

Chapitre 3. Génération de Résidus par observateurs d'état

I. Introduction

Le principe de diagnostic à l'aide du vecteur d'état consiste à estimer par des techniques appropriées toutes les composantes du vecteur d'état ou plus généralement la sortie du processus et utiliser l'erreur d'estimation comme résidu. Cette opération est assurée à l'aide d'un système dynamique appelé observateur.

Le schéma fonctionnel d'une telle méthode est donné par la figure 8 suivante :

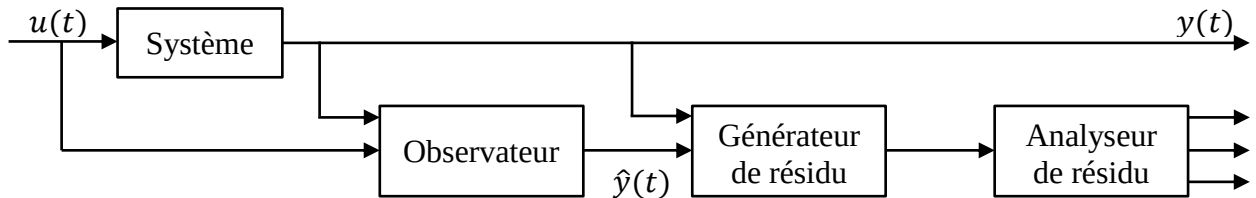


Figure 8 : Schéma fonctionnel d'un observateur générateur de résidus

II. Définition

Un observateur est un système dynamique qui permet la reconstruction (asymptotique ou exponentielle) de l'état d'un système, à partir de ses entrées, de ses sorties, et de la connaissance de son modèle dynamique, qui sont les seules informations disponibles.

On appelle donc un observateur ou un reconstituteur d'état d'un système $< S >$; un système dynamique auxiliaire $< O >$ dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer, et dont le vecteur de sortie $\hat{x}(t)$ est l'état estimé du système. Ce principe est illustré dans la figure 9 suivante.

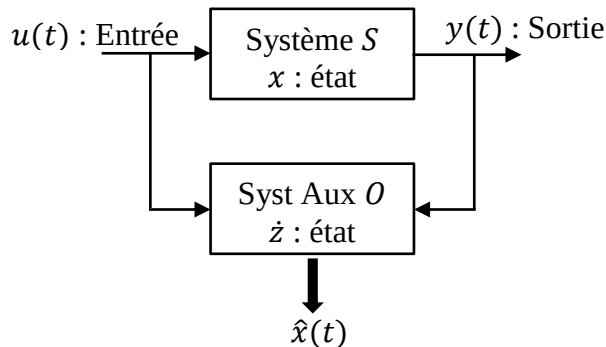


Figure 9 : Principe d'estimation d'état

Le problème de la conception d'un observateur pour un système donné est posé comme suit.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie, et les conditions initiales sont données par $x_0 = x(0)$

Observateur :

On considère le système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \psi(z(t), u(t), y(t)) \\ y(t) = \varphi(z(t), u(t), y(t)) \end{cases}$$

Où $z \in \mathbb{R}^q$, $q \leq n$ avec les conditions initiales $z_0 = z(0)$. Les entrées de ce système sont u , y et la sortie est l'état estimé $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- $\hat{x}(t_0) = x(t_0) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t), \forall t \geq t_0$,
- l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ tend asymptotiquement (respectivement exponentiellement) vers zéros,

Alors le système dynamique ci-dessus est un observateur (respectivement un observateur exponentiel) du problème de la conception d'un observateur, d'ordre plein si $q = n$, d'ordre réduit si $q < n$

Donc le problème de la synthèse d'un observateur consiste à trouver des fonctions ψ et φ qui assurent la convergence de l'état estimé $\hat{x}$ vers l'état réel x du système, et ce, Indépendamment de x_0 , z_0 et $u(t)$.

Observabilité

L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie. Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées et aux conditions initiales.

On dit que le problème de la conception d'un observateur ci-dessus est observable en x_0 si x_0 est distinguable de tout $x \in \mathbb{R}^n$. En outre le problème est observable si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, x_0 est distinguable.

Indistinguabilité ou indiscernabilité

Soient $y_u^0(t)$, et $y_u^1(t)$, $t \geq 0$ deux signaux de sortie générés par l'application du signal d'entrée $u(t)$, $t \geq 0$ au système dynamique avec les conditions initiales x_0 et x_1 , respectivement.

On dit que x_0 et x_1 sont indistinguables si : $y_u^0(t) = y_u^1(t)$, $\forall t \geq 0$, pour tout variable d'entrée u . Dans le cas contraire, on dit que x_0 et x_1 sont distinguables.

Observabilité des systèmes linéaires

Les critères d'observabilité d'un système linéaire sont décrits dans de nombreuses références dans la littérature de l'automatique. Considérons le système dynamique linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Les matrices A , B et C ont des dimensions appropriées. La matrice d'observabilité suivant le critère de Kalman du système ci-dessus est définie par :

$$O(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(O) = n$$

Avec W la matrice d'observabilité

Cette matrice est appelée matrice d'observabilité et ses lignes se calculent de façon itérative :

$CA^{k+1} = CA^k \times A$. Nous disons alors que la paire $(A;C)$ est observable.

L'observabilité du système est garantie si le rang de la matrice d'observabilité O est égal à n . Le système est complètement observable si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

On remarque que cette dynamique ne dépend pas de l'entrée, et qu'elle peut être réglée arbitrairement par le théorème de placement de pôles et qu'elle utilise le fait que la matrice d'observation soit de rang plein. Cette hypothèse n'est pas restrictive car il suffit alors d'éliminer les composantes de la sortie redondante. Un système est dit observable si une application entrée-sortie sur ce système est inversible

$$\det \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0 \implies \text{rang}(O) = n$$

DéTECTABILITÉ

Le critère de détectabilité est donné par : Le système linéaire continu est détectable si et seulement si, pour tout $p \in \mathbb{C}^+$, c'est-à-dire pour les valeurs propres instables de A , on a :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} pI - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

Pour tout p complexe. Si un système linéaire est complètement observable, il est globalement observable, c'est-à-dire que toutes les composantes du vecteur d'état du système sont observables, et donc peuvent être reconstruites par un observateur. Si le système est non linéaire, on doit distinguer l'observabilité globale de l'observabilité locale.

Commandabilité des systèmes linéaires

Une condition nécessaire et suffisante de commandabilité par retour de l'état ou par retour de sortie pour un processus linéaire s'écrit suivant le critère de Kalman :

$$W(A,B) = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \implies \text{rang}(W) = n$$

Avec W la matrice de commandabilité

Cette matrice est appelée matrice de commandabilité ou de contrôlabilité et ses colonnes se calculent de façon itérative : $A^{k+1}B = A \times A^k B$. Nous disons alors que la paire $(A;B)$ est contrôlable.

Stabilisabilité

Le critère de stabilisabilité est donné par : Le système linéaire continu est stabilisable si et seulement si, pour tout $p \in \mathbb{C}^+$, c'est-à-dire pour les valeurs propres instables de A , on a :

$$\text{rang}[pI - AB] = n$$

III. Diagnostic à l'aide de l'observateur de Luenberger

La théorie de l'observation de Luenberger repose essentiellement sur la technique de placement de pôles. On se place dans le cas déterministe, les bruits w et v sont nuls, et l'objectif est d'assembler un vecteur de résidu $r(t)$ sur la base de ce modèle de sorte que ces résidus soient nuls dans l'état normale $r(t) = 0$ si $f(t) = 0$ et différents de zéro en présence de défauts $r(t) \neq 0$ si $f(t) \neq 0$

Suppose que la paire (A, C) est observable, et Luenberger propose l'observateur suivant pour le système

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \hat{x}_0 = \hat{x}(0) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

Où L représente la matrice de gain de l'observateur. Elle est calculée de telle sorte que l'état estimé $\hat{x}(t)$ Tends vers l'état réel $x(t)$ du système quand $t \rightarrow \infty$, quels que soient les états initiaux $x(0)$ et $\hat{x}(0)$

La dynamique de l'erreur d'estimation sur l'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

$$\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - Ly(t) + L\hat{y}(t)$$

Or : $y(t) = Cx(t)$ et $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$

On aura :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ax(t) - A\hat{x}(t) - LCx(t) + LC\hat{x}(t) = (A - LC)x(t) - (A - LC)\hat{x}(t) \\ &= (A - LC)(x(t) - \hat{x}(t)) = (A - LC)e(t) \\ \dot{e}(t) &= (A - LC)e(t) \end{aligned}$$

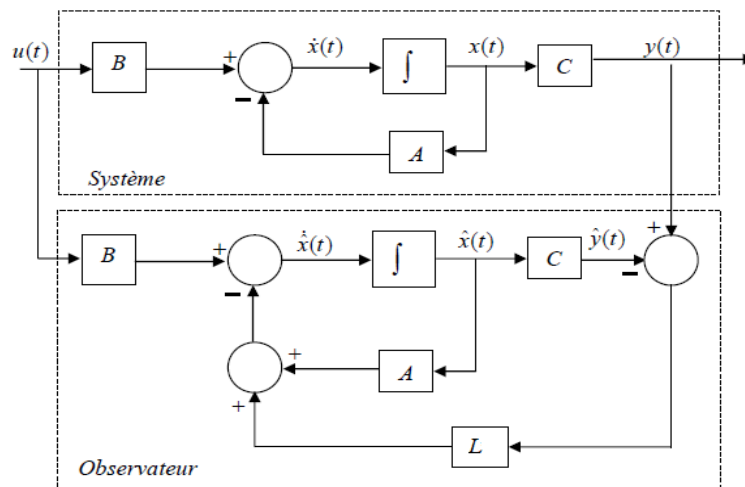


Figure 11 : Structure de l'observateur de Luenberger

L'observateur a pour entrées $u(t)$ et $y(t)$ et il est construit de façon à fournir une estimation de l'état, notée $\hat{x}(t)$. (L est donné de façon que $A - LC$ soit stable).

