Chapitre IV: Séries 2

IV.1- Séries numériques 2

IV.1.1- Séries de réels et de complexes 2

IV.1.2- Séries à termes positifs 4

IV.1.3- Séries réelles alternées 5

IV.2- Suite de fonctions 6

IV.3- Série de fonctions 7

IV.4- Série entière 8

Chapitre IV: Séries

IV.1- Séries numériques

IV.1.1- Séries de réels et de complexes

Définition 1 Série de réels ou de complexes

Étant donnée une suite (u_n) de nombres réels ou complexes, on appelle série de terme général u_n la suite (S_n) définie par :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

S_n Est appelée somme partielle d'indice n (ou de rang n, ou d'ordre n) de la série.

Définition 2 Série convergente ou divergente

Soit (u_n) une suite de réels ou de complexes. On dit que la série de terme général u_n converge, si et seulement si la suite (S_n) est convergente. Dans ce cas, la limite de la suite (S_n) est appelée somme de la série et notée

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

Si une série n'est pas convergente, on dit qu'elle diverge.

Exemple n° IV.01

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$$

$u_n = q^{n-1}$ Est suite géométrique ; la somme :

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$D'où\ il\ vient\ que \qquad S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1-q^n}{1-q} \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ ? & q = \pm 1 \\ \infty & |q| > 1 \end{cases}$$

$$si\ \ q = 1 \Longrightarrow S_n = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots. + 1 = n \ \ donc \ \lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

$$si\ \ q = -1 \Longrightarrow S_n = -1 + 1 - 1 + \ldots\ldots\ldots. + \ \ldots \ donc \ \lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} 0 & n\ paire \\ 1 & n\ impaire \end{cases} \ \ n'existe\ pas$$

La série converge seulement $|q| < 1$

Théorème 1 Série géométrique

La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ où $a \in \mathbb{C}$est convergente si et seulement si $|q| < \ 1$ et sa somme est alors

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

Définition 3 Le reste de la série

Pour une série convergente, on appelle reste d'ordre n de la série la quantité :

$$R_n = S - S_n$$

Théorème 2 Condition nécessaire de convergence

Si la série réelle ou complexe $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0 à l'infini.

ⓘ *Attention : la réciproque de ce théorème est fausse et il existe des séries dont le terme général tend vers 0 et qui sont divergentes (exemple la série harmonique $\sum 1/n$*

Théorème 3 Critère de divergence grossière

Si la suite réelle ou complexe (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple n≗ IV.02

01) $$\lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{1}{3n}\right) = 3 \Longrightarrow la\ série\ diverge$$

02) $$\lim_{n\to+\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0 \Longrightarrow pas\ de\ conclusion\ sur$$

03) $$\lim_{n\to+\infty}\left(2^n+\frac{1}{2n}\right) = +\infty \Longrightarrow la\ série\ diverge$$

04) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{ln\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}ln\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{ln\, n}{n}} = e^0 = 1 \neq 0$$
$$\Longrightarrow u_n la\ série\ diverge$$

05) $$\lim_{n\to+\infty} n\times sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\times sin\, x = 1 \neq 0 \Longrightarrow u_n la\ série\ diverge$$

Définition 4 Convergence absolue

Une série $\sum u_n$ est dite série absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ convergente.

Définition 5 Série télescopique

Une série réelle ou complexe $\sum u_n$ est dite télescopique lorsque son terme général peut se mettre sous la forme : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = a_{n+1} - a_n$, où (a_n) est une suite de réels ou de complexes.

Théorème 4 Convergence d'une série télescopique

Une série télescopique réelle ou complexe $\sum u_n$, avec : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = a_{n+1} - a_n$, converge si et seulement si (a_n) est une suite convergente.

Théorème 5 Cas de trois séries liées par une somme

Soient $u_n, v_n\ et\ w_n$ des séries réelles ou complexes, et : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\ ou \mathbb{C}^2; \forall\, n \in \mathbb{N}.\ w_n = \alpha u_n + \beta v_n$

Si deux des trois séries $\sum u_n, \sum v_n, \sum w_n$ convergent, la troisième converge aussi. Si l'une diverge, au moins l'une des deux autres diverge.

IV.1.2- Séries à termes positifs

Définition 6 Séries à termes positifs

On dit qu'une série $\sum u_n$ est à termes positifs si $u_n \geq 0$, pour tout entier n

Théorème 6 Critère de convergence

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. Elle converge, si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée.

Exemple n≗ IV.03

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots \dots \dots \dots \dots .. + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) = 2 - \frac{1}{N} \leq 2$$

La somme partielle est majorée donc la série converge.

Définition 7 Série semi-convergente

On dit qu'une série réelle ou complexe est semi-convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.

Théorème 6 Règle des majorants

Soient u_n *et* v_n deux séries à termes réels positifs, telles que : $0 \leq u_n \leq v_n$:

Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi ;

Si la série $\sum u_n$ diverge, il en est de même de la série $\sum v_n$.

Théorème 7 Séries de même nature

Soient u_n *et* v_n deux séries à termes réels positifs, telles que $u_n \sim v_n \ (n \to +\infty)$

Alors les deux séries sont de même nature.

Exemple n≗ IV.04

01) $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ Par comparaison avec la série harmonique, la série est divergente

02) $\frac{n^2+\sin n}{n^3+1} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ La série diverge (même nature que la série harmonique)

Théorème 8 Règle de Riemann

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Théorème 9 Règle d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ une limite finie

- Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge ;
- Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge ;
- Si $l = 1$ on ne peut pas conclure.

