1. Régime permanent

En régime continu, les grandeurs courant et tension sont constantes dans le temps.

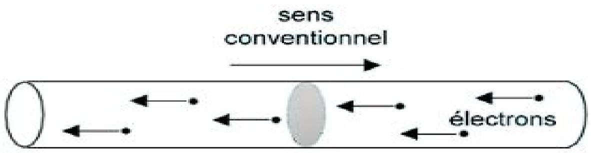
1.1 Courant électrique : un courant électrique est un mouvement d'ensemble de porteurs de charges électriques.

- **L'intensité du courant électrique** : C'est la quantité d'électricité transportée par unité de temps :

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt} \quad : \quad [\mathrm{A}] = \frac{[\mathrm{C}]}{\mathrm{s}}}$$

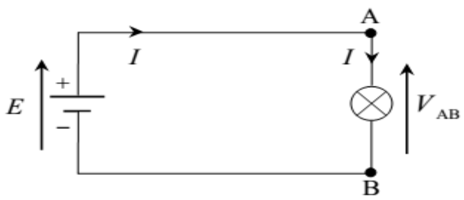
Où dq représente la quantité d'électricité qui traverse la section du conducteur pendant la durée dt

- Le **sens conventionnel positif** du courant électrique est le sens du mouvement des porteurs de charges positives.
- Le **sens réel** du courant est le sens du mouvement des électrons.



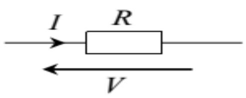
1.2 Tension électrique :

Une tension électrique est une *différence de potentiel* électrique(ou d.d.p.). Elle indique la force avec laquelle sont propulsés les électrons dont le déplacement constitue le courant électrique. Elle s'exprime en volts (V).



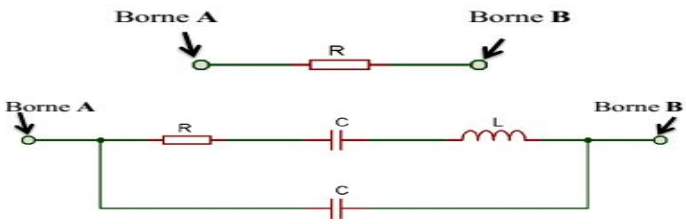
1.3 Loi d'Ohm: Dans une résistance électrique, tension et courant sont proportionnels :

$$V = R \times I$$
$$[\mathrm{V}] = [\Omega] \times [\mathrm{A}]$$

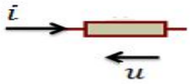


1.4 Dipôle électrique

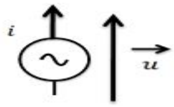
Un dipôle électrique est un composant unique ou un ensemble de composants, connectés à deux (02) bornes



- **Convention récepteur** : le courant i et la tension u sont orientés en sens opposés.



❖ **Convention générateur** : le courant i et la tension u sont orientés dans le même sens.



En régime continu, on classe les dipôles, en deux (02) catégories :

1.4.1 Dipôle actif : C'est un dipôle qui comporte une source d'énergie. Par exemple, on peut citer pile, ou moteur électrique à courant continu.

1.4.2 Dipôle passif : C'est un dipôle qui consomme de l'énergie électrique et ne comporte aucune source d'énergie. On citera par exemples : résistance, inductance, ampoule…..etc.

1.4..3 Association de dipôles Dans un circuit électrique, les dipôles peuvent être associés en série ou en parallèle. Ces deux associations ont des avantages et aussi inconvénients. -

Dipôles en série : Les dipôles sont associés en série lorsqu'ils sont branchés les uns à la suite des autres. Le courant i est commun à tous les dipôles. La tension u est la somme des tensions aux bornes de chaque dipôle.

Dipôles en parallèle : La tension u est commune à tous les dipôles. Le courant total i est la somme des courants aux bornes de chaque dipôle.

❖ R***ésistance électrique R***: représente l'opposition faite au passage du courant électrique dans un circuit électrique fermé et soumis à une tension électrique continue. Un dipôle résistif est un dipôle passif. L'énergie qu'il absorbe est entièrement consommée par effet Joule, donc dissipée sous forme de chaleur, Un dipôle résistif est représenté par un rectangle.

Dipôle résistif

Lorsqu'un dipôle résistif est traversé par un courant d'intensité I , une tension électrique U apparaît à ses bornes. En donnant plusieurs valeurs à l'intensité I nous constatons que la tension prend des valeurs proportionnelles à celles de l'intensité. Ce coefficient de proportionnalité est appelé la résistance de ce dipôle résistif, elle est notée R et s'exprime en ohms D'autre part, la résistance d'un fil conducteur dépend de la nature du conducteur et de ses dimensions, elle se calcule à partir de la relation

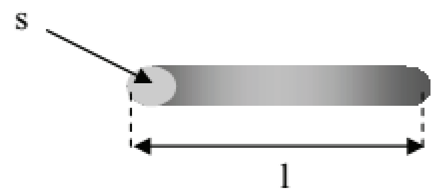
$$R = \frac{\rho\ l}{s}$$

R La valeur de la résistance du conducteur en ohms $[\Omega]$

ρ La valeur de la résistivité du conducteur en ohms.Mètres $[\Omega\, m]$

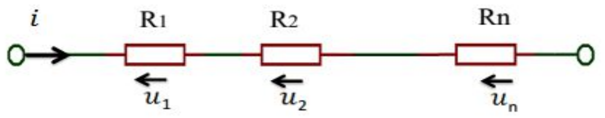
l La longueur du conducteur en mètres [m]

s La section du conducteur en mètres ² [m²]



Conducteur rectiligne

Association des résistances (R) en série



Le courant est commun à toutes les résistances. La tension aux bornes de l'ensemble est égale à

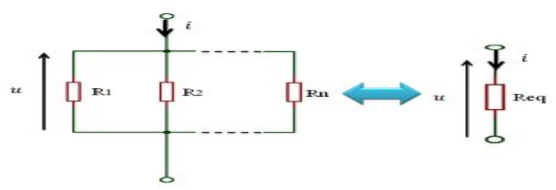
$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$
$$= (R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n)i = R_{eq}\, i$$

La résistance équivalente est alors égale à la somme des résistances placées en série. Son unité est Ω.

$$R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n = \sum_1^n R_n$$

A- Association des résistances (R) En parallèle

En parallèle, la tension est commune à toutes les résistances. Le courant qui entre dans l'ensemble est donné, selon la loi des nœuds, par:



$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$$
$$= \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \frac{u}{R_2} + \cdots + \frac{u}{R_n}$$
$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right) u$$
$$= \frac{1}{R_{eq}} . u$$

L’admittance équivalente est égale à la somme des inverses des résistances placées en parallèle. Son unité est Ω^{-1}.

$$Y_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \sum_1^n \frac{1}{R_n}$$

- Cas de 2 résistances placées en parallèle

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_1}$$

- Cas de n résistances identiques :

$$R_{eq} = \frac{R}{n}$$

- ***conductance électrique G*** : c’est la facilité qu'a un circuit électrique à laisser passer le courant i lorsqu'une tension continue V lui est appliquée.

$G = \frac{1}{R}$ s’exprime en siemens [S] ou [Ω^{-1}].

- **Dipôle capacitif**

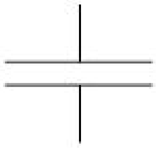
Le condensateur est un composant électronique ou électrique élémentaire, constitué de deux armatures conductrices (appelées « électrodes ») en influence totale et séparées par un isolant polarisable (ou « diélectrique »). Sa propriété principale est de pouvoir stocker des charges électriques opposées sur ses armatures.

Un condensateur est caractérisé par sa capacité, notée C et exprimée en Farads (symbole F).

: $\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon \cdot S}{d}}$.

La tension aux bornes d’un condensateur traversé par un courant d’intensité variable en fonction du temps est :

$$u_c = \frac{1}{C}\int idt$$



Énergie emmagasinée par un condensateur

$\boxed{W = \frac{1}{2}C\,(V_A - V_B)^2}$ ou encore $\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$.

a. Capacité en continu

En régime continu, le courant traversant la capacité est nul. En effet, le condensateur se comporte

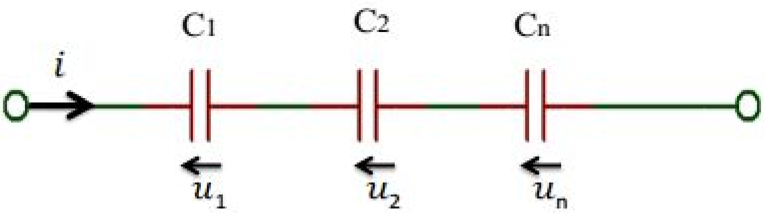
comme un interrupteur ouvert

b. Association des condensateurs en série

Un condensateur est caractérisé par sa capacité, notée C et exprimée en Farads (symbole F). La tension aux bornes d'un condensateur traversé par un courant d'intensité variable en fonction du temps est :

$$u_c = \frac{1}{C}\int idt$$

Ici, le courant est commun à tous les condensateurs. La tension aux bornes de l'ensemble est



$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$= \frac{1}{C_1}\int i.dt + \frac{1}{C_2}\int i.dt + \frac{1}{C_3}\int i.dt + \cdots + \frac{1}{C_n}\int i.dt$$

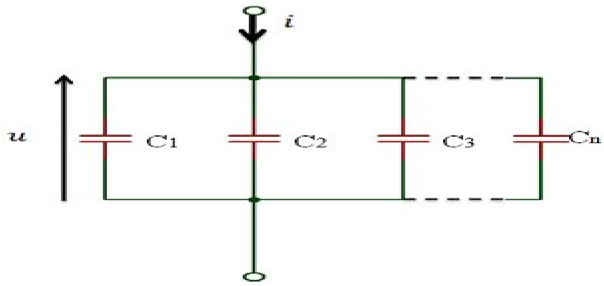
$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right).\int i.dt$$

Il vient alors :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_1^n \frac{1}{C_n} \qquad \frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

c. Association des condensateurs en parallèle

En parallèle la tension est commune à tous les condensateurs. Le courant qui entre dans l’ensemble est (loi des nœuds):



$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$$

$$= C_1\frac{du}{dt} + C_2\frac{du}{dt} + C_3\frac{du}{dt} + \cdots + C_n\frac{du}{dt}$$

$$= (C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n)\frac{du}{dt}$$

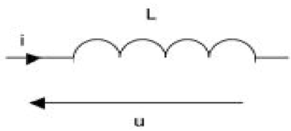
$$C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n = \sum_1^n C_n \qquad C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

❖ **Dipôle inductif**

Une bobine (aussi appelée self ou self-inductance) est constituée en général d’un fil conducteur enroulé en hélice, formant un solénoïde. La bobine est caractérisée par son inductance L. s’exprime en Henry.

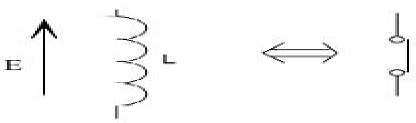
La tension aux bornes d’une bobine est reliée à l’intensité du courant par la relation suivante :

$$u(t) = L di/dt$$



a. Inductance en continu

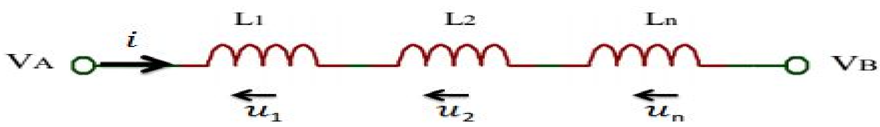
En régime continu, la tension aux bornes de l'inductance est nulle. En effet, l'inductance se comporte comme un interrupteur fermé.



b. Association des inductances en série

Associer des inductances en série revient à augmenter le nombre total de spires. La tension aux bornes d'une inductance traversée par un courant d'intensité variable en fonction du temps est donnée par :

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$



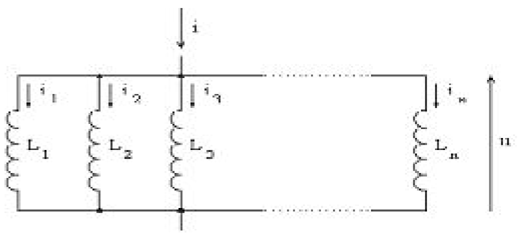
$$V_A - V_B = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$
$$= L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + L_3\frac{di}{dt} + \cdots + L_n\frac{di}{dt}$$
$$= (L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n)\frac{di}{dt} = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

L'inductance équivalente est alors égale à la somme des inductances placées en série. (On suppose que le courant a le même sens de circulation dans les bobines).

$$L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n = \sum_1^n L_n \qquad L_{eq} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

c. Association des inductances en parallèle

En parallèle la tension est commune à toutes les inductances. Le courant qui entre dans l'ensemble est (loi des nœuds):



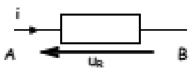
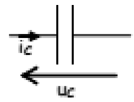
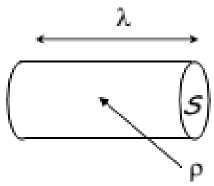
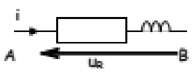
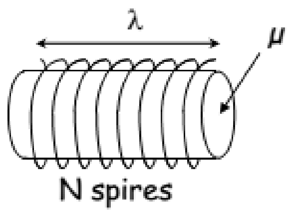
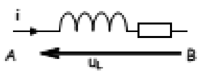
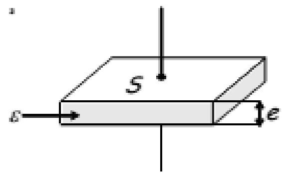
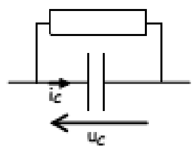
$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$$
$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} + \cdots + \frac{di_3}{dt}$$
$$= \frac{V_A - V_B}{L_1} + \frac{V_A - V_B}{L_2} + \frac{V_A - V_B}{L_3} + \cdots + \frac{V_A - V_B}{L_n}$$
$$= (V_A - V_B)\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}\right)$$
$$= (V_A - V_B)\frac{1}{L_{eq}}$$

L'admittance équivalente est égale à la somme des inductances placées en parallèle

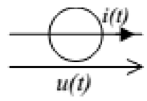
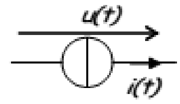
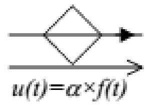
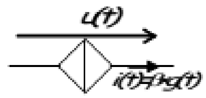
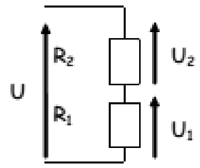
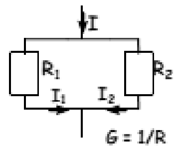
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_n} = \sum_1^n \frac{1}{L_n} \qquad \frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}$$

On arrive donc à la même formule que pour des résistances.