Il s'appelle observateur de Luenberger (asymptotique), avec $\hat{x}(t)$ l'estimé de $x(t)$ et $K \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est un gain à choisir tel que : $\forall x(0), \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$, et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$ pour toute valeur initiale $e(0)$ si et seulement si la matrice $A - LC$ est Hurwitz, c.à.d. les valeurs propres de $(A - LC)$ sont strictement négatives. Construire un observateur asymptotique revient donc à déterminer une matrice de gain L telle que $A - LC$ soit Hurwitz.

Il suffit alors de choisir le gain L de telle sorte que les valeurs propres de la matrice $A - LC$ soient strictement négatives, c'est-à-dire, elle est stable. Le choix de la matrice K a une influence sur la vitesse de convergence de l'erreur $e(t)$.

Remarque :

$y(t) - \hat{y}(t)$ joue le rôle de résidu. En pratique, il est impossible de générer cette erreur de l'estimation d'état, car l'état réel du système n'est pas connu ; mais elle peut être calculée, car on suppose qu'il existe un capteur à la sortie.

Exemple :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Réponse des conditions initiales

$$A = \begin{bmatrix} 1.8097 & -0.8187 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0.181 \quad -0.181] \text{ et } D = [0]$$

Code Matlab

```
A = [1.8097 -0.8187; 1 0];
B = [0.5; 0];
C = [0.1810 -0.1810];
D = 0;
L = place(A', C', [.5 .7])'
eig(A-L*C)
x = [-1; 1]; % initial state
xhat = [0; 0]; % initial estimate
XX = x;
XXhat = xhat;
T = 40;
UU = .1 * ones(1, T); % input signal
for k = 0:T-1,
    u = UU(k+1);
    y = C*x + D*u
    yhat = C*xhat + D*u
    x = A*x + B*u;
    xhat = A*xhat + B*u + L*(y - yhat)
    XX = [XX, x];
    XXhat = [XXhat, xhat];
end
plot(0:T, [XX(1, :); XXhat(1, :)]);
L1 = place(A', C', [.5 .7])'
L2 = place(A', C', [.75 .8])'
L3 = place(A', C', [.4 .5])'
```

```
plot(0:T,[XX(2,:);XXhat(2,:)]);
plot(0:T,[XX(3,:);XXhat(3,:)]);
```

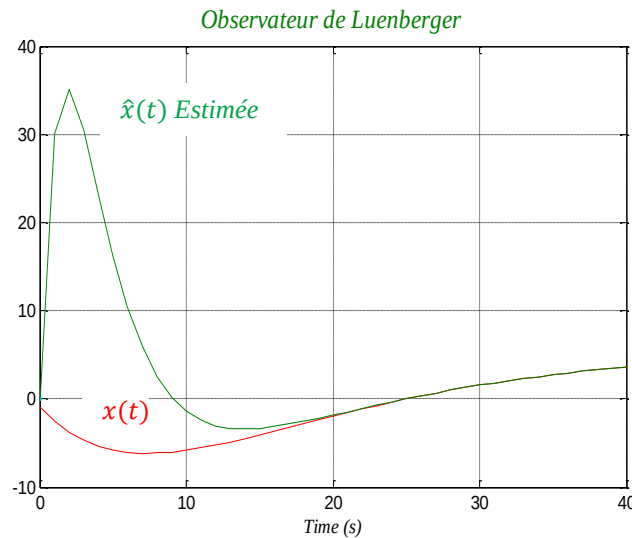


Figure 12 : Exemple de conception d'observateur sous MATLAB

```
L1 =
-83.1877
-86.5562
L2 =
-23.7340
-25.1688
L3 =
-173.6112
-178.6372
```

II.1 L'idée du diagnostic par observateur :

- ✓ Impossible de générer l'erreur d'estimation : car état réel n'existe pas.
- ✓ L'erreur de reconstruction de la sortie y peut être calculée car on suppose qu'il existe un capteur à la sortie.

L'observateur est utilisé ici, pour mettre en évidence l'apparition de défauts affectant les actionneurs ou les capteurs. Pour cela, des signaux de résidus sont créés par comparaison des grandeurs estimées et des grandeurs réelles, selon le schéma de principe représenté par

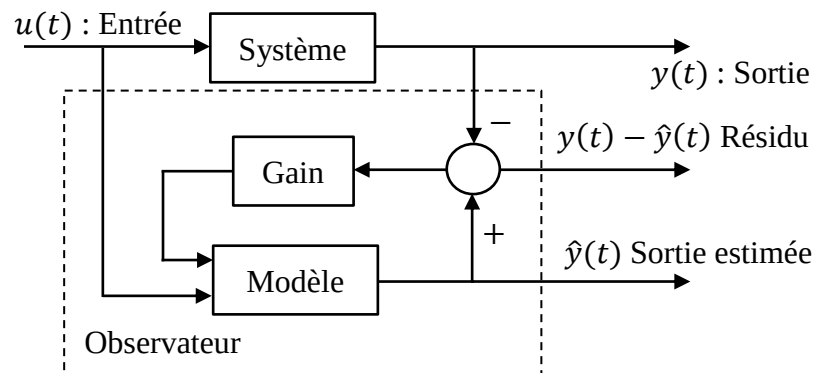


Figure 12 : Principe de la génération de résidu à base d'observateur

Conditions de Convergence

$$\dot{e}(t) = Ax(t) - A\hat{x}(t) - LCx(t) + LC\hat{x}(t) = A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x})$$

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \Rightarrow E(p) = (pI - A + LC)^{-1}(e_0 - \hat{e}_0)$$

II.2 Génération des résidus

II.2.1 Mode de structuration des résidus

Pour faire la génération ou la structuration des résidus, on doit passer par la simulation ou on détermine par le calcul la matrice de transfert de génération des résidus reliant l'erreur d'estimation en sortie.

1- Par la simulation

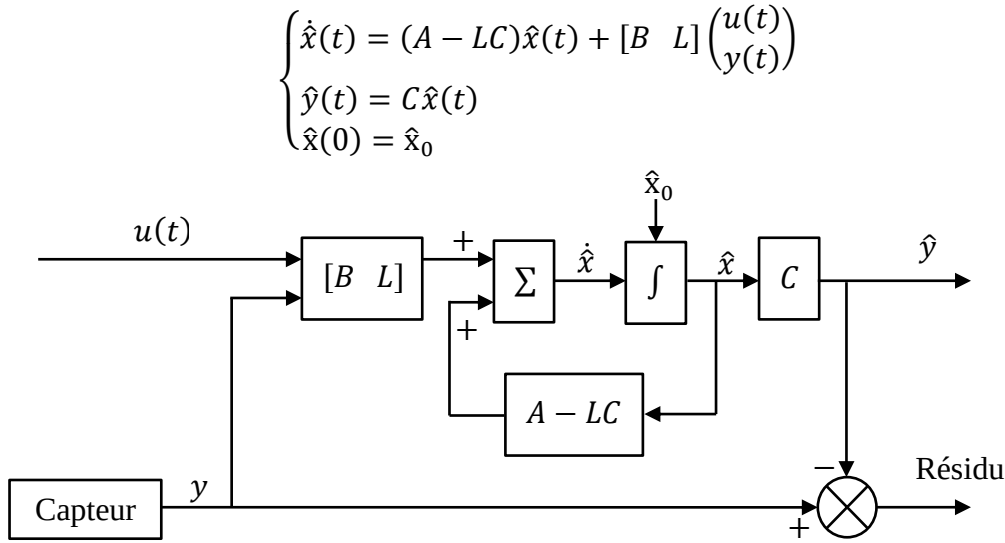


Figure 13 : Principe de la génération de résidu à base d'observateur par simulation