ⓘ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l < 1$ *La série $\sum u_n$ est absolument convergente.*

Exemple n≗ IV.05

$u_n = \frac{a^n}{n!}$ $avec\ a > 0$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}/(n+1)!}{a^n/n!} = \lim_{n\to+\infty} a \frac{n!}{(n+1)n!} = 0$

D'après le critère d'Alembert la série converge.

Théorème 10 Règle de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ une limite finie

- Si $l < 1$, la série $\sum u_n$converge ;
- Si $l > 1$, la série $\sum u_n$diverge.
- Si $l = 1$on ne peut pas conclure.

ⓘ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l < 1$ *La série* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

Exemple n≗ IV.06

$u_n = \frac{a^n}{n^n}$ $avec\ a > 0$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = 0$

D'après le critère de Cauchy la série converge.

IV.1.3- Séries réelles alternées

Définition 8 Série alternée

On appelle série alternée toute série du type $\sum(-1)^n a_n$, avec a_n de signe constant.

Théorème 11 Règle de Leibniz

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que :

- $(|u_n|)$ Est une suite décroissante ;
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Alors $\sum u_n$converge.

Exemple n≗ IV.07

$$S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *est décroissante ;*

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 0$

D'après le critère de Leibniz la série converge.

Exemple n≗ IV.08

$$S_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n}{4n^2-3} \Rightarrow a_n = \frac{2n}{4n^2-3}$$

Montrons que la suite $a_n$est décroissante, pour cela il existe plusieurs méthodes :

- Par récurrence que $a_{n+1} \leq a_n$;
- L'étude de la fonction $f(n) = a_n$.
- Nous allons adopter ici la troisième méthode

$$f(n) = \frac{2n}{4n^2-3} \quad ,f'^{(n)} = \frac{2(4n^2-3)-2n(8n)}{(4n^2-3)^2} = \frac{-8n^2-3}{(4n^2-3)^2} < 0$$

Donc la fonction f est décroissante.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{2n}{4n^2-3} = 0$$

D'après le critère de Leibniz la série converge.

IV.2- Suite de fonctions

Définition 9 Convergence simple

Soit f_n une suite de fonctions sur I. On dit que $f_n$converge simplement vers f sur I si, pour tout $x \in I$, la suite numérique $f_n(x)$ tend vers $f(x)$. Autrement dit :

$$\forall x \in I, \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N^*, tel\ que\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Exemple n≗ IV.09

Trouver la limite $f(x)$ de la suite $\left(f_n(x)\right)$

$$f_n(x) = x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3} \quad I = [0;1]$$

Solution

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n(1-3x^2+2x^3) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{matrix}$$

$\left(f_n(x)\right)$Converge simplement vers $f(x) = 0$

Définition 10 Convergence uniforme

Soit f_n une suite de fonctions sur I. On dit que $f_n$converge uniformément vers f sur I si, pour tout $x \in I$, la suite numérique $f_n(x)$ tend vers $f(x)$. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N^*, \forall x \in I, tel\ que\ n \geq n_0 \Rightarrow sup|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Exemple n≗ IV.10

Étudier la convergence uniforme de $\left(f_n(x)\right)$

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2} \qquad I = [-1;+1]$$

Solution

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+x^2} = 1$$

$$d_n = sup|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n^2}{n^2+x^2} - 1\right| = \left|\frac{-x^2}{n^2+x^2}\right| = \frac{x^2}{n^2+x^2} \leq \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in I$$

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$$

$(f_n(x))$Converge uniformément vers $f(x) = 0$

ⓘ *Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f.*

IV.3- Série de fonctions

Définition 10 Séries de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle I et (S_n) la suite des sommes partielles, c.à.d. La suite de fonctions définie par :

$$\forall x \in I \qquad S_n(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$$

Exemple n° IV.11

Déterminer le domaine de convergence et le domaine de convergence absolue des série $\sum_n^\infty f_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ln^n x}{n}$$

Solution

Appliquons le thé. Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{ln^{n+1} x}{n+1}\right| \times \left|\frac{n}{ln^n x}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| \times |ln\, x| = |ln\, x|$$

D'après Alembert la série converge pour $|ln\, x| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{e} < x < e$

$$x = \frac{1}{e} \ \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\ conerge$$

$$x = e \ \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ diverge$$

Le domaine de convergence $[\frac{1}{e}, e[$

Le domaine de convergence absolue $]\frac{1}{e}, e[$

Définition 11 Convergence uniforme

On définit de la même façon que pour une suite de fonctions la convergence uniforme d'une série de fonctions.

On dit que la série de fonctions $\sum_n^\infty f_n(x)$converge uniformément vers s $f$sur I si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément vers S sur I. Ceci revient à dire que la suite (R_n) des restes converge uniformément vers zéro :

IV.4- Série entière

Définition 11 Convergence uniforme

On appelle série entière réelle toute série de fonctions $\sum_n^\infty a_n x^n$,

Théorème 12 Abel

Si la série entière converge pour $x = x_0 \neq 0$, alors elle converge absolument pour toute valeur de x telque $|x| < |x_0|$

Théorème 13 Rayon de convergence

Soit $\sum_n^\infty a_n x^n$ une série entière. Il existe un unique $R \in [0, +\infty]$ tel que :

- La série converge absolument pour $|x| < R$;
- La série diverge trivialement pour $|x| > R$;

R est appelé rayon de convergence de la série.

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \ ; R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Exemple n≗ IV.12

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$$

Solution

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\right| \times \left|\frac{(2n)!}{n!}\right| = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}\right| = 0 \Longrightarrow R = +\infty$$

Fonctions développables en série entière

Définition 12 Série de Taylor

Soit f une fonction définie et indéfiniment dérivable dans un voisinage de 0. On appelle série de Mac-Laurin ou série de Taylor à l'origine de f la série entière.

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$