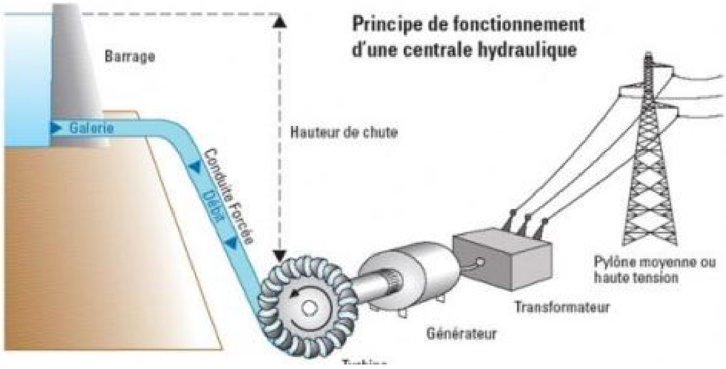
Dipôles passifs

Dipôle	Résistance	Bobine	Condensateur
Schéma	 Le courant suit la forme de la tension	 On n'observe jamais de discontinuité de courant aux bornes d'une bobine	 On n'observe jamais de discontinuité de tension aux bornes d'un condensateur
Loi d'ohm	$u_R = R \times i$	$u_L = L \times \frac{di}{dt}$	$i = C\frac{du_C}{dt}$
A/série	$R_{éq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$	$L_{éq} = \sum_{i=1}^{n} L_i$	$\frac{1}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$
A/parallèle	$\frac{1}{R_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$	$\frac{1}{L_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}$	$C_{éq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$
Modèle plus réaliste	La résistance d'un conducteur homogène non idéal de section s et de longueur ℓ est $R = \rho \cdot \frac{\ell}{s}$  	$L = \mu \frac{N^2 S}{\ell}$  	$C = \varepsilon \frac{S}{e}$  

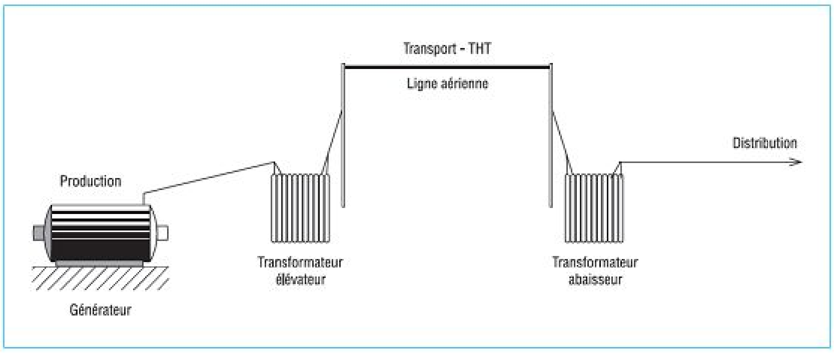
Dipôles actifs

Source Parfaite	de tension  la tension est imposée quel que soit i	de courant  le courant est imposé quel que soit u
Source dépendante	de tension 	de courant 
Diviseur	De tension $u_i = \frac{R_i \times U}{\sum_{i=1}^{n} R_i}$ 	De courant $i_i = \frac{G_i \times i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}$ 

Introduction : L'immense majorité de l'électricité utilisée aujourd'hui dans l'industrie, le commerce et à domicile est en courant alternatif. L'énergie électrique correspondante est produite dans de grandes centrales électriques par des générateurs électromagnétiques de Faraday, appelés générateurs alternatifs ou alternateurs. Ces alternateurs dont le fonctionnement repose sur le principe de l'induction électromagnétique sont entraînés par des turbines à vapeur, hydrauliques, à gaz, … . Ce sont des machines tournantes qui transforment l'énergie mécanique en énergie électrique.



L'électricité produite dans les centrales passe par des transformateurs élévateurs qui élèvent sa tension jusqu'au domaine de la très haute tension (THT) (de l'ordre de 400 kV). Elle va être acheminée vers les lieux de consommation où la tension sera abaissée en deux étapes : une première amène la tension jusqu'à 20 kV ; avec la seconde la tension descend de 20 kV au niveau de la basse tension (220 V ou 380 V).



✓ ***Qu'est-ce que le courant alternatif ?***

On appelle courant alternatif (CA ou plus communément AC pour "Alternative Current") un courant électrique où les électrons circulent alternativement dans une direction puis dans l'autre à intervalles réguliers appelés cycles.

Le courant alternatif est produit par la rotation d'un alternateur, que l'on peut schématiser par une bobine de fil conducteur tournant dans un champ magnétique. Cette rotation génère dans la bobine un courant alternatif, c'est-à-dire un mouvement de va-et-vient des électrons, dont la fréquence varie en fonction de la vitesse de rotation de la bobine. Ainsi, une bobine tournant à 3000 tours/mn ou 50 tours/s génère un courant alternatif de 50 Hz : les électrons changent de direction 100 fois par seconde !

Chez nous, en Europe et dans la plupart des autres régions du monde, il est de 50 cycles par seconde (soit une fréquence de 50 Hz). Au Canada et aux USA, il est de de 60 Hz.

Rappelons qu'un courant électrique est produit par le déplacement d'électrons quasi-libres dans un milieu conducteur (métal) sous l'impulsion d'une tension électrique (f.é.m.) appliquée à ses bornes.

☛ *Si cette tension est continue*, le flux d'électrons (de charges négatives) s'écoule uniquement vers la borne positive (caractérisée par un déficit de charges négatives) à laquelle il communique de l'énergie. Bien que la vitesse de déplacement de chaque électron soit très lente : $0.037\ cm/s$ (quelques mètres par heure), le mouvement se répercute sur tous les autres électrons présents dans le conducteur à la vitesse de la lumière.

Cette lenteur a quelque chose de surprenant et il faut alors expliquer la rapidité des transmissions électriques (de l'ordre de vitesse de la lumière). Celle-ci est simplement due à la vitesse de propagation de l'*ébranlement* et non pas à la vitesse de déplacement des électrons. On peut comparer ce phénomène à celui qui se produit lorsque l'on ouvre le robinet d'alimentation d'un tuyau déjà rempli d'eau : celle-ci s'écoule immédiatement à l'autre extrémité du tuyau, quoique la vitesse d'écoulement de l'eau puisse être très lente.

☛ *Si cette tension est alternative* (*sinusoïdale*), les électrons oscillent alternativement dans un sens et dans l'autre autour de leurs positions moyennes sur une distance de quelques microns : $0.00166\ mm$ (millièmes de millimètres). Ils répercutent l'énergie vibrationnelle reçue vers l'extrémité positive du conducteur.

On voit donc que l'on ne peut pas parler d'un *écoulement* d'électrons dans un sens (alternance positive), puis dans l'autre (alternance négative), mais plutôt de *vibration* des électrons, avec une amplitude de l'ordre du micron (à 50 Hz).

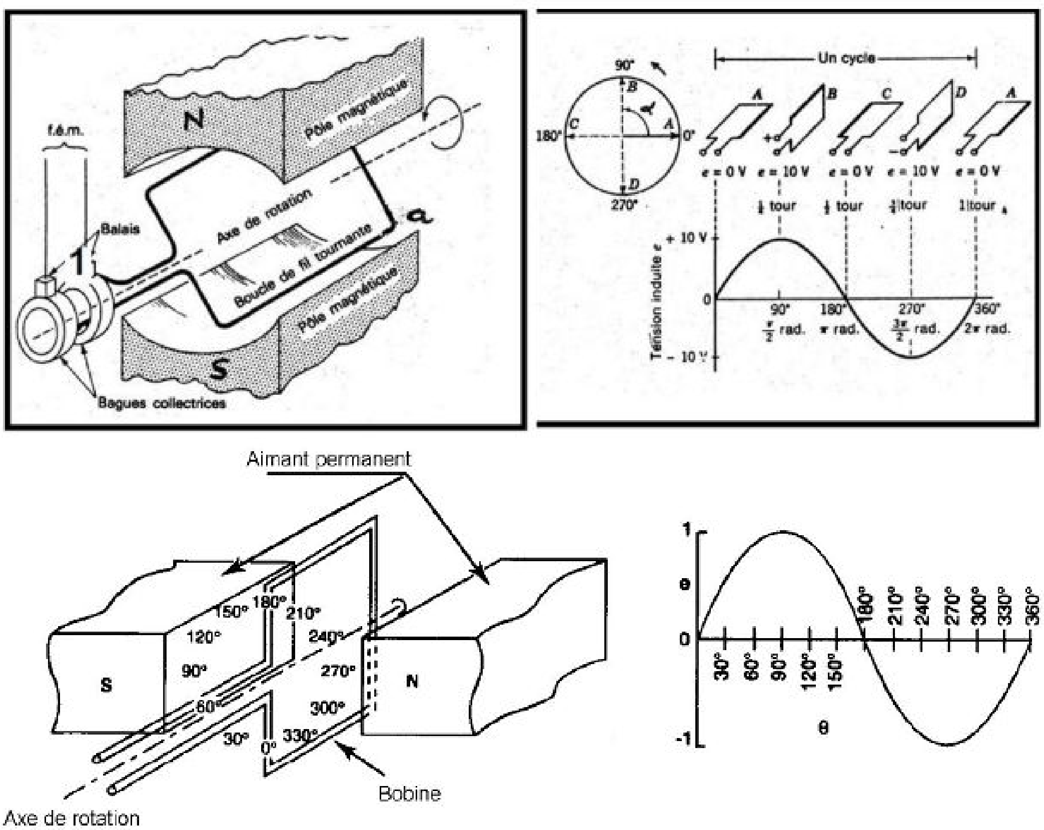
✓ **Principe du générateur (alternateur) de f.é.m. sinusoïdale** :

Soit une bobine plate, en rotation, avec une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe de son plan et située dans un champ magnétique $\vec{B}$ générant un flux magnétique Φ.

Cette bobine est le siège (à ses bornes) d'une f.é.m. d'induction $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = \omega \cdot \Phi_M \cdot \sin(\omega \cdot t) = E_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ (voir annexe A).

La f.é.m. induite et le courant induit varient sinusoïdalement dans le temps avec une période égale à $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

<u>Remarque :</u> On obtient le même résultat si la bobine est fixe et si le champ tourne à la vitesse angulaire ω.



<u>Schémas simplifiés du principe de l'alternateur</u>

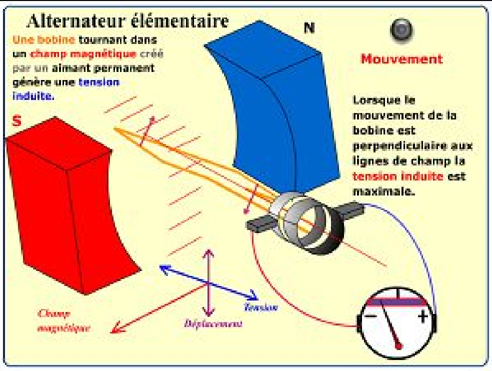
Dans un alternateur, la bobine tourne à une vitesse constante formant ainsi un mouvement périodique. La tension induite le sera également.

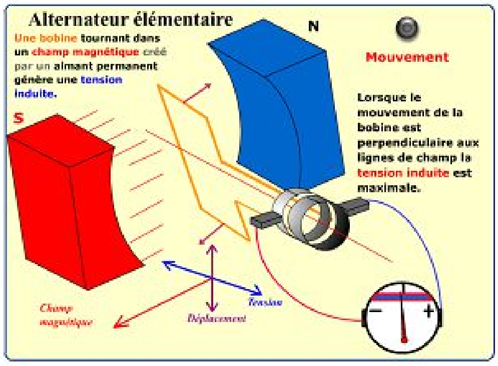
Cependant, la valeur de la tension induite n'est pas constante, puisqu'elle est définie en fonction du sinus de l'angle formé par le déplacement de la bobine et les lignes du champ magnétique.