2- Par le calcul avec les transformées de Laplace p

Pour tout $p \in \mathbb{C}^+$, on a :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pX(p) = AX(p) + BU(p) \\ Y(p) = CX(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pX(p) - AX(p) = BU(p) \\ Y(p) = CX(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [pI - A]X(p) = BU(p) \\ Y(p) = CX(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p) = [pI - A]^{-1}BU(p) \\ Y(p) = CX(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(p) = C[pI - A]^{-1}(BU(p) + x_0)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + [B \ L] \begin{pmatrix} u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\hat{X}(p) = (A - LC)\hat{X}(p) + BU(p) + LY(p) \\ \hat{Y}(p) = C\hat{X}(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p\hat{X}(p) - (A - LC)\hat{X}(p) = BU(p) + LY(p) \\ \hat{Y}(p) = C\hat{X}(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [pI - (A - LC)]\hat{X}(p) = BU(p) + LY(p) \\ \hat{Y}(p) = C\hat{X}(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{X}(p) = [pI - A + LC]^{-1}(BU(p) + LY(p)) \\ \hat{Y}(p) = C\hat{X}(p) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{Y}(p) = C[pI - A + LC]^{-1}(BU(p) + LY(p) + \hat{x}_0)$$

$$\text{Or : } r(t) = y(t) - \hat{y}(t), \text{ d'où : } R(p) = Y(p) - \hat{Y}(p)$$

$$E(p) = Y(p) - \hat{Y}(p) = C[pI - A]^{-1}(BU(p) + x_0) - C[pI - A + LC]^{-1}(BU(p) + LY(p) + \hat{x}_0)$$

$$E(p) = C[pI - A]^{-1}(BU(p) + x_0) - C[pI - A + LC]^{-1}(BU(p) + LC[pI - A]^{-1}(BU(p) + x_0) + \hat{x}_0)$$

$$E(p) = C[pI - A]^{-1}(BU(p) + x_0) - C[pI - A + LC]^{-1}(LC[pI - A]^{-1}(BU(p) + x_0) - C[pI - A + LC]^{-1}(BU(p) + \hat{x}_0))$$

$$E(p) = [C[pI - A]^{-1} - C[pI - A + LC]^{-1}LC[pI - A]^{-1}](BU(p) + x_0) - C[pI - A + LC]^{-1}(BU(p) + \hat{x}_0)$$

$$E(p) = C[pI - A]^{-1}[I - C[pI - A + LC]^{-1}L](BU(p) + x_0) - C[pI - A + LC]^{-1}(BU(p) + \hat{x}_0)$$

De façon équivalente, par l'utilisation des propriétés des matrices, on peut écrire :

$$E(p) = [I - C[pI - A + LC]^{-1}L]^{-1} \times [C[pI - A]^{-1}(BU(p) + x_0) - [C[pI - A + LC]^{-1}] \times [BU(p) + \hat{x}_0]$$

Après quelles que simplification, et par l'utilisation des propriétés des matrices les termes en U vont disparaître et on aura :

$$E(p) = [I - C[pI - A + LC]^{-1}L]^{-1} \times [C[pI - A]^{-1}x_0] - [C[pI - A + LC]^{-1}]\hat{x}_0$$

En utilisant les propriétés des matrices et le lemme d'inversion des matrices suivant :

$$[E + FGH]^{-1} = E^{-1} - E^{-1}F(G^{-1} + HE^{-1}F)HE^{-1}$$

On aura :

$$R(p) = Y(p) - \hat{Y}(p) = C[pI - A + LC]^{-1}(x_0 - \hat{x}_0)$$

Qui correspond au résidu du l'observateur de luenberger. Ainsi, l'erreur de reconstruction de la sortie dépend de l'erreur d'estimation des conditions initiales et comme signaler avant il existe un dilemme entre la façon de choisir le gain de l'observateur pour la convergence rapide de l'erreur et la sensibilité du résidu aux bruits pour un choix du gain grand.

Remarque :

On peut déterminer ce résidu d'une façon plus simple. On a :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \Rightarrow \dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - Ly(t) + L\hat{y}(t)$$

Or : $y(t) = Cx(t)$, $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$ et $e_0 = x_0 - \hat{x}_0$

On aura :

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= Ax(t) - A\hat{x}(t) - LCx(t) + LC\hat{x}(t) = (A - LC)x(t) - (A - LC)\hat{x}(t) \\ &= (A - LC)(x(t) - \hat{x}(t)) = (A - LC)e(t) \\ \dot{e}(t) &= (A - LC)e(t)\end{aligned}$$

On passe au transformé de laplace

$$\begin{aligned}pE(p) &= (A - LC)E(p) + e_0 \Rightarrow pE(p) - (A - LC)E(p) = e_0 \Rightarrow (pI - (A - LC))E(p) = e_0 \\ (pI - (A - LC))E(p) &= e_0 = x_0 - \hat{x}_0 \\ E(p) &= (pI - (A - LC))^{-1}(x_0 - \hat{x}_0)\end{aligned}$$

Est donc :

$$R(p) = Y(p) - \hat{Y}(p) = C[pI - A + LC]^{-1}(x_0 - \hat{x}_0)$$

Expression du résidu en z, dans le cas discret :

$$R(z) = Y(z) - \hat{Y}(z) = C[zI - A + LC]^{-1}(ky - Bu)$$

Exemple :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -4x(t) + 2u(t) \\ y(t) = 8x(t) \\ t = 0, x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = -4\hat{x}(t) + 2u(t) + L(y(t) - 8\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = 8\hat{x}(t) \\ t = 0, \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases}$$

$$\tilde{x} = x - \hat{x} = -4(x - \hat{x}) - 8L(x - \hat{x}) = (-4 - 8L)(x - \hat{x}) \Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{\varepsilon_0}{(p + (4 + 8L))}$$

$$\varepsilon(t) = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = (-4 - 8L)\varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\alpha t} \text{ avec } \alpha = 8L + 4 \Rightarrow \text{Converge si } \alpha > 0 \Rightarrow 8L + 4 > 0 \Rightarrow L > -\frac{1}{2}$$

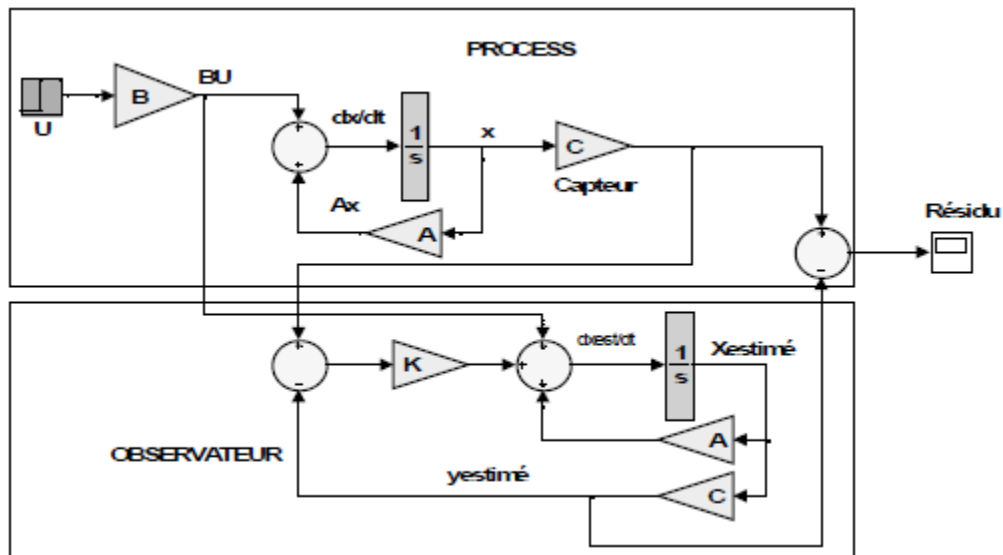


Figure 14 a simuler sous MATLAB

II.1.2 Estimation en présence de défaut actionneur.

On considère un système dont les actionneurs peuvent être affectés par des défauts (présence de bruit, offset, dérive, panne momentanée ou destruction) modélisés par le signal additionnel, noté $v(t)$. Le modèle du système devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ev(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

E est appelée matrice de distribution des défauts. La $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice E donne la direction du défaut i dans l'équation de mesure.

Le signal $v(t)$ n'est pas mesurable, il est donc impossible de l'utiliser lors de la synthèse de l'observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \\ \hat{x}_0 = \hat{x}(0) \end{cases}$$

L'erreur d'estimation de la sortie est un résidu permettant de détecter les défauts actionneurs E . L'écart de mesure des sorties $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ est alors donné par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) + Ev(t) \\ \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) \\ \tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}(0) \end{cases}$$

Passage aux transformées de Laplace sans tenir compte du terme : $\tilde{y}(0) = C\tilde{x}(0)$ la fonction des conditions initiales et qui tend asymptotiquement vers zéro.

$$\tilde{Y}(p) = C(pI - A + LC)^{-1}EV(p)$$

En l'absence de défaut $v(t)$, le signal $\tilde{y}(t)$ tend asymptotiquement vers zéro. En revanche lorsque $v(t)$ est non nul, $\tilde{y}(t)$ est sensible à l'apparition du défaut. Il est donc possible de détecter les défauts actionneurs au moyen de l'écart d'estimation des sorties.

Le gain L permet de fixer la structure de l'observateur afin de rendre $\tilde{y}(t)$ particulièrement sensible à une composante particulière de $v(t)$.

La synthèse de plusieurs observateurs, chacun dédié à un défaut, permet de localiser efficacement chaque défaut.

La matrice $C(pI - A + LC)^{-1}EV$ explique la façon dont les défauts agissent sur l'erreur d'estimation de la sortie du système, l'analyse de sa structure renseigne sur la possibilité de détecter et d'isoler les défauts.

II.2.3 Estimation en présence de défaut capteur.

Dans ce cas, c'est les capteurs de mesure de sortie qui sont en partie défaillants, le système observé devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Gw(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On suppose que tous les défauts interviennent indépendamment les uns des autres,

G est de plein rang colonne.

