}|^2}{|B|} \cos(\theta_B - \theta_A) - \frac{|V_{S(L-L)}| |V_{R(L-L)}|}{|B|} \cos(\theta_B + \delta)$$

$$Q_{S(3\phi)} = \frac{|A||V_{S(L-L)}|^2}{|B|} \sin(\theta_B - \theta_A) - \frac{|V_{S(L-L)}||V_{R(L-L)}|}{|B|} \sin(\theta_B + \delta)$$

Les pertes actives et réactives da la ligne de transport :

$$P_{L(3\phi)} = P_{S(3\phi)} - P_{R(3\phi)}$$

$$Q_{L(3\phi)} = Q_{S(3\phi)} - Q_{R(3\phi)}$$