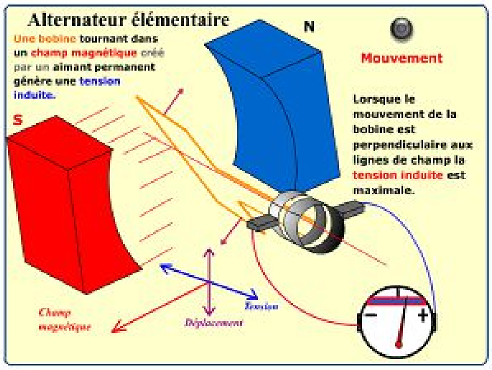
À l'instant où le déplacement de la bobine est perpendiculaire aux lignes de champs, la tension induite dans la bobine est maximale.

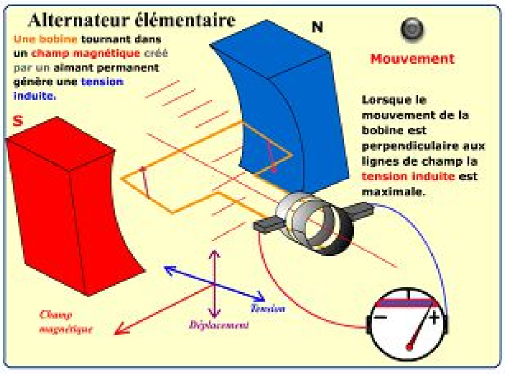
Par contre, lorsque le déplacement de la bobine est parallèle aux lignes de champs, la tension induite est nulle.

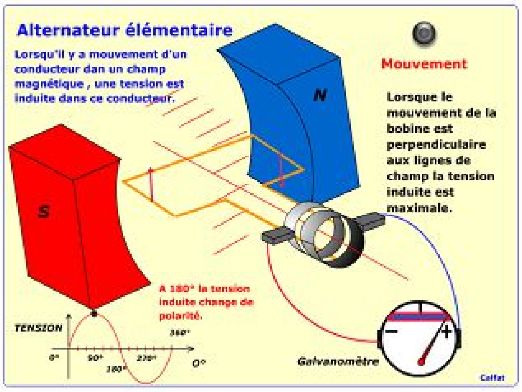
Quant à la polarité de la tension induite, elle change à chaque demi-rotation de la bobine. Un demi-tour de la bobine, c'est-à-dire de 0° à 180°, induit une tension positive, appelée alternance positive, tandis que l'autre demi-tour, soit de 180° à 360°, induit une tension négative nommée alternance négative.

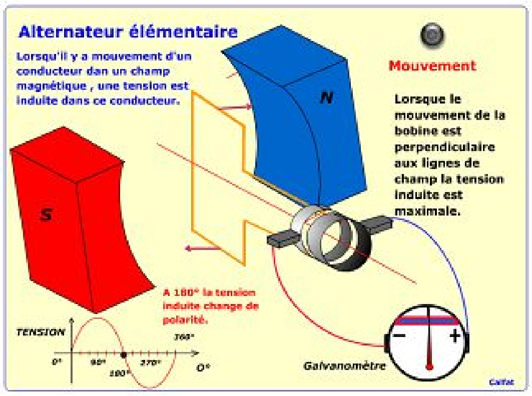

Alternateur élémentaire
Une bobine tournant dans un champ magnétique créé par un aimant permanent génère une tension induite.
N
S
Mouvement
Lorsque le mouvement de la bobine est perpendiculaire aux lignes de champ la tension induite est maximale.
Champ magnétique
Déplacement
Tension

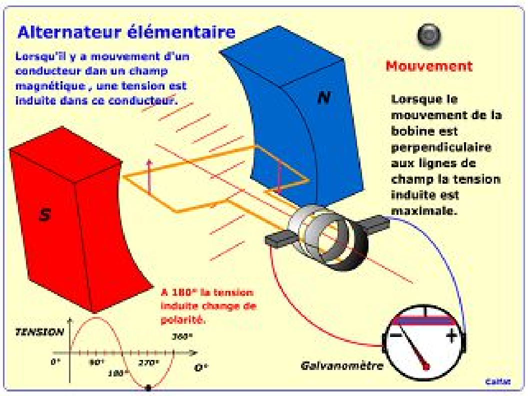

Alternateur élémentaire
Une bobine tournant dans un champ magnétique créé par un aimant permanent génère une tension induite.
N
S
Mouvement
Lorsque le mouvement de la bobine est perpendiculaire aux lignes de champ la tension induite est maximale.
Champ magnétique
Déplacement
Tension

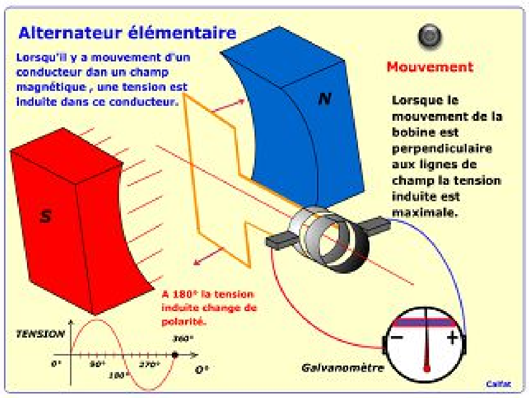

Alternateur élémentaire
Une bobine tournant dans un champ magnétique créé par un aimant permanent génère une tension induite.
N
S
Mouvement
Lorsque le mouvement de la bobine est perpendiculaire aux lignes de champ la tension induite est maximale.
Champ magnétique
Déplacement
Tension


Alternateur élémentaire
Une bobine tournant dans un champ magnétique créé par un aimant permanent génère une tension induite.
N
S
Mouvement
Lorsque le mouvement de la bobine est perpendiculaire aux lignes de champ la tension induite est maximale.
Champ magnétique
Déplacement
Tension


Alternateur élémentaire
Lorsqu'il y a mouvement d'un conducteur dan un champ magnétique , une tension est induite dans ce conducteur.
Mouvement
Lorsque le mouvement de la bobine est perpendiculaire aux lignes de champ la tension induite est maximale.
N
S
A 180° la tension induite change de polarité.
TENSION
0°
90°
180°
270°
360°
0°
Galvanomètre
Calfat


Alternateur élémentaire
Lorsqu'il y a mouvement d'un conducteur dan un champ magnétique , une tension est induite dans ce conducteur.
Mouvement
Lorsque le mouvement de la bobine est perpendiculaire aux lignes de champ la tension induite est maximale.
N
S
A 180° la tension induite change de polarité.
TENSION
0°
90°
180°
270°
360°
0°
Galvanomètre
Calfat


Alternateur élémentaire
Lorsqu'il y a mouvement d'un conducteur dan un champ magnétique , une tension est induite dans ce conducteur.
Mouvement
Lorsque le mouvement de la bobine est perpendiculaire aux lignes de champ la tension induite est maximale.
N
S
A 180° la tension induite change de polarité.
TENSION
0°
90°
180°
270°
360°
0°
Galvanomètre
Calfat


Alternateur élémentaire
Lorsqu'il y a mouvement d'un conducteur dan un champ magnétique , une tension est induite dans ce conducteur.
Mouvement
Lorsque le mouvement de la bobine est perpendiculaire aux lignes de champ la tension induite est maximale.
N
S
A 180° la tension induite change de polarité.
TENSION
0°
90°
180°
270°
360°
0°
Galvanomètre
Calfat

I.2.1. Types de courants alternatifs

Ce sont des courants qui changent le sens dans le temps. Les courants alternatifs les plus connus sont :

Sinusoïdaux (Sine) ;

Carrés (Square) ;

Triangulaires (Triangle) ;

Dents de scie (Sawtooth)

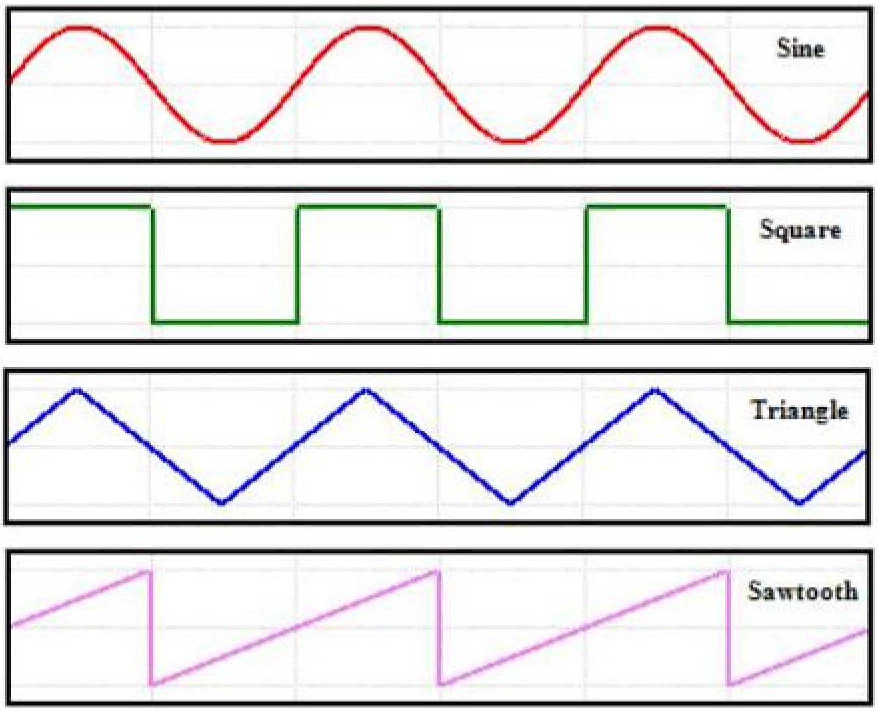


Figure I-1. *Types de courants alternatifs*

Caractéristiques de régime sinusoïdal

Aujourd'hui, tous les réseaux d'énergie fonctionnent avec des courants et tensions alternatifs et de formes sinusoïdales. Les grandeurs sinusoïdales sont des grandeurs périodiques particulières dont l'étude est importante en électronique et en électrotechnique Une tension alternative présenté deux alternances :

Une alternance **positive**, représentée au-dessus de l'axe du temps, qui correspond à un certain sens du courant ;

Une alternance **négative**, figurée au-dessous de l'axe horizontal, qui correspond au sens opposé du courant

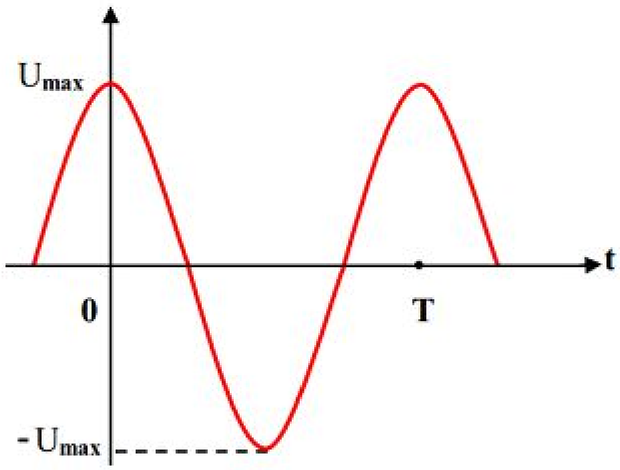


Figure I-2. *Caractéristiques des grandeurs sinusoïdales*

En électricité industrielle, la tension fournie par le réseau est donnée par la relation (I-1) :

$$u(t) = \sqrt{2}\, U\, sin(\omega t + \theta_u) \qquad \text{(I-1)}$$

Sous notation complexe on peut l'écrire :

$$\overline{U} = U\, e^{j\theta_u} \qquad \text{(I-2)}$$

Le courant a pour expression :

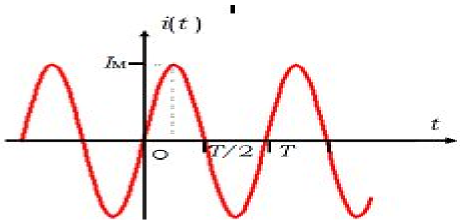
$$i(t) = \sqrt{2}\, I\, sin(\omega t + \theta_i) \qquad \text{(I-3)}$$

Sous notation complexe on peut l'écrire aussi :

$$\overline{I} = I\, e^{j\theta_i} \qquad \text{(I-4)}$$

La représentation réelle des grandeurs sinusoïdales (courant et tension) est donnée par :

Courant : $i(t) = I_M \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	Courant : $i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
Tension : $e(t) = E_M \cdot \sin(\omega t + \varphi')$	Tension : $e(t) = E_M \cdot \cos(\omega t + \varphi')$



$i(t)\ (e(t))$: ***Valeur instantanée*** du courant (de la tension) , c'est la valeur à un instant donné. Elle se note toujours par une lettre minuscule.

$I_M\ (E_M)$: ***Valeur ou amplitude maximale*** (***crête***) du courant (de la tension) atteinte par période.

ω [rad/s] : ***Pulsation*** ou vitesse angulaire de la fonction périodique.

Période : Une grandeur analogique (tension ou intensité) périodique est constituée par une suite de motifs identiques. C'est l'intervalle de temps pendant lequel la forme d'onde périodique se reproduit, elle s'exprime en seconde (s).