L'erreur d'estimation des sorties obtenues par l'observateur est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) - Lw(t) \\ \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) + Gw(t) \\ \tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}(0) \end{cases}$$

Dans ce cas aussi, l'erreur d'estimation de la sortie est un résidu permettant de détecter les défauts $w(t)$.

Passage, comme précédemment aux transformées de Laplace et sans tenir compte du terme fonction des conditions initiales qui tend asymptotiquement vers zéro, il vient :

$$\tilde{Y}(p) = (I - C(pI - A + LC)^{-1}L)GV(p)$$

De façon équivalente :

$$\tilde{Y}(p) = (I + C(pI - A)^{-1}L)^{-1}GV(p)$$

En utilisant les propriétés des matrices et le lemme d'inversion des matrices suivant :

$$[E + FGHN]^{-1} = E^{-1} - E^{-1}F(G^{-1} + NE^{-1}F)NE^{-1}$$

Permet de mettre l'équation précédente sous la forme ;

$$GV = (I + C(pI - A)^{-1}L)^{-1}\tilde{Y}(p)$$

La matrice G étant de plein rang colonne, sa pseudo-inverse, défini par, $G^+ = (G^T G)^{-1}G^T$

Vérifie :

$$G^+G = I$$

Dans ce cas l'estimation des défauts s'explique :

$$G(p) = (G^T G)^{-1}G^T (I + C(pI - A)^{-1}L)\tilde{Y}(p)$$

On peut aussi expliciter ces biais à partir de l'équation d'état, déduite de $G(p)$:

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = Am(t) + L\tilde{y}(t) \\ \tilde{w}(t) = (G^T G^+)^{-1}G^T (Cm(t) + \tilde{y}(t)) \end{cases}$$

Pour générer numériquement cette estimation, on peut aussi agréger le système avec celui décrivant l'observateur.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} A - LC & 0 \\ -LC & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & L \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\ \eta(t) = [-C \quad C] \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ m(t) \end{bmatrix} + [0 \quad I] \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\ w(t) = (G^T G^+)^{-1}G^T \eta(t) \end{cases}$$

Exemple de mise en œuvre d'un diagnostic à base d'observateur d'état (défaut capteur)

Considérons le système suivant, affecté par un défaut de capteur $w(t)$ et par des bruits de mesure $m(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 2.5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0.1 & -5 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + m(t) \\ x(0) &= [4 \quad 4 \quad 4]^T\end{aligned}$$

Afin de détecter et d'estimer ce défaut de capteur, on construit un observateur d'état, pour ensuite filtrer l'erreur d'estimation des sorties

a- Observabilité

Suivant le critere de Kalman

$$\begin{aligned}O(A, C) &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \\ CA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2.5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0.1 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \\ CA^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2.5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0.1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2.5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0.1 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.3 & -32.5 & -32 \\ -0.2 & 26 & 20 \end{bmatrix} \\ O(A, C) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 9.3 & -32.5 & -32 \\ -0.2 & 26 & 20 \end{bmatrix} \\ rang O &= rang \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 9.3 & -32.5 & -32 \\ -0.2 & 26 & 20 \end{bmatrix} = 3\end{aligned}$$

Ainsi, le $rang O \neq 0$ et par conséquent la paire (C, A) est observable, il est donc possible de déterminer une matrice L telle que $(A - LC)$ soit stable.

Calcul de $(pI - A)$

$$\begin{aligned}pI - A &= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 2.5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0.1 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+3 & -2.5 & -3 \\ 0 & p+4 & 2 \\ -0.1 & 5 & p+6 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} p+3 & -2.5 & -3 \\ 0 & p+4 & 2 \\ -0.1 & 5 & p+6 \end{bmatrix} &= p^3 + 13p^2 + 43.7p + 41.3\end{aligned}$$

$$\det(pI - A) = 0 \Rightarrow p^3 + 13p^2 + 43.7p + 41.3 = 0$$

Les valeurs propres de A sont :

$$p_A = (-8.36709 \quad -2.97218 \quad -1.66074)$$

Le gain L est choisi afin que les valeurs propres de $(A - LC)$ soient environ le double de celle de A , ainsi l'observateur de type proportionnel est assez rapide pour suivre l'évolution des variables d'état.

Par exemple, pour obtenir les valeurs propres :

$$p_{(A-LC)} = (-16.73418 \quad -5.94436 \quad -3.32148)$$

Code Scilab

```
// diagnostic à base d'observateur d'état (défaut capteur)//
A=[-3 2.5 3;0 -4 -2;0.1 -5 -6];
B=[1 0;0 1;0 0];
C=[1 0 0;0 1 0];
//Vérification de la commandabilité
Ctr = cont_mat(A,B)
rang = rank(Ctr)
//Vérification de l'observabilité
Obs=obsv_mat(A,C)
rang = rank(Obs)
//Détermination des valeurs propres de A
E = eye(A)
evals=spec(A,E)
// Pôles désirés en BF
P= 2*evals
Poles= P'
// Placement des pôles par K
K = ppol(A, B, poles)
// Placement des pôles par L
M=ppol(A',C',poles); L=M'

-->// diagnostic à base d'observateur d'état (défaut capteur)//
--> A=[-3 2.5 3;0 -4 -2;0.1 -5 -6];
--> B=[1 0;0 1;0 0];
--> C=[1 0 0;0 1 0];
--> //Vérification de la commandabilité
--> Ctr = cont_mat(A,B)
Ctr =
  1.  0. -3.   2.5  9.3 -32.5
  0.  1.  0.  -4.  -0.2  26.
  0.  0.  0.1 -5.  -0.9  50.25
--> rang = rank(Ctr)
rang =
  3
--> //Vérification de l'observabilité
--> Obs=obsv_mat(A,C)
Obs =
  1.  0.  0.
  0.  1.  0.
 -3.  2.5  3.
```

```

0. -4. -2.
9.3 -32.5 -32.
-0.2 26. 20.
--> rang = rank(Obs)
rang =
3.
--> //Détermination des valeurs propres de A
--> E = eye(A)
E =
1. 0. 0.
0. 1. 0.
0. 0. 1.
--> evals=spec(A,E)
evals =
-8.3670854
-2.9721756
-1.660739
--> // Pôles désirés en BF
--> P= 2*evals
P =
-16.734171
-5.9443511
-3.321478
--> Poles= P'
Poles =
-16.734171 -5.9443511 -3.321478
--> // Placement des pôles par K
--> K = ppol(A, B, poles)
K =
2.94436 -0.6912818 1.2904176
0.0535704 10.05566 3.7503432
--> // Placement des pôles par L
--> M=ppol(A',C',poles); L=M'
L =
0.26584 2.5
0. 12.73418
0.1496776 -5.

```

Il faut choisir le gain L :

$$L = \begin{bmatrix} 0.26585 & 2.5 \\ 0 & 12.734118 \\ 0.1496776 & -5 \end{bmatrix}$$

Le défaut $w(t)$ intervient sur la deuxième mesure, entre les instants $t = 9s$ et $t = 11s$. Entre ces deux instants, il est constant et d'amplitude égale à $\frac{1}{2}$.

Figures reste

II.2.4 Observateur de Luenberger Généralisé.

Le modèle du système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_x v(t) + G_x w(t) \\ y(t) = Cx(t) + Bu(t) + E_y v(t) + G_y w(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$x(t)$, $u(t)$, $y(t)$, $v(t)$ et $w(t)$ sont respectivement l'état, l'entrée, la sortie, les défauts (actionneurs et capteurs) et les perturbations.

Si le système est observable, on estime que la sortie $y(t)$ en utilisant un observateur à gain L , le reconstituteur d'état en tant que générateur de résidus est alors :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t) - Bu(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases}$$

La matrice L (gain de l'observateur) est calculée de façon que l'estimation tende vers $x(t)$ du système réel quant t tend vers l'infini quelques soient les états initiaux $x(0)$, $\hat{x}(0)$.

Les équations dynamiques des erreurs d'estimation, s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = [A - LC]\tilde{x}(t) + Ev(t) + Gw(t) \\ \tilde{y}(t) = y - \hat{y} = C\tilde{x}(t) + Cv(t) + G_y w(t) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$$

Où :

$$E = E_x - LE_y \text{ et } G = G_x - LG_y$$

Le passage aux transformées de Laplace, les conditions initiales étant nulles:

$$\tilde{Y}(p) = Y(p) - \hat{Y}(p) = K_v(p)E(p) + K_w(p)G(p) + K_0(p)X(p)$$

Où :

$$\begin{aligned} K_v(p) &= C(pI - A + LC)^{-1}(E_x - LE_y) + E \\ K_w(p) &= C(pI - A + LC)^{-1}(E_x - LE_y) + G \\ K_0(p) &= C(pI - A + LC)^{-1} \end{aligned}$$

Remarque :

- Cette erreur d'estimation est sensible aux défauts (actionneurs et capteurs), mais également aux entrées inconnue v , aux bruits de mesures w et aux conditions initiales.
- L'observateur converge vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini, on peut négliger les conditions initiales.
- Le gain L de l'observateur influe de façon semblable sur d et v ; il est alors difficile de générer un résidu sensible aux défauts mais insensible aux perturbations (robustesse).
- L'analyse des matrices de transfert K permet de structurer les résidus pour une isolation éventuelle.

II.2.5 Influence d'un bruit de mesure

Soit $v(t)$ un bruit, réalisation d'une variable aléatoire $Esp(v(t)) = 0$

Système :	Observateur
$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + E_y v(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + E_y v(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases}$

En présence d'un bruit de mesure, l'erreur de reconstruction d'état et l'erreur de reconstruction de la sortie vérifient :

Dans le domaine temporel

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) - Lv(t) \\ \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) + E_y v(t) \end{cases}$$

Dans le domaine fréquentielle

$$\begin{aligned} X(p) &= (pI - A + LC)^{-1}[x_0 - \hat{x}_0 - LV(p)] \\ Y(p) &= C(pI - A + LC)^{-1}(x_0 - \hat{x}_0) + [I - C(pI - A + LC)^{-1}L]V(p) \end{aligned}$$

En négligeant les transitoires dues aux conditions initiales.

Ce qui permet d'explicitier l'erreur de reconstruction vis-à-vis du bruit de mesure $v(t)$ sous l'une ou l'autre des formes fréquentielles, en négligeant les transitoires dues aux conditions initiales.

$$\tilde{Y}(p) = [I - C(pI - A + LC)^{-1}L]V(p)$$

Ou

$$\tilde{Y}(p) = [I - C(pI - A)^{-1}L]^{-1}V(p)$$

On minimisera l'effet du bruit, par le choix d'un gain de réglage L , en plaçant la pulsation de coupure du filtre tel que l'influence du bruit soit réduite ou éviter les fausses alarmes en choisissant des seuils d'alarme pour les résidus dans la procédure de décision de la présence de fautes.

II.2.6 Influence d'une imprécision de modèle

En pratique, il existe toujours une erreur de modélisation du système (le modèle d'un système n'est qu'une approximation du comportement réel) ; ce qui rend difficile à séparer les erreurs dues à la modélisation et celles dues aux fautes. Le but est de construire un observateur sensible aux défauts et peu sensible aux erreurs de modélisation.

On se limite à une erreur sur la matrice d'état A (*Modèle d'état incertain*).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \delta A)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

L'observateur est construit à partir de la matrice A :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases}$$

L'observateur dit alors détecter au travers de l'erreur de reconstruction de la sortie, la perturbation δA
L'erreur d'estimation d'état est toujours définie par :

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) + \delta Ax(t)$$

L'erreur de reconstruction est sensible aux imprécisions δA et à l'état $x(t)$

Dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} X(p) &= (pI - A + LC)^{-1}[x_0 - \hat{x}_0] + (pI - A + LC)^{-1}\delta AX(p) \\ Y(p) &= C(pI - A + LC)^{-1}[x_0 - \hat{x}_0] + C(pI - A + LC)^{-1}\delta AX(p) \end{aligned}$$

En remplaçant $X(p)$ par son expression et pour des conditions initiales nulles (le transitoire peut être négligé), on a :

$$\tilde{Y}(p) = C(pI - A + LC)^{-1} + \delta A(pI - A + LC)^{-1}BU(p)$$

Ainsi le résidu dépend de l'erreur de modélisation et de l'entrée $u(t)$, on exploite alors cette propriété pour distinguer sur le résidu les influences des défauts et des incertitudes ; en cherchant une majoration de l'erreur de reconstruction si u est bornée , par exemple :

$$\|\tilde{Y}(p)\|_{\infty} = \|C(j\omega I - A + LC)^{-1} + \delta A(j\omega I - A + LC)^{-1}B\| \|U(p)\|$$

De façon générale, les incertitudes de modélisation qui peuvent provenir d'erreurs de structure et d'erreurs de paramètres, jouent le rôle de perturbations sur les équations dynamiques et de mesure du système. On peut en régime stationnaire faire disparaître leurs influences en introduisant des intégrateurs dans la structure de l'observateur ou l'utilisation d'un observateur proportionnel et intégral.

III. Filtre de Kalman

III.1 Notion generales

La théorie de l'observation de Kalman nécessite, quant à elle, la résolution d'une équation de Riccati.
L'observateur de Kalman est l'outil utilisé pour résoudre le problème d'estimation de l'état des systèmes Linéaires à Temps Variant (LTV), qui sont caractérisés par des propriétés statistiques des bruits gaussiens de moyenne nulle et de matrice de covariance Q et R respectivement présentés dans le système suivant par $\eta(t)$ et $\varsigma(t)$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Q\eta(t) \\ y(t) = Cx(t) + \xi(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases}$$

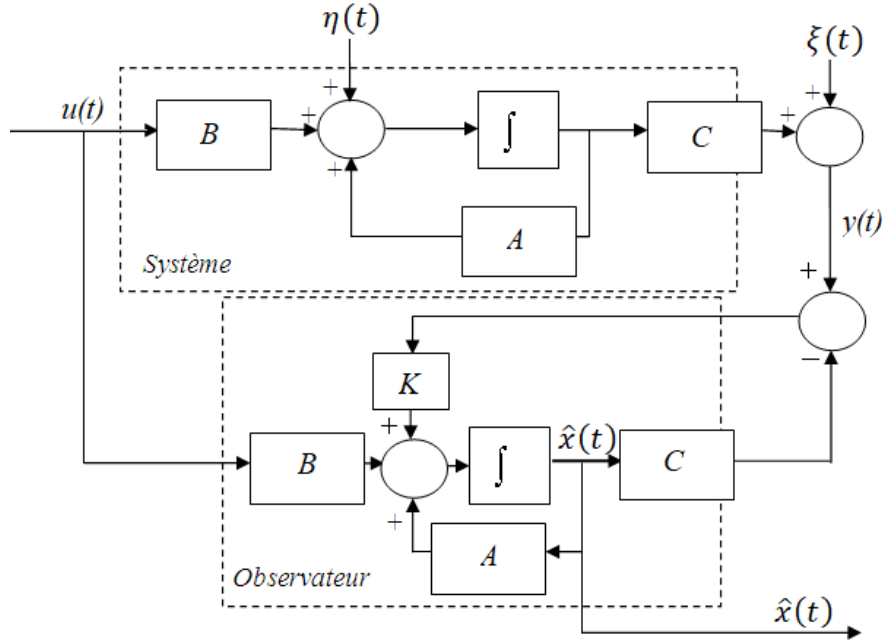


Figure 15. Structure de l'observateur de Kalman

Solution générale :

En minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $P(t) = E[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)]$, on obtient l'expression du gain de l'observateur :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) &\Rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)(x(t) - \hat{x}(t)) + Q\eta(t) - \xi(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) &= (A - KC)\varepsilon(t) + Q\eta(t) - K\xi(t) \end{aligned}$$

$\eta \sim H$ et $\xi \sim Z$

On peut donc conclure que la covariance de l'erreur d'estimation $P(t)$ obéit à l'équation différentielle :

$$\dot{P}(t) = (A - KC)P(t) + P(t)(A - KC)^T + QHQ^T + KZK^T$$

Alors pour minimiser $P(t)$, il suffit de minimiser $\dot{P}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\dot{P}(t))}{\partial K} &= -CP(t) - P(t)C^T + 2KZ = -P(t)C^T - P(t)C^T + 2KZ = 0 \\ &\Rightarrow K = P(t)C^T Z^{-1} \end{aligned}$$

On remplace cette équation dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\dot{P}(t) = (A - P(t)C^T Z^{-1}C)P(t) + P(t)(A - P(t)C^T Z^{-1}C)^T + QHQ^T + P(t)C^T Z^{-1}Z(P(t)C^T Z^{-1})^T$$

$$\begin{aligned}
&= AP(t) - P(t)C^T Z^{-1}CP(t) + P(t)(A)^T - P(t)(P(t)C^T Z^{-1}C)^T + QHQ^T \\
&\quad + P(t)C^T Z^{-1}Z(P(t)C^T Z^{-1})^T \\
&= AP(t) - P(t)C^T Z^{-1}CP(t) + P(t)(A)^T - P(t)(P(t)C^T Z^{-1}C)^T + QHQ^T + P(t)C^T (P(t)C^T Z^{-1})^T \\
&= AP(t) - P(t)C^T Z^{-1}CP(t) + P(t)(A)^T - P(t)C^T (P(t)C^T Z^{-1})^T + QHQ^T + P(t)C^T (P(t)C^T Z^{-1})^T \\
&= AP(t) - P(t)C^T Z^{-1}CP(t) + P(t)(A)^T + QHQ^T
\end{aligned}$$

$Z^{-1}Z = I$ et $P(t)(P(t)C^T Z^{-1}C)^T = P(t)C^T (P(t)C^T Z^{-1})^T$ propriétés des matrices transposées

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T Z^{-1}CP(t) + QHQ^T$$

Cette équation différentielle de Riccati doit être intégrée et initialisée avec $P(t_0)$ qui traduit la confiance que l'on a dans l'initialisation du filtre avec $\hat{x}(t_0)$:

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - \hat{x}(t_0))(x(t_0) - \hat{x}(t_0))^T]$$

Le filtre de Kalman généralise le filtrage optimal aux systèmes non stationnaires en présence des conditions initiales et des entrées déterministes. Il est stable sous certaines conditions de contrôlabilité et d'observabilité.