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ [s]}$$

Fréquence : La fréquence f du signal est le nombre de périodes par secondes. Elle s'exprime en Hertz (Hz), elle est en fonction de la période T par la relation suivante :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ [Hz]}$$

I.2.2.4. Déphasage

Soient les deux grandeurs sinusoïdales (Fig.I-3) de même pulsation $u(t)$ de l'équation (I-1) et $i(t)$ de l'équation (I-3). L'angle φ est la différence de phase entre la tension u et le courant i ou le ***déphasage*** de i par rapport à u (le retard en temps de l'apparition du courant par rapport de la tension) :

$$\varphi = \theta_u - \theta_i \quad \text{(I-7)}$$

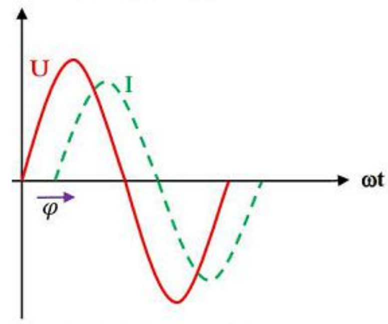


Figure I-3. *Déphasage de i par rapport à u*

- Si $\varphi = 0$, le courant i et la tension u sont en phase ;
- Si > 0 , la tension u est ***en avance*** par rapport à le courant i, ($\varphi = \frac{\pi}{2}$: la tension u est en ***quadrature avance*** par rapport à le courant i) ;
- Si < 0 , la tension u est ***en retard*** par rapport à le courant i, ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$: la tension u est en ***quadrature retard*** par rapport à le courant i).

Dans le cas d'un récepteur alimenté sous une tension u (***origine des phases***) et traversé par un courant i, on adoptera la convention suivante pour les expressions instantanées :

$$u(t) = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t) \quad \text{(I-8)}$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{(I-9)}$$

- $\varphi = 0$ dans le cas d'un récepteur ***résistif*** ;
- $\varphi > 0$ dans le cas d'un récepteur ***inductif*** ;
- $\varphi < 0$ dans le cas d'un récepteur ***capacitif***.

I.2.2.5. Amplitude

L'***amplitude*** de courant alternatif $\mathbf{A_{max}}$ ou de tension alternative $\mathbf{V_{max}}$ est la plus grande valeur attente au cours d'une période, elle peut être négative ou positive.

I.2.2.6. Valeur instantanée

La ***valeur instantanée*** est une grandeur variable est la valeur qu'elle prend à tout instant ; on la note par une minuscule : $\boldsymbol{u(t)}$ ou $\boldsymbol{u}$.

Valeur efficace

On définit la valeur efficace d'un courant alternatif (ou d'une tension) comme la valeur d'un courant continu équivalent qui produirait dans une même résistance R la même puissance dissipée par effet Joule (échauffement). Les valeurs efficaces (RMS : Root Mean Square) de la tension et du courant sont données respectivement par :

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt$$

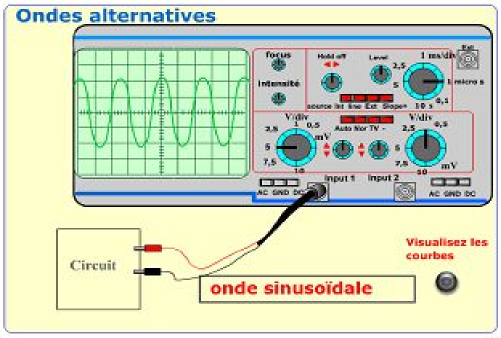
$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt$$

Dans le cas d'un signal sinusoïdal, les valeurs efficaces vaux :

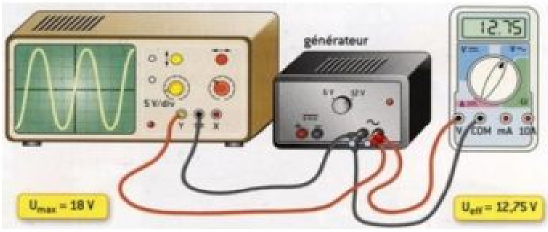
$$U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$

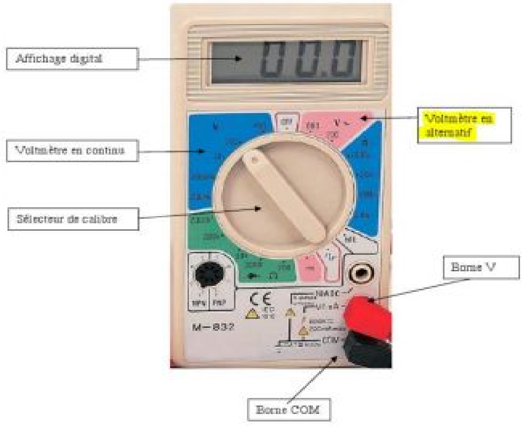
$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

Indications des appareillages



- L'***oscilloscope*** visualise la mesure des phénomènes alternatifs (ondes alternatives de tension ou de courant) en ***valeurs maximales***. L'oscilloscope est l'outil adapté pour visualiser une tension alternative. Grâce à lui, nous pouvons voir la forme de la courbe, mesurer sa période et la valeur maximale de la tension. En réalité un oscilloscope est un voltmètre en continu qui varie en fonction du temps. Donc un voltmètre en continu nous permet de suivre l'évolution de la tension au fur et à mesure.





- Le ***multimètre*** donne les valeurs mesurées (courant ou tension) en ***valeurs efficaces***.
  Le ***voltmètre*** en alternatif (voir figure ci-contre) affiche une valeur constante alors que nous savons que cette tension varie. C'est ce qu'on appelle la tension efficace notée V_{eff}. Par exemple, la tension efficace du secteur (prise de la maison) est $V_{eff} = 230\text{V}$.

Notation complexe : Pour profiter de la souplesse des calculs dans le plan complexe, on fait souvent appel à la représentation complexe des fonctions sinusoïdales.

Considérons les deux fonctions sinusoïdales de même pulsation suivantes

$$v(t) = V_{max}\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad i(t) = I_{max}\cos(\omega t + \varphi').$$

Notation algébrique ou ***cartésienne***

$$\boxed{v(t) = A + jB} \text{ et } \boxed{i(t) = A' + jB'} \text{ avec } \begin{cases} V_{max} = |v(t)| = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{A}{|v(t)|} = \dfrac{A}{V_{max}} \\ \sin\varphi = \dfrac{B}{|v(t)|} = \dfrac{B}{V_{max}} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} I_{max} = \sqrt{A'^2 + B'^2} \\ \cos\varphi' = \dfrac{A'}{|v(t)|} = \dfrac{A'}{I_{max}} \\ \sin\varphi' = \dfrac{B'}{|v(t)|} = \dfrac{B'}{I_{max}} \end{cases}.$$

*<u>Formules d'Euler :</u> $\boxed{\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \\ e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \end{cases}}.$

En notation complexe ***exponentielle***, ces deux fonctions peuvent s'écrire :

$$v(t) = V_{max} \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} \quad \text{et} \quad i(t) = I_{max} \cdot e^{j(\omega t+\varphi')}$$

la ***notation de Kennelly*** :

$$\boxed{v(t) = V_{max}\angle\varphi} \quad \text{et} \quad \boxed{i(t) = I_{max}\angle\varphi'}$$

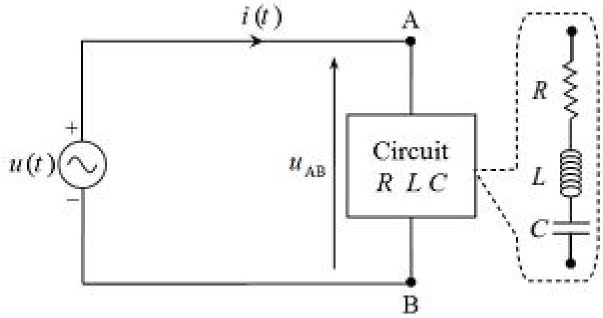
notation polaire trigonométrique

$$\boxed{v(t) = V_{max} \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)} \quad \text{et} \quad \boxed{i(t) = I_{max} \cdot (\cos\varphi' + j\sin\varphi')}.$$

II. CIRCUITS EN RÉGIME ALTERNATIF RÉGIME SINUSOÏDAL MONOPHASÉ

Nous admettrons comme principe que toutes les lois générales de l'électricité, à savoir celles d'Ohm, de Joule, de la conservation de charge et de Kirchhoff restent applicables en régime alternatif.

Un circuit de courant sinusoïdal peut comprendre un, deux ou plusieurs composants des types RLC, groupés d'une certaine façon, ou identifier l'association série, l'association parallèle ou l'association mixte des composants.



Aux bornes d'une **résistance** :	$u_R(t) = R \cdot i(t)$
Aux bornes d'une **self** :	$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$
Aux bornes d'une **capacité** :	$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$

L'expression de la tension aux bornes (A et B) du circuit RLC série est donnée par (loi d'Ohm) :

$$u_{AB} = u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$\boxed{u(t) = \left(R + jL\omega - \frac{j}{C\omega}\right) \cdot i(t)}.$$

Notion d'impédance : Le résultat établi dans le paragraphe précédent nous permet de définir une nouvelle grandeur complexe, qu'on notera *Z*, dite ***impédance complexe*** du circuit. La relation finale établie s'écrit

$$\boxed{u(t) = Z.i(t)} \quad \text{avec } Z = R + jL\omega - \frac{j}{C\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right).$$

L’impédance complexe d’un circuit électrique s’écrit, sous forme cartésienne :

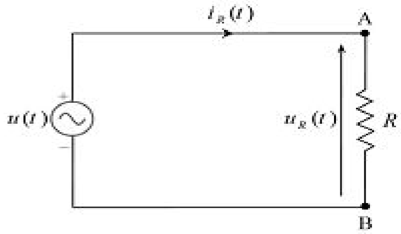
$\boxed{Z = R + jX}$ où R est sa ***résistance*** et X sa ***réactance***, ou bien sous forme polaire :

$\boxed{Z = |Z| e^{j\alpha}}$ (voir la remarque ®) avec $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ et $\alpha = \arg(Z) = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$.

- si $X > 0$: le circuit est dit *inductif* (prédominance inductive)
- si $X < 0$: le circuit est dit *capacitif* (prédominance capacitive)
- si $X = 0$: le circuit est dit *purement résistif*.

❖ **Résistance :**

Impédance complexe	Impédance	Déphasage
$Z = R$ $= R \cdot e^{j\cdot 0}$ $= R\lfloor 0°$	$\lvert Z \rvert = R$	$\alpha = 0$ rad



I.3.1. Inductance

I.3.1.1. Inductance d'une bobine

Lorsqu'un courant passe dans une bobine, celle-ci produit un champ magnétique. Le flux magnétique dans une bobine et le courant sont reliés par la relation suivante [3,6] :

$$\emptyset = L.I \tag{I-16}$$

Avec :

$\emptyset$: la valeur du flux en Weber [Wb] ;

L : l'inductance de la bibine en Henry [H] ;

I : le courant en Ampère [A].

L'inductance de la bibine est une grandeur qui dépend de ces caractéristiques constructives. On prend un exemple le cas d'une bobine longue, pour laquelle l'expression de l'inductance est :

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l} \tag{I-17}$$

Où :

μ : perméabilité magnétique du noyau de la bobine en Henry/mètre [H/m] ;

N : nombre de spire de la bobine ;

S : aire de la section de la bobine en m² ;

l : longueur de la bobine en mètre [m].

I.3.1.2. Inductance mutuelle

Par définition l'inductance mutuelle des deux bobines représente le rapport entre la tension induite dans une bobine et le taux de la variation du courant dans l'autre. Le symbole de l'inductance mutuelle est M. elle est exprimé aussi en Henry (H) [7].

Lorsque les deux bobines réalisent un couplage inductif (Fig.I-4), les équations des flux mutuelles sont :

$$\emptyset_1 = L_1 I_1 + M I_2 \tag{I-18}$$

$$\emptyset_2 = L_2 I_2 + M I_1 \tag{I-19}$$

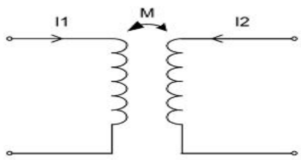


Figure I-4. *Couplage inductif mutuelle*

Où :

I_1, I_2 : les courants dans les deux bobines ;

L_1, L_2 : les inductances des deux bobines ;

M : l'inductance mutuelle.

I.3.1.3. Réactance inductive

Si une bobine est alimentée avec une tension alternative sinusoïdale de fréquence f. On constate l'apparition dans la bobine d'un courant alternatif de même fréquence. En plus la tension effective est proportionnelle au courant effectif dans la bobine. Leur rapport est une caractéristique de la bobine, la ***réactance inductive*** X_L.

$$X_L = L\omega \tag{I-20}$$

$$\omega = 2\pi f \tag{I-21}$$

Où :

X_L : la réactance inductive en Ohm [Ω] ;

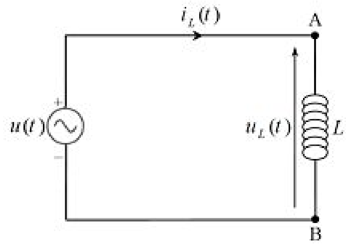
L : l'inductance de la bobine en Henry [H] ;

ω : la pulsation en rad/s ;

f : la fréquence en Hertz [Hz].