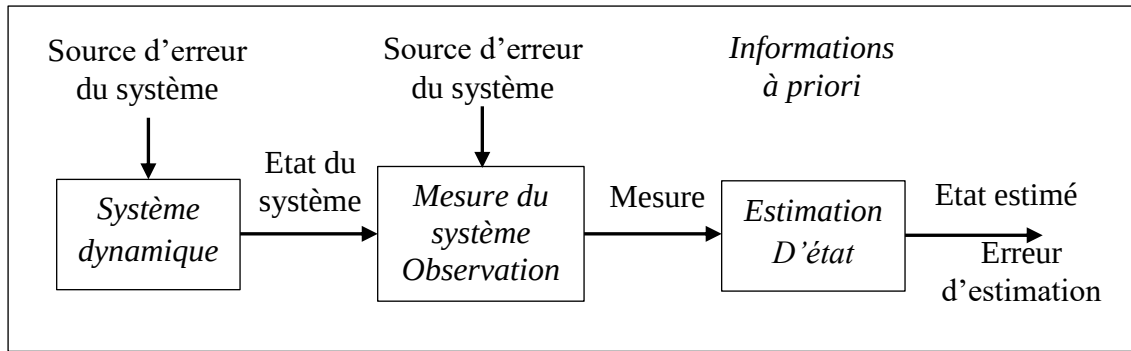


Figure 16 : Schéma synoptique du processus d'estimation

On ne dispose pas d'accès aux deux premiers blocs, car ils sont considérés comme une boîte noire. L'unique variable qui est à notre disposition c'est l'observation (mesure) entachée d'erreurs.

III. 2 Le filtre de Kalman continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Q(t)\eta(t) \\ y(t) = H(t)x(t) + G(t)\xi(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = [A(t) - K(t)H(t)]\hat{x}(t) + K(t)y(t) \\ y(t) = H(t)x(t) + G(t)\xi(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases}$$

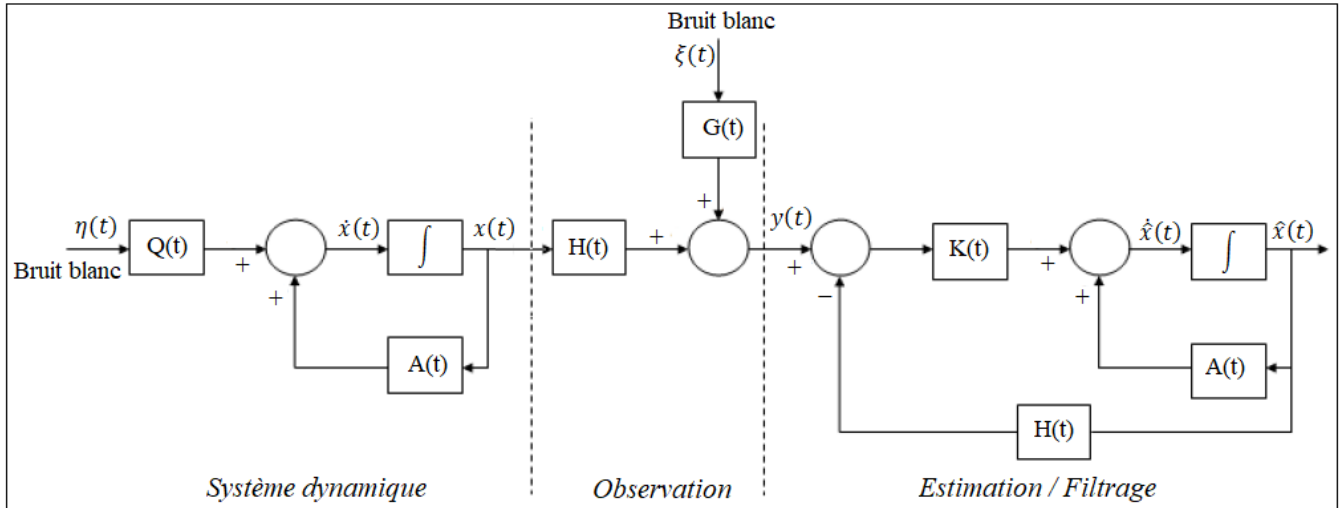


Figure 16 : Schéma de principe filtre de Kalman continu

III.2 Le filtre de Kalman discret

Mathématiquement, le modèle d'état est constitué de deux équations : la première représente l'évolution dynamique de l'état du système dans le temps et la deuxième, dite équation de mesure, représente la relation entre les mesures et l'état.

Pour un système dynamique linéaire et discret, l'équation d'état est donnée par :

$$x_{k+1} = A_k x_k + w_k$$

Où :

x_k est le vecteur d'état à l'instant k qui inclut les quantités à estimer (position, vitesse et accélération...).

A_k est la matrice de transition. Elle décrit l'évolution du vecteur d'état de l'instant k à l'instant $k + 1$ en absence du bruit.

On suppose qu'il existe une relation linéaire entre les mesures et l'état du système. L'équation de mesure est alors donnée par :

$$z_k = H_k x_k + v_k$$

Où :

z_k est le vecteur de mesure qui contient les quantités mesurées.

H_k est la matrice d'observation (*measure*). Elle est en fait le lien entre les paramètres du système et les mesures.

On définit $\hat{x}^* \in \mathbb{R}^n$ (on note le "super étoile") comme étant notre estimation d'état a priori à l'étape k étant donné la connaissance du processus avant l'étape k , et $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ comme notre estimation d'état a posteriori à l'étape k étant donné la mesure z_k . On peut alors définir les erreurs d'estimation a priori et a posteriori comme :

$$e_k^* \equiv x_k - \hat{x}^* \text{ et } e_k \equiv x_k - \hat{x}$$

w_k est le bruit de processus de valeur moyenne nulle ; il est supposé blanc, indépendant du vecteur d'état initial

$$E[w_k] = 0$$

La covariance d'erreur d'estimation a priori est alors:

$$P_k^* = E[w_k w_k^T] = Q_k \delta_{ij}$$

v_k est le bruit de mesure. Il est supposé blanc, indépendant du vecteur d'état initial, de valeur moyenne nulle donnée par :

$$E[v_k] = 0$$

La covariance d'erreur d'estimation a posteriori est alors:

$$P_k = E[v_k v_k^T] = R_k \delta_{ij}$$

δ_{ij} Représente le symbole de Kronecker définie. $\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Q et R sont des matrices symétriques définies positives.

La détermination de la covariance du bruit du système Q_k est généralement plus difficile que celle du bruit de mesure R_k , car l'observation directe de l'état du système est impossible. v_k est supposé aussi non corrélé avec le bruit de système d'état w_k . On peut donc écrire:

$$E[v_k w_k^T] = 0$$

Choix des matrices de covariance Q et R

La matrice de covariance est Q est 4×4 , celle de R est 2×2 . Ceci nécessite 20 éléments à déterminer. Comme les bruits sont non corrélés et pour réduire les éléments, les matrices Q et R peuvent être diagonalisées.

$$\begin{cases} Q = \text{dig}[q_{11} & q_{22} & q_{33} & q_{44}] \\ R = \text{dig}[r_{11} & r_{22}] \end{cases}$$

Avec :

On note que $q_{11} = q_{22}$; $q_{33} = q_{44}$; et $r_{11} = r_{22}$, donc en tout, ces valeurs initiales sont nécessaires pour initialiser ces 2 matrices.

Problèmes :

Le problème de l'estimation de l'état x_k d'un système à partir des observations y_k peut être divisé en trois problèmes distincts selon l'intervalle d'observation :

*) Filtrage

Estimation de x_k à partir de $z_{1:m} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ avec $m = k$

*) Prédiction

Estimation de x_k à partir de $z_{1:m} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ avec $m > k$

*) Lissage

Estimation de x_k à partir de $z_{1:m} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ avec $m < k$

Erreur quadratique moyenne minimale MMES (Minimum mean square error)

Dans les statistiques et l'automatique, un estimateur d'erreur quadratique moyenne minimale (MMSE) est une méthode d'estimation qui minimise l'erreur quadratique moyenne (MSE), qui est une mesure courante de la qualité de l'estimateur, des valeurs ajustées d'une variable dépendante.