❖ **Self ou inductance ou bobine :**

Impédance complexe	Impédance	Déphasage
$Z_L = jL\omega$ $= L\omega \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = L\omega\underline{\vert 90°}$	$\lvert Z_L \rvert = L\omega$	$\alpha = \pi/2$ rad

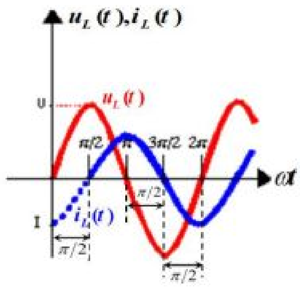


$$i_L(t) = \frac{u(t)}{Z_L} = \frac{u(t)}{jL\omega} = \frac{U_M\underline{\vert 0°}}{L\omega\underline{\vert 90°}} = \frac{U_M \cdot e^{j0}}{L\omega \cdot e^{j\pi/2}} = I_{L_M}\underline{\vert -90°} = I_{L_M} e^{j(-\pi/2)} = \boxed{I_{L_M} \cdot \sin(\omega t - \pi/2)}$$

$$\text{avec } \frac{U_M}{|Z_L|} = \frac{U_M}{L\omega} = I_{L_M}$$

ou bien, sachant que $u_L(t) = L \cdot \dfrac{di_L(t)}{dt}$, on a :

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int U_M \cdot \sin\omega t \cdot dt = \underbrace{-\frac{U_M}{L\omega}}_{I_{L_M}} \cdot \cos\omega t = \boxed{I_{L_M} \cdot \sin(\omega t - \pi/2)}.$$



Tension et courant ont toujours la même pulsation, mais ils ne sont plus en phase : ils sont déphasés de $\varphi = -\pi/2$. Cette situation est illustrée par la figure ci-contre.

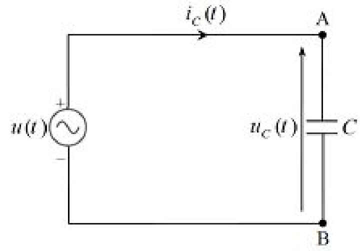
Elle montre que **le courant $i_L(t)$** est **<u>en retard</u> de $\pi/2$** sur **la tension $u_L(t)$** : le courant s'annule et passe par un extremum à un temps t plus grand que pour la tension ; *il est en retard*. Quand il s'annule, la tension passe par un extremum, quand il passe par un extremum, la tension s'annule : le déphasage est bien d'un quart de cycle ($T/4$), soit $\pi/2$.

<u>Remarques :</u> Une bobine de fil conducteur constitue une inductance, encore appelée self. On la rencontre dans les moteurs, dans les ballasts des tubes néons, les transformateurs, … . Cette bobine réagit constamment aux variations du courant qui la traverse, suite à un phénomène magnétique. Si cette bobine est soumise à un courant continu, elle n'aura aucun effet sur celui-ci. Si par contre, on veut lui faire passer du courant alternatif, elle va réagir en opposant une résistance au passage du courant. L'importance de ce "frein" est mesurée par la valeur de l'inductance L, exprimée en Henry (H).
Ce type d'impédance aura, donc, un deuxième effet sur le courant : une bobine retarde le courant par rapport à la tension. On dit qu'elle déphase le courant. Ainsi, une inductance pure verra son courant déphasé de $\pi/2$ en retard sur la tension.

<u>Explication :</u> Quand on applique une tension aux bornes d'une self, le courant ne s'établit pas instantanément. À un certain instant t, la tension aux bornes de la self est maximale et l'intensité est nulle. Quand la bobine se charge en énergie, la tension à ses bornes décroit et l'intensité augmente. Une fois la self "chargée", la tension à ses bornes est nulle et l'intensité est maximale. En régime alternatif la tension et l'intensité se retrouvent donc déphasées : le courant est en retard sur la tension.

❖ **Condensateur :**

Impédance complexe	Impédance	Déphasage
$Z_C = \dfrac{1}{jC\omega} = -j\cdot\dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{C\omega}\cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{C\omega}\underline{\vert -90°}$	$\lvert Z_C \rvert = \dfrac{1}{C\omega}$	$\alpha = -\pi/2$ rad



$$i_C(t) = \frac{u(t)}{Z_C} = \frac{u(t)}{\frac{1}{jC\omega}} = \frac{U_M\underline{\vert 0°}}{\frac{1}{C\omega}\underline{\vert -90°}} = \frac{U_M\cdot e^{j0}}{\frac{1}{C\omega}\cdot e^{j(-\pi/2)}} = I_{C_M}\underline{\vert 90°} = I_{C_M}e^{j\pi/2} = \boxed{I_{C_M}\cdot\sin\left(\omega t + \pi/2\right)}$$

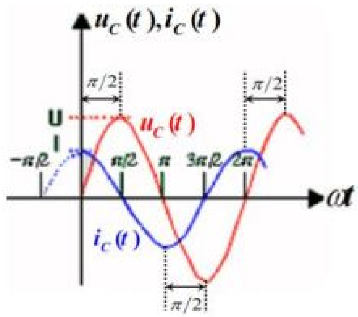
$$\text{avec } \frac{U_M}{\lvert Z_C\rvert} = \frac{U_M}{\frac{1}{C\omega}} = I_{C_M}$$

ou bien, sachant que $u_c(t) = \dfrac{1}{C}\cdot\int i_c(t)\cdot dt$, on a :

$$i_C(t) = C\cdot\frac{du_C(t)}{dt} = C\cdot\frac{d\left(U_M\sin\omega t\right)}{dt} = C\cdot\omega\cdot U_M\cos\omega t = \underbrace{\frac{U_M}{\frac{1}{C\omega}}}_{I_{C_M}}\cos\omega t = \boxed{I_{C_M}\cdot\sin\left(\omega t + \pi/2\right)}$$

Tension et courant sont cette fois-ci déphasés de $\varphi = +\pi/2$. Cette situation est illustrée par la figure ci-contre.

Elle montre que cette fois, le courant est **<u>en avance</u> de $\pi/2$** par rapport à la tension.



<u>Remarques :</u>

Un condensateur est un réservoir de charges électriques. S'il est soumis à la tension d'un générateur, il va accumuler des charges. Ces charges seront restituées au réseau lorsque la tension d'alimentation diminuera. S'il s'agit d'une tension alternative, le condensateur se charge et se décharge au rythme de la fréquence alternative. Ce type d'impédance aura également un effet de déphasage du courant par rapport à la tension, mais cette fois le courant est déphasé en avance de $\pi/2$ sur la tension.

<u>Explication :</u>

Quand on applique une tension aux bornes d'un condensateur la tension ne peut pas s'établir instantanément. À un certain instant *t*, la tension à ses bornes est nulle et l'intensité est maximale → le condensateur commence sa charge. Au fur et à mesure que le condensateur se charge, la tension augmente et l'intensité décroît. Quand le condensateur est chargé, la tension à ses bornes est maximale et l'intensité est considérée comme nulle. Lors de la décharge, le même phénomène se produit.

En régime alternatif la tension et l'intensité se retrouvent donc déphasées, quand l'une est nulle l'autre est maximum : le courant est en avance sur la tension.

I.3.2. Condensateur

I.3.2.1. Charge du condensateur

Un condensateur est constitué de deux surfaces métalliques appelée armatures séparées par un isolant ou diélectrique. Lorsqu'il est soumis à une tension électrique le condensateur se charge [7,8].

$$Q = CU \qquad \text{(I-22)}$$

Où :

Q : la charge en Coulomb [C] ;

C : la capacité du condensateur en Farad [F] ;

U : la tension à la borne du condensateur en Volt [V].

I.3.2.2. Capacité du condensateur plan

La capacité d'un condensateur est proportionnelle à la surface des plaques, inversement proportionnel à la distance entre les armatures et elle dépend également de la nature de l'isolant. Pour un condensateur plan la formule de la capacité est donnée par [7-9] :

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} \qquad \text{(I-23)}$$

Où :

C : la capacité du condensateur en Farad [F] ;

ε : la permittivité électrique de l'isolant en Farad/mètre [F/m] ;
S : la surface des plaques en m² ;
d : la distance entre les armatures en mètre [m].

I.3.2.3. Réactance capacitive

Lorsqu'on applique aux bornes d'un condensateur une tension alternative à une fréquence f on constate l'apparition d'un courant alternatif de même fréquence f. En plus la tension efficace est proportionnelle au courant efficace dans le condensateur. Leur rapport est une caractéristique qu'on appelle la ***réactance capacitive*** X_C, l'expression de la réactance capacitive est :

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \qquad \text{(I-24)}$$

Où :
X_C: la réactance capacitive en Ohm [Ω] ;
C : la capacité du condensateur en Farad [F] ;
ω : la pulsation en rad/s.

I.3.2.4. Types de condensateurs

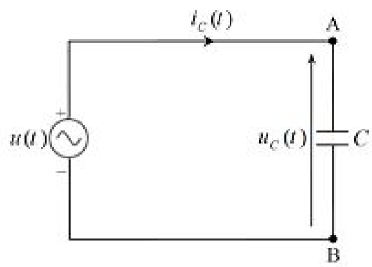
Il y a une large gamme de condensateurs industriels qui peuvent être classifiés d'après la forme des armatures, la nature d'isolant ... etc. On distingue [7,10] :

☞ condensateurs aux armatures fixes :
- condensateurs au papier ;
- condensateurs au plastique ;
- condensateurs à l'huile ;
- condensateurs électrochimiques.

☞ condensateurs variable, on utilise l'air comme isolant.

❖ **Condensateur :**

Impédance complexe	Impédance	Déphasage
$Z_C = \frac{1}{jC\omega} = -j\cdot\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C\omega}\cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{C\omega}\underline{\vert -90°}$	$\lvert Z_C\rvert = \frac{1}{C\omega}$	$\alpha = -\pi/2$ rad

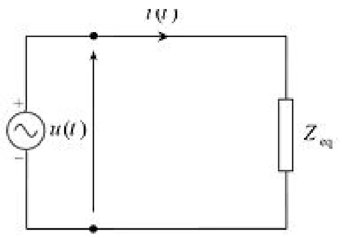


Elle montre que cette fois, le courant est **en avance de $\pi/2$** par rapport à la tension.

II.3 Notion de puissance en alternatif :

Soit le circuit ci-contre avec :

$u(t) = U_{max}\cdot\sin(\omega t)$ et $i(t) = I_{max}\cdot\sin(\omega t - \varphi)$



On détermine la ***puissance instantanée*** par : $p(t) = u(t)\cdot i(t)$

Puissance active **:** La puissance *active* ou la puissance *moyenne* consommée est la valeur moyenne de la puissance instantanée sur une période. Elle s'exprime en Watts.

$\boxed{P = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi}$

φ : ***déphasage du circuit*** ‖ **$\cos\varphi$** : appelé ***facteur de puissance***.

On appelle φ le déphasage de u tensions par rapport à i intensités $\varphi=\varphi_{u/i}=\varphi_u-\varphi_i$.

- Si le circuit est purement résistif, alors $\varphi = 0$ et donc $\cos\varphi = 1$:

$\boxed{P = U_{eff} I_{eff} = R\,I_{eff}^2}$.

- Si le circuit est purement réactif (pas de résistance), purement inductif ou purement capacitif, alors $\varphi = \pm\pi/2$ et donc $\cos\varphi = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{P = 0}$.

Puissance réactive

Le produit $UI.\sin(\varphi)$ représente la puissance réactive et a pour symbole Q.

$$Q = UI.\sin(\varphi),\ [VAR]$$

Q , s'exprime en Volt-Ampères-Réactifs [V.A.R].

- Si le circuit est résistif, alors $\varphi = 0$ et donc $\sin\varphi = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{Q = 0}$.

Puissance apparente

La puissance apparente est la puissance fournie par la source. Mathématiquement, le produit UI, s'exprime en Volt Ampère. Elle a pour symbole S

$$S = UI, [VA] \qquad (2.35)$$

$$\boxed{\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = P + jQ}$$

I.4.5. Théorème de Boucherot

C'est le théorème incontournable qui régit les raisonnements portant sur les diverses puissances en électrotechnique. On résume ce théorème et ses corollaires autour de la Figure (I-12).

Le ***théorème de Boucherot*** énonce que ***la puissance active d'un système est la somme des puissances actives des éléments le constituant, de même pour la puissance réactive et la puissance apparente complexe. En revanche, c'est faux en ce qui concerne la puissance apparente***.

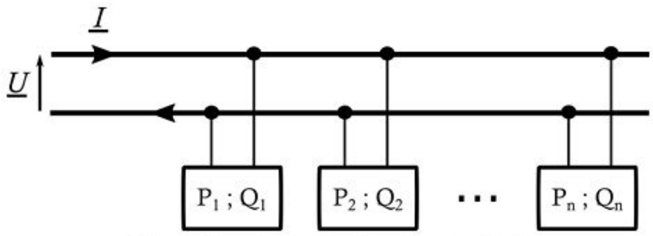


Figure I-12. *Ligne de distribution* [14]

Une installation électrique (Fig.I-12) est un ensemble de récepteurs, groupés en parallèle et alimentés par une tension commune de valeur efficace constante fournie par le réseau de distribution.

Chaque récepteur (lampe, radiateur, moteur, ...) est caractérisé par :

- la puissance électrique absorbée,
- le facteur de puissance,
- sa nature, capacitive ou inductive.

Le problème à résoudre consiste à déterminer le courant total consommé par le groupement et le facteur de puissance de l'installation. Pour cela on utilise la méthode graphique de Fresnel (Fig.I-13) ou le théorème de Boucherot.