L'estimateur qui minimise $E[(\hat{x}_k - x_k)^2 | z_{1:k}]$ est défini par:

$$\hat{x}_{k|k} = E[x_k | z_{1:k}]$$

Une propriété remarquable de cet estimateur est son écriture récursive qui définit les équations de Kalman discret. Cette écriture permet également de déterminer récursivement la variance de l'erreur de filtrage

$$P_{k|k} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T | z_{1:k}]$$

Plus précisément, on a :

Prédiction à un pas (1)

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k}$$

Covariance d'erreur d'estimation à un pas (2)

$$P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + Q_k$$

Gain de Kalman (3)

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}$$

Estimation de l'état à l'instant $t + 1$ (4)

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} K_{k+1} (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k})$$

Matrice de covariance de l'état (5)

$$P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1|k}$$

La figure suivante illustre le fonctionnement du processus itératif de ce filtre

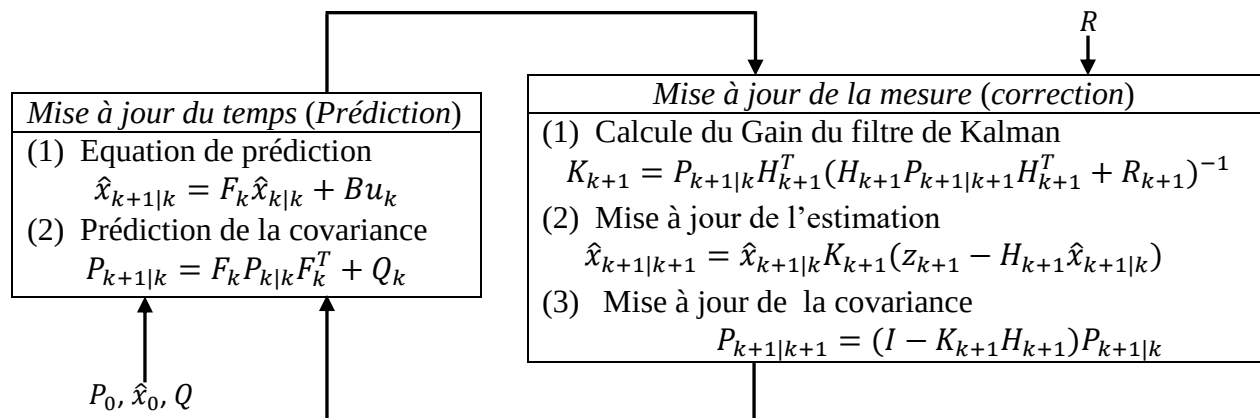


Figure 17 : Etapes du processus itératif du filtre de Kalman

III.3 Filtre de Kalman étendu (EKF: Extended Kalman Filter)

Le filtre de Kalman étendu: « Extended Kalman Filter » réalise une estimation de l'état d'un processus non linéaire. Il permet notamment d'ajouter, au vecteur d'état, une autre variable que l'on désire estimer.

Dans l'approche du filtre de Kalman, les erreurs de mesure et de modélisation obéissent, par hypothèse, à certaines lois de probabilité. Sa réalisation fournit en de ligne non seulement la valeur estimée optimale, au sens de la variance minimale, mais également la variance de l'erreur d'estimation. Cependant, il arrive souvent que l'hypothèse de linéarité ne soit pas valide. Dans ce cas, il est possible de généraliser le filtre de Kalman en utilisant des formes linéarisées de l'opérateur d'observation et du modèle dynamique.

Etant donné, que le filtre de Kalman étendu n'est que l'application du filtre de Kalman décrit précédemment dans le cas d'un système non linéaire, par conséquent, ce système doit être discrétisé et linéarisé autour d'un point de fonctionnement (vecteur d'état estimé) actuel.

Le filtre de Kalman étendu est une extension de l'algorithme de l'estimateur de Kalman linéaire adapté aux systèmes non linéaires, de la manière suivante :

Le système non linéaire se met sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = f(x, u) + W \\ \dot{Y} = h(x, u) + V \end{cases}$$

Avec des opérateurs de transition f et d'observation h non linéaire.

La linéarisation nécessite l'hypothèse que f et h sont deux fonctions différentiables. On se base sur une linéarisation autour d'un point de fonctionnement. Donc le développement en série de Taylor au tour d'un point connu s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X_{k+1} \approx f(\hat{X}_{k|k}, U_k, k) + \frac{df}{dx}(\hat{X}_{k|k}, U_k, k)(X_{k|k} - \hat{X}_{k|k}) + W_k \\ Y_k \approx h(X_{k|k}, k) + \frac{dh}{dx}(\hat{X}_{k|k}, k)(X_{k|k} - \hat{X}_{k|k}) + V_k \end{cases}$$

Cette équation peut être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} X_{k+1} = F_k X_k + S_k + W_k \\ Y_k = H_k X_k + Z_k + V_k \end{cases}$$

a- Etape de prédiction

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1|k} &= F(\hat{X}_{k|k}) + BU_k \\ \hat{X}_{k+1} &= F(X_k) + BU_k + W_k \\ \Rightarrow \hat{X}_{k+1} &\approx F(\hat{X}_{k|k}) + \frac{df}{dx}(\hat{X}_{k|k})F(X_k) - \hat{X}_{k|k} + BU_k + W_k \end{aligned}$$

La valeur approchée de l'erreur de prédiction $\tilde{X}_{k+1|k}$ est donc :

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{k+1|k} &= X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k} \\ \tilde{X}_{k+1|k} &\approx \frac{df}{dx}(\hat{X}_{k|k})(X_k - \hat{X}_{k|k})\end{aligned}$$

Pour calculer la matrice de covariance, le système a été linéarisé autour de $\hat{X}_{k|k}$

$$P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + W_k Q_k W_k^T$$

Avec :

$$F_k = \frac{df}{dx}(\hat{X}_{k|k})$$

b- Etape de correction

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + H_{k+1} (Y_{k+1} - H(X_{k+1|k}))$$

Un développement limité du premier ordre de la fonction d'observation $H(x)$, autour de l'état prédit permet alors de calculer une valeur approchée de l'erreur d'estimation $\tilde{X}_{k+1|k+1}$ et donc de la covariance.

$$H(X_{k+1}) \approx H(\hat{X}_{k+1|k}) + \frac{dh}{dx}(\hat{X}_{k+1|k})(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k})$$

Donc

$$\tilde{X}_{k+1|k+1} = X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k+1}$$

$$\tilde{X}_{k+1|k+1} = X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k} - K_{k+1} [H(X_{k+1}) + V_{k+1} - H(\hat{X}_{k+1|k})]$$

$$\tilde{X}_{k+1|k+1} = \tilde{X}_{k+1|k} - K_{k+1} \left[\frac{dh}{dx}(\hat{X}_{k+1|k}) \tilde{X}_{k+1|k} + V_{k+1} \right]$$

Soit

$$\begin{aligned}P_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k} + K_{k+1} H_{k+1} P_{k+1|k} \\ \Rightarrow P_{k+1|k+1} &= [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1|k}\end{aligned}$$

Où

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T + V_k R_{k+1} V_k^T)^{-1}$$

Avec

$$H_{k+1} = \frac{dh}{dx}(\hat{X}_{k+1|k})$$

Plus précisément, on a :

Prédiction à un pas (1)

$$\hat{X}_{k+1|k} = F(\hat{X}_{k|k}, 0, k)$$

Covariance d'erreur d'estimation à un pas (2)

$$P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + W_k Q_k W_k^T$$

Gain de Kalman (3)

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T + V_k R_{k+1} V_k^T)^{-1}$$

Estimation de l'état à l'instant $t + 1$ (4)

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} K_{k+1} (z_{k+1} - h(x_{k+1|k+1}, 0))$$

Matrice de covariance de l'état (5)

$$P_{k+1|k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1|k}$$

La figure suivante illustre le fonctionnement du processus itératif de ce filtre

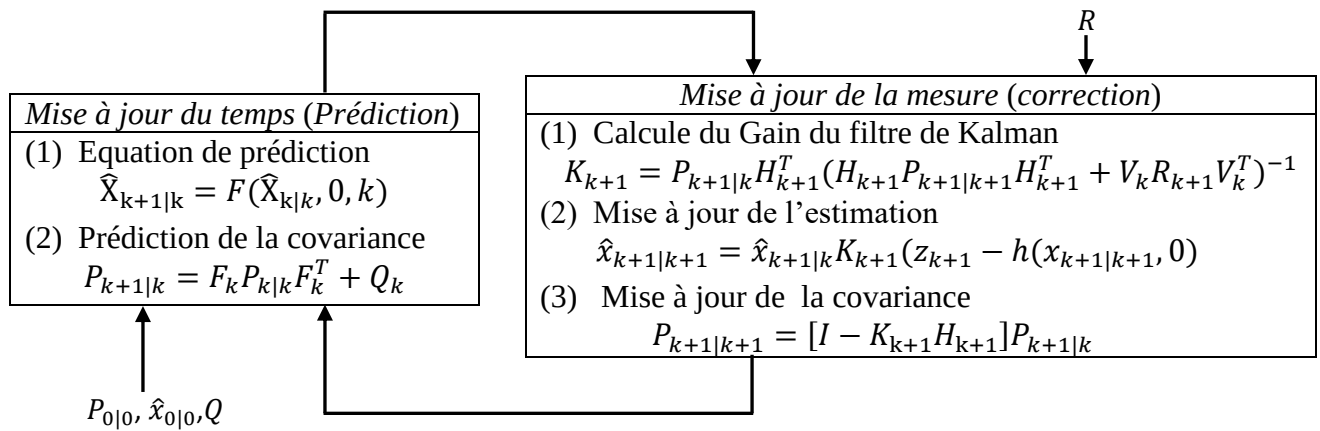


Figure 17 : Etapes du processus itératif du filtre de Kalman étendu

IV. Observateur à entrées inconnues (Unkown Input Observer)

IV.1 Introduction

Il est fréquent, lors de la modélisation d'un système, de faire intervenir des entrées non mesurables. Ces entrées seront dites inconnues; et les observateurs portent le nom des '*observateurs à entrées inconnues*'.

Le principe de construction d'un observateur à entrées inconnues consiste à rendre l'erreur d'estimation indépendante des perturbations non mesurables.