Compte tenu de l'imprécision de la méthode graphique et de sa relative longueur d'exécution on retient le théorème de Boucherot.

Considérons la ligne de distribution de la Figure (I-12). On a alors, d'après le théorème de Boucherot :

La ***puissance active totale*** consommée est égale à la ***somme arithmétique*** des puissances actives consommées par chaque récepteur. La ***puissance réactive totale*** consommée est la ***somme algébrique*** des puissances réactives consommées par chaque récepteur :

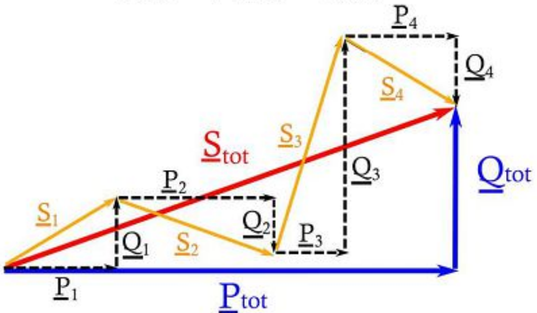
$$\begin{cases} P_{totale} = \sum_{i=1}^{n} P_i \\ Q_{totale} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \end{cases} \qquad \text{(I-49)}$$

Par contre les puissances apparentes ne se conservent pas :

$$S_{totale} \neq \sum_{i=1}^{n} S_i \qquad \text{(I-50)}$$

C'est à dire :

$$S_{totale} = \sqrt{P_{total}^2 + Q_{total}^2} \qquad \text{(I-51)}$$



- La puissance active est celle qui est la plus généralement utilisée car elle correspond à la réalité du travail ou de la chaleur fournie par la charge en tenant compte du déphasage entre la tension et le courant.

N.B :

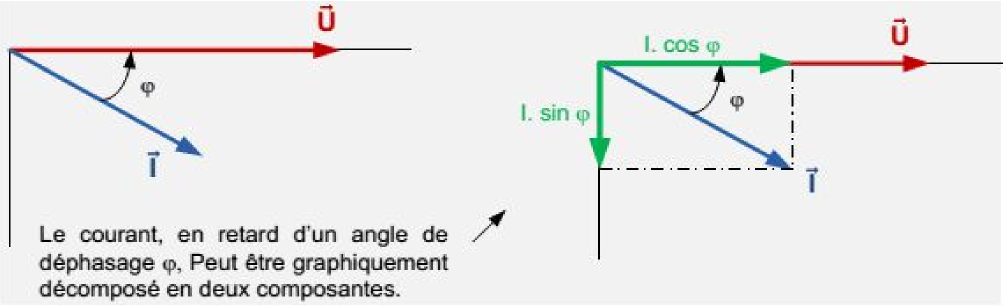
On peut réécrire l'expression générale de la puissance instantanée dans un circuit présentant un déphasage sous une forme y faisant apparaître les parties "puissance active instantanée" et "puissance réactive instantanée" :

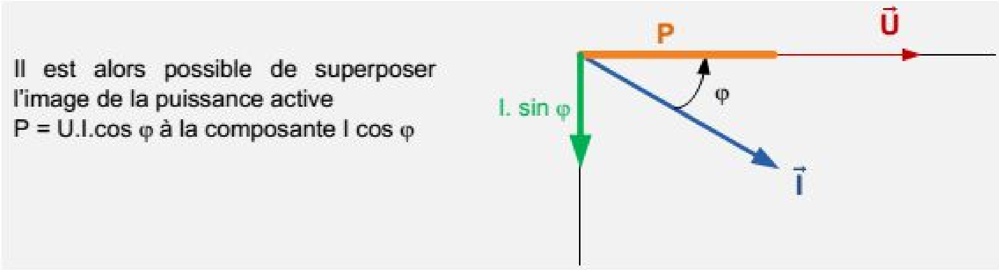
$$p(t) = \frac{1}{2} U_{\max} I_{\max} \left[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)\right] = \frac{1}{2} U_{\max} I_{\max} \left[\cos\varphi - \cos\varphi \cdot \cos 2\omega t - \sin\varphi \cdot \sin 2\omega t\right]$$

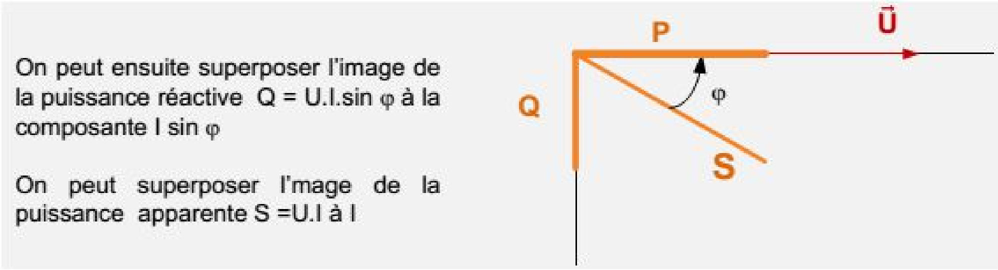
$$\rightarrow \boxed{p(t) = \underbrace{\frac{1}{2} U_{\max} I_{\max} \cos\varphi(1 - \cos 2\omega t)}_{\geq 0 \text{ : puissance instantanée active}} - \underbrace{\frac{1}{2} U_{\max} I_{\max} \sin\varphi \sin 2\omega t}_{\text{alternativement positive ou négative : puissance instantanée réactive}}}.$$

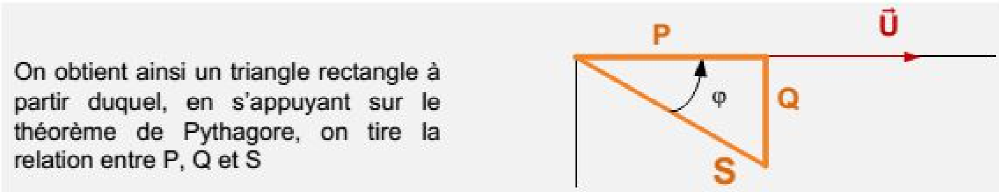
ILLUSTRATION PAR LES GRAPHES DE FRESNEL :

En prenant la tension $u(t)$ comme référence et en positionnant le courant $i(t)$ par rapport à celle-ci, le graphe de Fresnel de la situation donne :









La relation entre les trois puissances peut s'écrire :

$$\boxed{S^2 = P^2 + Q^2}.$$

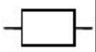
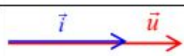
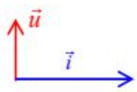
On peut également, en appliquant les règles de trigonométrie relatives au triangle rectangle, extraire les formules suivantes :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{P}{S}} \qquad \boxed{\sin\varphi = \frac{Q}{S}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{Q}{P}}.$$

Tableau récapitulatif

Notion	Symbole	Unité		Formule	Commentaire
Puissance apparente	S	Volt Ampère	[VA]	$S = U_{eff} \cdot I_{eff}$	Correspond au produit des valeurs efficaces de la tension et du courant.
Puissance active	P	Watt	[W]	$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$	Appelée aussi ***Puissance Moyenne*** (moyenne de la puissance instantanée). Elle correspond à la fourniture réelle d'énergie transmise au circuit récépteur et convertible en chaleur ou en travail. Elle est mesurée par un ***Wattmètre***.
Puissance réactive	Q	Volt Ampère réactif	[var]	$S = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin\varphi$	Correspond à la ***puissance fictive*** qui caractérise les échanges énergétiques non exploitables pour fournir une chaleur ou un travail (pertes).
Facteur de puissance	$\cos\varphi$	-		$\frac{P}{S}$	Correspond au ratio entre la puissance active et la puissance apparente. Il rend compte de l'efficacité qu'a un récepteur pour consommer de la puissance lorsqu'il est traversé par un courant.

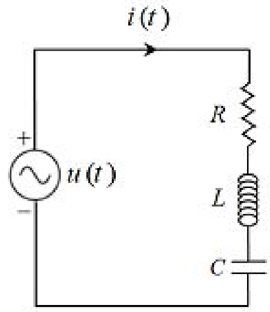
Figures de Fresnel des dipôles simples: On trace les figures de FRESNEL correspondant à un résistor, une inductance pure et à un condensateur.

symbole	nom et unité	déphasage $\varphi_{u/i}$	impédance $\underline{Z}$	figure de Fresnel	Puissance P (W)	Puissance réactive Q (VAR)
	résistor de résistance R (Ω)	0	R		RI^2= VI=	0
	bobine parfaite d'inductance pure L en Henry (H)	+π/2 rad	jLω		0	VI= $L\omega I^2$= $V^2/L\omega$
	condensateur parfait de capacité C en Farad (F)	-π/2 rad	1/(jCω)		0	-VI= $-C\omega V^2$=

III.1 Définition de la résonance - circuit résonnant

On dit qu'un circuit électrique est résonnant ou en résonance si la tension qui lui est appliquée et le courant résultant sont en phase. Ce circuit se comporte alors comme une résistance.

III.2 Résonance d'un circuit RLC série :



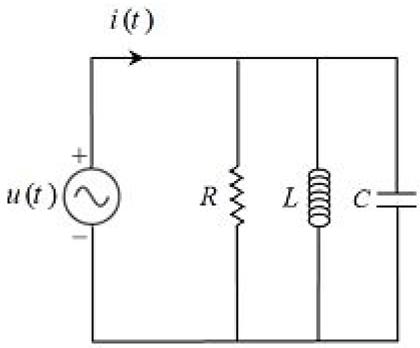
Soit un circuit RLC série (voir figure ci-contre).

$u(t)=Z\cdot i(t)$ avec $Z=R+jL\omega+\dfrac{1}{jC\omega}=R+j\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)$.

À la résonance, l'effet inductif et l'effet capacitif s'annulent entre eux $(X_L=-X_C)$. La tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont en phase (déphasage nul) $\rightarrow$ le circuit devient purement résistif :

- L'impédance complexe Z vaut R,
- L'impédance $|Z|$ est minimale et vaut $|Z|=\sqrt{R^2+0}=R$,
- $\mathrm{Im}(Z)=0 \rightarrow L\omega-\dfrac{1}{C\omega}=0 \rightarrow \boxed{\omega_r=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$: ***pulsation de résonance***,
- Le courant qui traverse le circuit est maximal : $I_{\text{eff}}=\dfrac{U_{\text{eff}}}{|Z|}=\dfrac{U_{\text{eff}}}{R}$,
- $\varphi=0 \rightarrow \cos\varphi=1$: facteur de puissance maximum,
- La puissance dissipée est maximale : $P=U_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}=S$ (puissance réactive nulle).

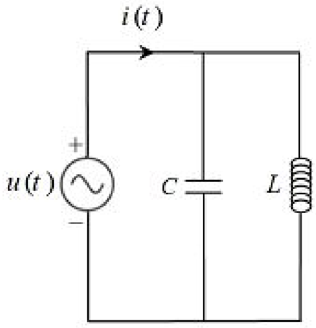
III.3 Résonance d'un circuit RLC parallèle :



$$\rightarrow Z=\frac{R}{1+jR\left(C\omega-\dfrac{1}{L\omega}\right)}$$

- L'impédance complexe Z vaut R,
- L'impédance $|Z|$ est maximale et vaut $|Z|=R$,
- $\mathrm{Im}(Z)=0 \Rightarrow \mathrm{Im}(Y)=0 \rightarrow C\omega-\dfrac{1}{L\omega}=0 \rightarrow \boxed{\omega_r=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$: ***pulsation de résonance***,
- Le courant qui traverse le circuit est minimal : $I_{\text{eff}}=\dfrac{U_{\text{eff}}}{|Z|}=\dfrac{U_{\text{eff}}}{R}$,
- $\varphi=0 \rightarrow \cos\varphi=1$: facteur de puissance maximum.

III.4 Circuits résonnants LC :



- ***Circuit LC parallèle ou circuit bouchon** [*] :*

$u(t) = Z \cdot i(t)$ ou bien $i(t) = Y \cdot u(t)$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) = j\,\frac{LC\omega^2 - 1}{L\omega} \rightarrow \boxed{Z = j\,\frac{L\omega}{\left(1 - LC\omega^2\right)}}$$

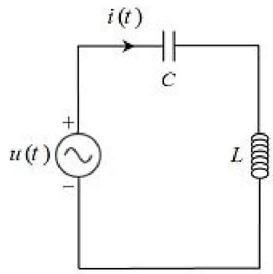
ou bien $Y = Y_L + Y_C = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) \rightarrow \boxed{Y = \frac{j\left(LC\omega^2 - 1\right)}{L\omega}}$

À la résonance, la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont en phase (déphasage nul)

$\rightarrow$ l'effet inductif et l'effet capacitif s'annulent entre eux $\left(Y_L = -Y_C \Leftrightarrow X'_L = -X'_C\right)$:

- $\mathrm{Im}(Y) = 0 \;\rightarrow\; LC\omega^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; \boxed{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$: ***pulsation de résonance***
- L'admittance est nulle
- L'impédance est infinie
- Le courant total est nul.

[*] ***Remarque :*** Le circuit est dit "bouchon" car il réduit à zéro certaines fréquences souvent indésirables pour l'appareil dans lequel il est intégré, permettant par exemple d'éliminer les parasites dans un récepteur.



- ***Circuit LC série :***

$u(t) = Z \cdot i(t)$

$$Z = Z_C + Z_L = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{Z = j\,\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}}.$$

À la résonance, la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont en phase (déphasage nul)

$\rightarrow$ l'effet inductif et l'effet capacitif s'annulent entre eux $\left(X_L = -X_C\right)$:

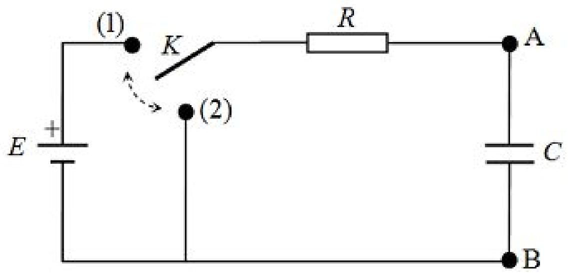
- $\mathrm{Im}(Z) = 0 \;\rightarrow\; LC\omega^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; \boxed{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$: ***pulsation de résonance***.
- L'impédance est nulle.
- La tension totale est nulle.

Remarque : De nombreux circuits fonctionnent grâce à des circuits résonants, tels que la télévision, la radio, l'imagerie par résonance magnétique, les instruments de musique.

Pour l'exemple d'un récepteur radio, parmi le mélange de transmissions désirables et indésirables, le récepteur sélectionne la transmission utile et rejette le reste. Cette sélection et ce rejet se font grâce aux circuits résonnants.

VI. APPLICATION : ÉTUDE DE LA CHARGE ET DE LA DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR

Soit le circuit ci-dessous où le condensateur c est initialement vide et K est un interrupteur pouvant prendre deux positions : (1) ou (2).

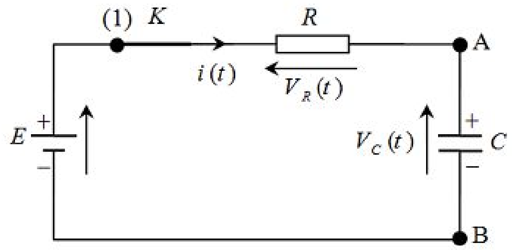


K en position 1 : *charge* du condensateur

K en position 2 : *décharge* du condensateur

1) Étude de la charge du condensateur :

C. I. : C vide $\Rightarrow Q_0(t) = 0\ \text{C} \Rightarrow V_C(t) = 0\ \text{V}$.



- ***Analyse du circuit :***

Déterminons les variations dans le temps de $Q(t)$, $i(t)$, $V_C(t)$ et $V_R(t)$:

Equation de la maille : $E - \underbrace{V_R(t)}_{R\cdot i(t)} - \underbrace{V_C(t)}_{\frac{Q(t)}{C}} = 0 \rightarrow \dfrac{Q(t)}{C} + R\cdot i(t) = E$ avec $i(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$

$\rightarrow \dfrac{Q(t)}{C} + R\cdot\dfrac{dQ(t)}{dt} = E \rightarrow \boxed{\dfrac{dQ(t)}{dt} + \dfrac{Q(t)}{RC} = \dfrac{E}{R}}$: **équation différentielle (E.D) du 1^er ordre avec second membre** régissant la variation de $Q(t)$ de la forme générale : $\dfrac{dy(t)}{dt} + \dfrac{y(t)}{\tau} = \text{cste}$.

$\tau = RC$: ***constante de temps*** $\rightarrow$ elle caractérise la plus ou moins grande vitesse (dynamique) de charge du condensateur.

- $Q(t) = ?$ $\rightarrow$ *Résolution de l'E.D*

La solution $Q(t)$ de l'E.D est déterminée par :

$$Q(t) = \underbrace{Q_h(t)}_{\text{SOLUTION HOMOGENE}} + \underbrace{Q_p(t)}_{\text{SOLUTION PARTICULIERE}}$$

- **Solution homogène $Q_h(t)$:** $\rightarrow$ *solution de l'E.D sans second membre :* $\dfrac{dQ(t)}{dt}+\dfrac{Q(t)}{RC}=0$

$$\rightarrow \frac{dQ(t)}{Q(t)}=-\frac{dt}{RC} \xrightarrow{\text{intégration}} \int\frac{dQ(t)}{Q(t)}=-\frac{1}{RC}\int dt \rightarrow \mathrm{Ln}[Q(t)]=-\frac{1}{RC}\cdot t+\text{cste} \rightarrow$$

$$Q(t)=e^{\left(-\frac{1}{RC}\cdot t+\text{constante}\right)} \rightarrow Q(t)=\underbrace{e^{\text{constante}}}_{K}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \rightarrow \boxed{Q_h(t)=K\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}.$$

- **Solution particulière $Q_p(t)$:** $\rightarrow$ *solution de l'E.D lorsque* $Q(t)$ *est considérée comme constante* : $Q(t)=\text{constante} \rightarrow \dfrac{dQ(t)}{dt}=0 \rightarrow \dfrac{Q(t)}{RC}=\dfrac{E}{R} \rightarrow \boxed{Q_p(t)=EC}$.

On a alors : $Q(t)=Q_h(t)+Q_p(t)=Ke^{-\frac{t}{RC}}+EC \rightarrow K=?$

La constante K se détermine d'après les conditions initiales (C.I) :

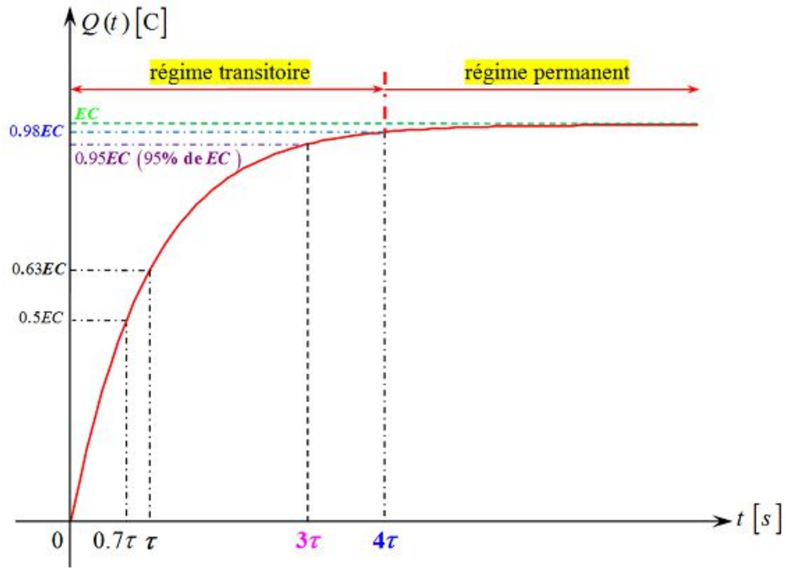
À $t=0$, on a $Q(t)=0 \Leftrightarrow K\,e^{-\frac{t}{RC}}\Big|_{t=0}+EC=0$ ce qui donne $K=-EC$.

On a enfin la solution totale recherchée ⇨ $\boxed{Q(t)=EC\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$.

Remarques :

- Entre ses valeurs extrêmes $Q_{\text{initiale}}=Q(t)\big|_{t=0}=0$ et $Q_{\text{finale}}=Q(t)\big|_{t\to\infty}=EC$, la charge $Q(t)$ croît selon une allure exponentielle.
- Plus $RC=\tau$ est grande, plus $Q(t)$ met du temps pour tendre vers EC.

La représentation graphique de la solution établie est illustrée par la figure suivante :



- $\boldsymbol{i(t)=?}$

L'expression des variations du courant de charge est obtenue comme suit :

$$i(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[EC\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right]\rightarrow\boxed{i(t)=\frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}}.$$

- $\boldsymbol{V_C(t)=?}$

La loi de variation de la tension aux bornes de C est obtenue par la relation : $V_C(t)=\dfrac{Q(t)}{C}$

$$\rightarrow\boxed{V_C(t)=E(1-e^{\frac{-t}{RC}})}.$$

<u>Remarque</u> :Plus $\tau=RC$ est grande, plus $V_C(t)$ met du temps pour tendre vers E .

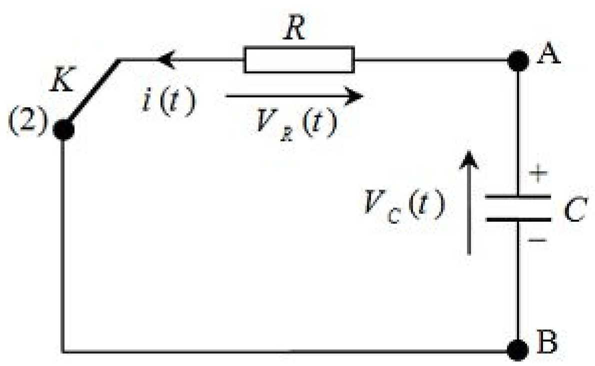
- $\boldsymbol{V_R(t)=?}$

La loi de variation de la tension aux bornes de R est obtenue par la relation : $V_R(t)=R\cdot i(t)$

$$\rightarrow\boxed{V_R(t)=E\cdot e^{\frac{-t}{RC}}}.$$

2) <u>Étude de la décharge du condensateur :</u>

<u>C. I. :</u>C chargé $\Rightarrow Q_0(t)=EC\Rightarrow V_C(t)=E$.



* ***Analyse du circuit :***

Déterminons les variations dans le temps de $Q(t)$, $i(t)$, $V_C(t)$ et $V_R(t)$.

Equation de la maille : $\underbrace{V_R(t)}_{R\cdot i(t)} - \underbrace{V_C(t)}_{\frac{Q(t)}{C}} = 0 \rightarrow R \cdot i(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$ avec $i(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$

$\rightarrow \quad R \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{RC} = 0}$: E.D. du 1er ordre sans second membre donnant la variation de $Q(t)$ (en décharge). $\tau = RC$: constante de temps caractérisant la vitesse (dynamique) de décharge du condensateur.

- $Q(t) = ?$ $\rightarrow$ *Résolution de l'E.D*

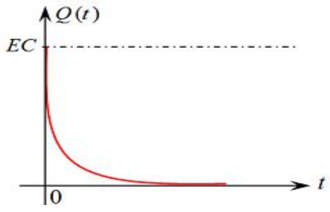
La solution $Q(t)$ de cette E.D sans second membre est réduite à la solution homogène. Déterminée de la manière usuelle vue précédemment, elle est donnée par :

$Q(t) = K \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \rightarrow K$ se détermine d'après les C.I :

À $t = 0$, on a $Q(t) = EC \Rightarrow K = EC$, ce qui donne :

$$\boxed{Q(t) = EC \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}.$$

La représentation graphique de la solution établie est illustrée par la figure ci-contre.

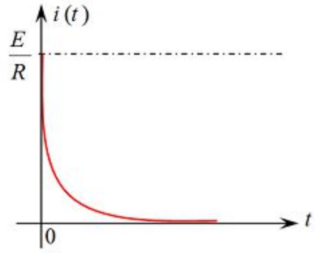


- $i(t) = ?$

L'expression des variations du courant de décharge est obtenue comme suit :

$$i(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(ECe^{-\frac{t}{RC}}\right) \rightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}.$$

Sa représentation graphique est illustrée par la figure ci-contre.

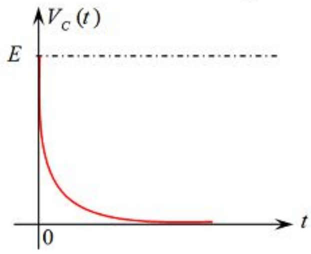


- $V_C(t) = ?$

La loi de variation de la tension aux bornes de C est obtenue par la relation : $V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$

$$\rightarrow \boxed{V_C(t) = E \cdot e^{\frac{-t}{RC}}}.$$

Sa représentation graphique est illustrée par la figure ci-contre.

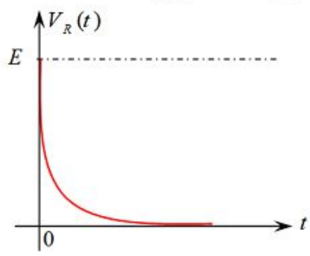


- $V_R(t) = ?$

La loi de variation de la tension aux bornes de R est obtenue par la relation : $V_R(t) = R \cdot i(t)$

$$\rightarrow \boxed{V_R(t) = E \cdot e^{\frac{-t}{RC}}}.$$

Sa représentation graphique est illustrée par la figure ci-contre.



Système triphasé Dans l'industrie, la puissance monophasée ou le réseau monophasé est généralement insuffisant. L'exploitation des réseaux triphasés permet de tripler la puissance. Ce réseau est constitué de 03 courants alternatifs sinusoïdaux de la même fréquence et de même amplitude (voir figure 3.7), mais déphasés les uns par rapport aux autres de 120° .

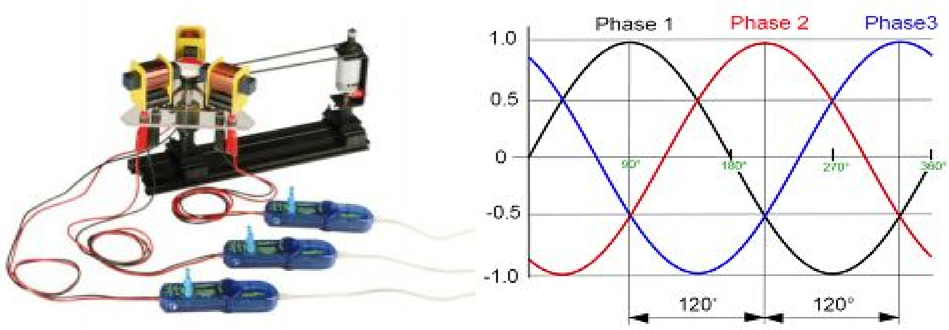


Figure 3.7 Système triphasé.