IV.2 Synthèse de l'observateur

Pour concevoir l'observateur a entrées inconnues on considère le système dynamique linéaire invariant soumis à l'influence des entrées inconnues et décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_x v(t) + D_x w(t) \\ y(t) = Cx(t) + F_y v(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Où :

G_x représente la matrice de distribution des perturbations, $w(t) \in \mathbb{R}^{q_w}$.

L'objectif dans cette partie est de concevoir un vecteur de résidu $\varepsilon(t)$ sur la base de ce modèle, tel que $\varepsilon(t)$ soit sensible aux défauts $v(t)$ et insensible aux entrées inconnues $w(t)$.

Le principe de base de l'observateur à entrées inconnues est l'emploi d'une transformation T , telle que $z = Tx \in \mathbb{R}^{q_v}$ soit l'estimation d'une combinaison linéaire de l'état. La méthode consiste alors à estimer la variable z à l'aide de l'observateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Nz(t) + Gu(t) + Py(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ly(t) \end{cases}$$

Où :

$\dot{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation du vecteur d'état $x(t)$.

N, G, P et L sont des matrices inconnues de dimensions adéquates, qui vont être déterminées de façon que l'erreur d'estimation d'état $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$: tende asymptotiquement vers zéro ($\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ quand $t \rightarrow \infty$), ce qui prouve la garantie de cette erreur. Malgré la présence des perturbations. Cette erreur peut s'écrire comme suite :

$$\begin{aligned} e(t) &= z(t) - Ly(t) - x(t) \\ e(t) &= z(t) - P(Cx(t) + F_y v(t)) - x(t) \\ e(t) &= z(t) - (I + LC)x(t) - LF_y v(t) \\ e(t) &= z(t) - Mx(t) - LF_y v(t) \end{aligned}$$

Avec $M = I + LC$

La dynamique de l'erreur d'estimation s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{z}(t) - M\dot{x}(t) - LF_y \dot{v}_y(t) \\ \dot{e}(t) &= Nz(t) + Gu(t) + PCx(t) + PF_y v(t) - M\dot{x}(t) - MBu(t) - MF_x v(t) - MD_x w(t) \\ &\quad - LF_y \dot{v}_y(t) \\ \dot{e}(t) &= Nz(t) + (G - MB)u(t) + (PC - MA)x(t) + PF_y v(t) - MF_x v(t) - MD_x w(t) - LF_y \dot{v}_y(t) \\ \dot{e}(t) &= Ne(t) + NMx(t) + NLF_y v(t) \\ &\quad + (G - MB)u(t) + (PC - MA)x(t) + PF_y v(t) - MF_x v(t) - EMw(t) - LF_y \dot{v}_y(t) \\ \dot{e}(t) &= Ne(t) + (NM + PC - MA)x(t) + (G - MB)u(t) + (PF_y + NLF_y - MF_x)v(t) - LF_y \dot{v}_y(t) \\ &\quad - MD_x w(t) \end{aligned}$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} N \text{ est stable} \\ NM + PC = MA \\ G = MB \\ MD_x = 0 \\ PF_y + NLF_y - MF_x \neq 0 \\ LF_y \neq 0 \\ M = I + LC \end{cases}$$

N est stable ou Hurwitz, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont à parties réelles négatives.

Et par conséquent, la dynamique de l'erreur de l'estimation devient sensible seulement qu'aux défauts qui influent sur le système:

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + (LF_y + NLF_y - MF_x)v(t) - LF_y\dot{v}_y(t)$$

La solution de l'ensemble des équations consiste en premier lieu à assurer la condition de découplage des entrées inconnues, c'est-à-dire la détermination de la matrice L .

$$EM = 0 \text{ ou } M = I + LC \Rightarrow (I + LC)D_x = 0 \Rightarrow LCD_x = -D_x$$

Donc trouver la matrice L telle que : $LCD_x = -D_x$

Cette égalité est satisfaite si la pseudo-inverse de CD_x qu'on note $(CD_x)^+$ vérifie l'équation suivante :

$$(CD_x)^+ = [(CD_x)^T CD_x]^{-1} (CD_x)^T$$

Alors, la matrice L peut être calculer de la manière suivante

$$L = -D_x(CD_x)^+ = -D_x[(CD_x)^T CD_x]^{-1} (CD_x)^T$$

La matrice L n'existe que si la matrice $(CD_x)^T CD_x$ est inversible. Cette matrice n'est inversible ou le découplage n'est possible que si le rang de (CD_x) est égale au nombre d'entrée inconnues à découpler (N_{ed}). Cette condition signifie que pour pouvoir construire un observateur à entrées inconnues, le nombre de sortie (N_s) doit être supérieure au nombre d'entrée inconnues à découpler.

$$\text{rang}(CD_x) = \text{rang}(D_x) = N_{ed} < N_s$$

Algorithme de synthèse de l'observateur

- 1- Vérifier que $\text{rang}(CD_x) = N_{ed} < N_s$ puis calculer L à partir de l'équation $L = -D_x[(CD_x)^T CD_x]^{-1} (CD_x)^T$
- 2- Calculer $M = I + LC$ à partir de L
- 3- Calculer $G = MB$ à partir de M
- 4- Imposer N une matrice Hurwitz, en faisant apparaître explicitement les valeurs propres désirées pour l'observateur, on peut choisir N comme une matrice diagonale.
- 5- Calculer la matrice P , telle que $PC = MA - NM$

Structuration de résidus

On calcule maintenant la matrice de transfert reliant les défauts $v(t)$ à l'erreur d'estimation en sortie $e_y(t)$. Supposant que $F_1 = PF_y + NLF_y - MF_x$ et $F_2 = -LF_y$. Alors la transformée de Laplace de l'équation

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + (LF_y + NLF_y - MF_x)v(t) - LF_y\dot{y}(t)$$

Peut s'exprimer par :

$$pE_x(p) = NE_x(p) + F_1V(p) + pF_2V(p)$$

Ce qui implique :

$$E_x(p) = (pI - N)^{-1}(F_1 + pF_2)V(p)$$

L'erreuer d'estimation en sortie $e_y(t)$ s'écrit comme suite :

$$e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$$

$$E_y(p) = \hat{Y}(p) - Y(p)$$

$$E_y(p) = C(X(p) - \hat{X}(p)) - F_yV(p) = CE_x(p) - F_yV(p)$$

$$E_y(p) = C(pI - N)^{-1}(F_1 + pF_2)V(p) - F_yV(p)$$

$$E_y(p) = [C(pI - N)^{-1}(F_1 + pF_2) - F_y]V(p)$$

A partir des équations $E_x(p)$ et $E_y(p)$, on déduire que

$$E_y(p) = H(p)V(p)$$

$$H(p) = C(pI - N)^{-1}(F_1 + pF_2) - F_y, \text{ avec } F_1 = PF_y + NLF_y - MF_x \text{ et } F_2 = -LF_y$$

Dans le but de faciliter la localisation de défauts, on utilise une matrice de transfert $Q(p)$ stable permettant de structurer le vecteur de résidu $R(p)$, de façon que :

$$R(p) = Q(p)E_y(p) = Q(p)H(p)V(p) \text{ avec } Q(p)H(p) \neq 0$$

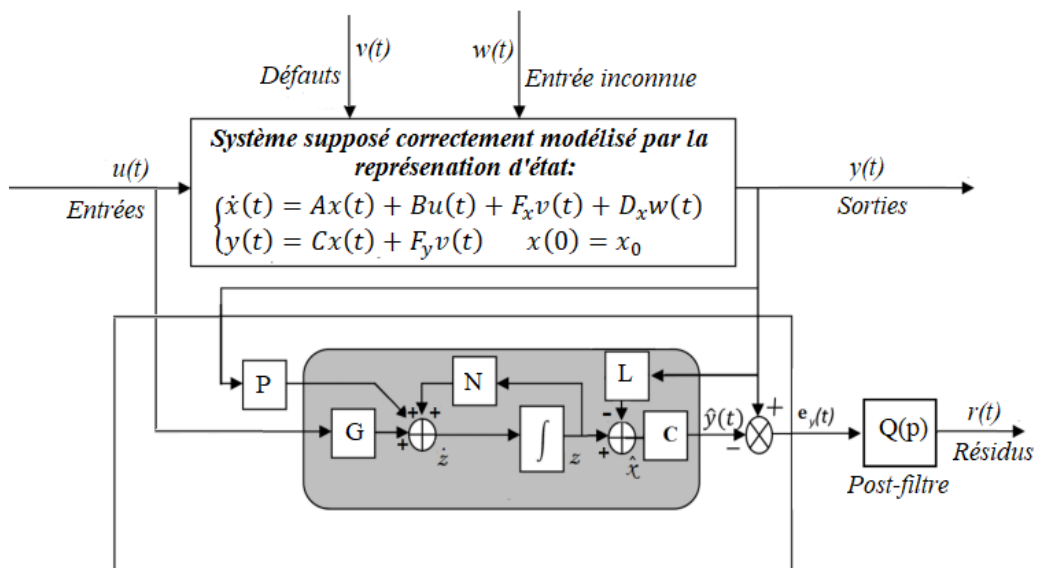


Figure 18 : Génération de résidus à l'aide de l'observateur à entrées inconnues