Les bobinages sont séparés de 120°, autour du rotor. Puisqu'ils sont séparés, physiquement, de 120°, les tensions générées dans les bobinages $V_{1,2}$ et V_3 sont déphasées de 120°:

$$\begin{cases} V_1(t) = V_M \sin(\omega t) \\ V_2(t) = V_M \sin(\omega t + 120°) \\ V_2(t) = V_M \sin(\omega t - 120°) \end{cases}$$

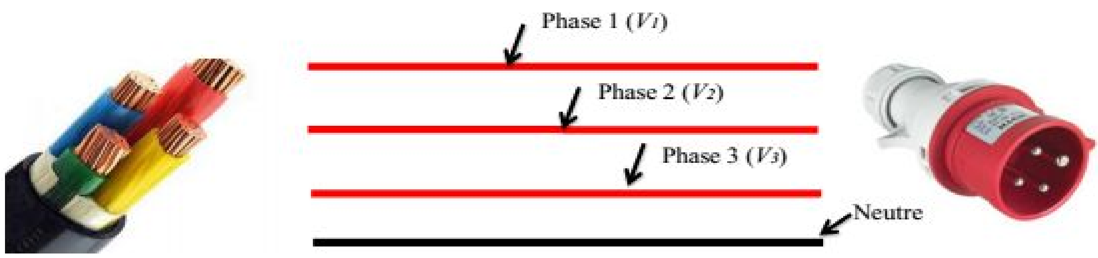


Figure 3.8 Prise triphasée.

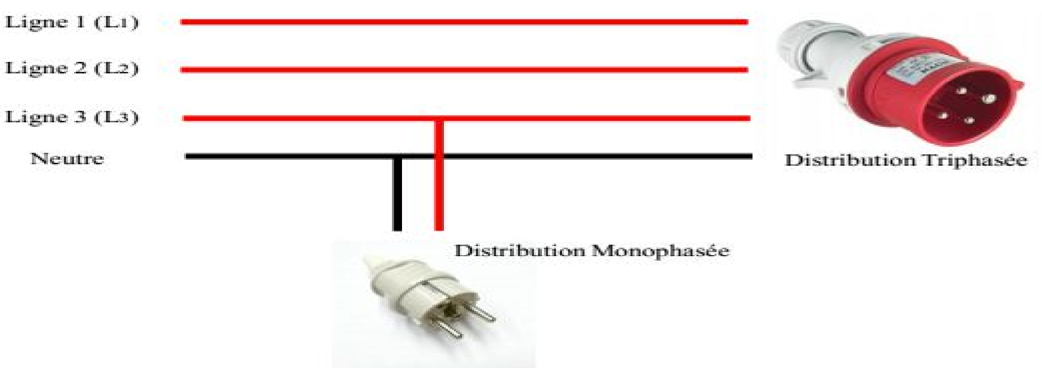


Figure 3.9 Distribution mixte.

3.4.2 Tensions simples et composées Les tensions simples sont les tensions V_1, V_2 et V_3 que l'on peut mesurer entre le neutre et chacune des trois phases ou lignes (L_1, L_2 et L3). Les trois tensions mesurées sont égales et valent **230 V** de valeur efficace en ce qui concerne la distribution domestique. La figure 3.10 représente les trois tensions simples.

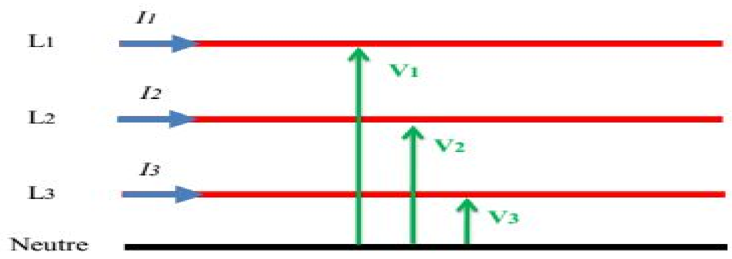


Figure 3.10 Tensions simple.

Les tensions composées sont les tensions U_{12} , U_{23} *et* U_{13} que l'on peut mesurer entre phases (respectivement entre la borne 1 et 2, entre les bornes 2 et 3 et entre la borne 3 et 1). Les trois tensions mesurées **sont égales et valent 380 V**, en valeur efficace. La figure 3.11 représente les trois tensions simples.

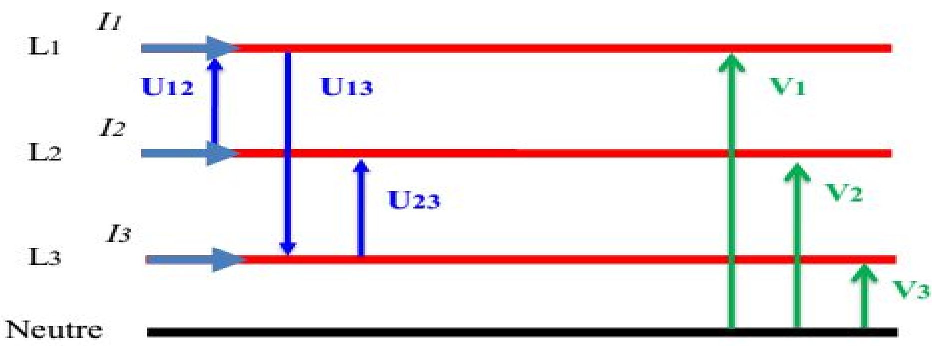


Figure 3.11 Tensions composées.

3.4.3 Relation entre U et V On observe que $U_{12} = V_1 - V_2$ et même remarque pour les deux tensions composées [7]. La représentation vectorielle est :

$$\begin{cases} \vec{U}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \\ \vec{U}_{23} = \vec{V}_2 - \vec{V}_3 \\ \vec{U}_{13} = \vec{V}_1 - \vec{V}_3 \end{cases}$$

Nous pouvons écrire pour U_{12} :

$\vec{U}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)$, le vecteur de $\vec{U}_{12}$ est donnée par la figure 3.12 :

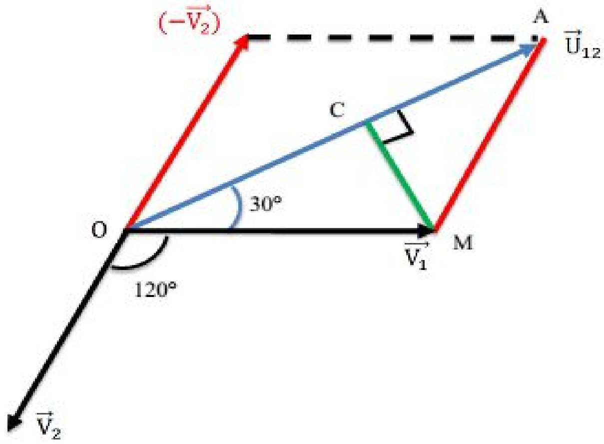


Figure 3.12 Représentation vectorielle des tensions simples.

Dans le triangle OAM (voir figure 3.12), OM $(\vec{V}_1)$ est égal à MA$(-\vec{V}_2)$, c'est donc un triangle isocèle.

La hauteur MC coupe la base OA en deux segments d'égale longueur OC et CA.

Donc l'angle $\widehat{AOM}$ est égale à 30°, avec :

$$\cos 30° = \frac{OC}{OM}$$

$$OC = OM \cos 30° = OM \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$U_{12} = OA = 2\,OC = 2\,OM \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$U_{12} = OM\sqrt{3}$, avec OM$(\vec{V}_1)$, alors :

$$U_{12} = V_1\sqrt{3}$$

D'une façon générale, on la relation suivante :

$$\boldsymbol{U = V\sqrt{3}}$$

Puissances électriques dans d'un système équilibré Dans un système triphasé équilibré, la somme vectorielle des courants est nulle.

$I_1 + I_2 + I_3 = 0$ (3.15)

On distingue deux modes de couplage (connexion des phases) au niveau du récepteur :

- Couplage étoile.
- Couplage triangle.

Couplage étoile équilibré Le couplage étoile de récepteurs en triphasé revient à réaliser une étoile à trois branches avec les 3 phases. Les trois récepteurs ont la même impédance $Z1 = Z2 = Z3$, ce qui fait que l'intensité qui circule dans un récepteur couplé en étoile est la même que celle qui provient de la phase $I = J$.

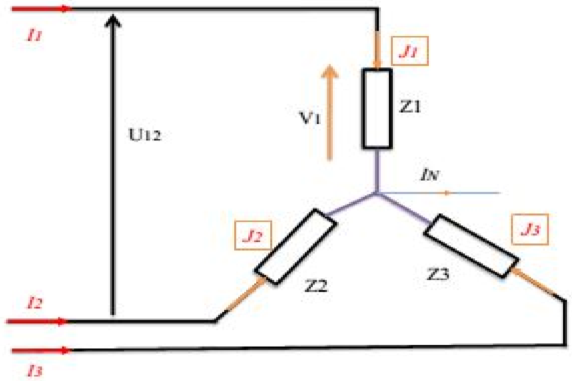


Figure 3.14 Couplage étoile.

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 3\ P_{mono} \tag{3.16}$$

$$P_T = 3\ VI * \cos\varphi = 3\ VJ * \cos\varphi \tag{3.17}$$

P_{mono} représente la puissance d'une seule phase.

On a démontré que : $U = V\sqrt{3}$

$V = \dfrac{U}{\sqrt{3}}$

$P_T = 3\ \dfrac{U}{\sqrt{3}} I * \cos\varphi = \sqrt{3}\ UI\cos\varphi$

$$P_T = \sqrt{3}\ UI\cos\varphi \tag{3.18}$$

La puissance réactive Q_T est donnée par:

$$Q_T = \sqrt{3}\ UI\sin\varphi \tag{3.19}$$

La puissance apparente S sera alors :

$$S = 3\ VI = \sqrt{3}\ UI = \sqrt{{Q_T}^2 + {P_T}^2} \tag{3.20}$$

Couplage triangle équilibré En triangle, le récepteur est traversé par le courant composé *J* et soumis à la tension composée U. On remarque qu'il n'y a pas de neutre dans le couplage triangle.

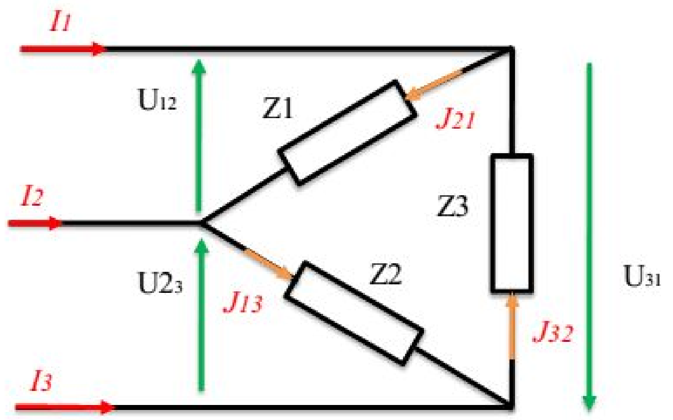


Figure 3.15 Couplage triangle.

Pour un récepteur :

$$P_{mono} = UJ * \cos\varphi \quad (3.21)$$

Pour le réseau (03 récepteurs) :

$$P_T = 3UJ * \cos\varphi \quad (3.22)$$

$I = J\sqrt{3}$, $J = \frac{I}{\sqrt{3}}$ alors :

$P_T = \sqrt{3}\,UI * \cos\varphi$

Le réactif est :

$$Q_T = \sqrt{3}\,UI \sin\varphi \quad (3.23)$$

Système triphasé déséquilibré sans neutre Dans un système triphasé déséquilibré sans neutre, les tentions entre phases sont conservées (les tensions composées) mais pas les tensions simples. On note que le courant de la ligne est : *I* Le courant qui traverse la charge est : *J*

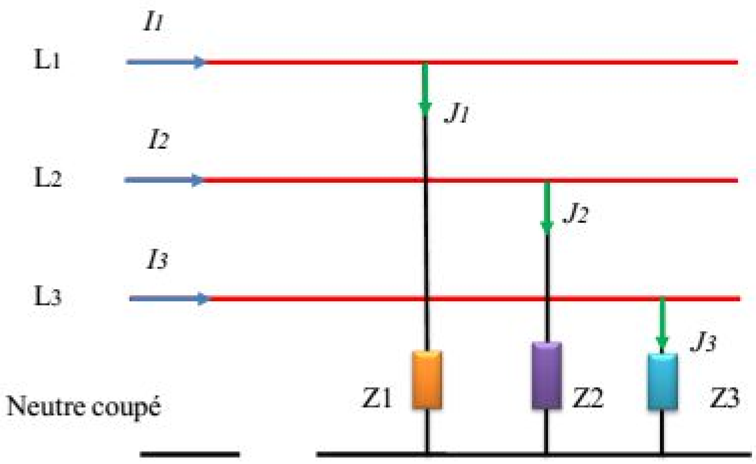


Figure 3.13 Système triphasé déséquilibré.