

COMMANDE PRÉDICTIVE

Chapitre 1 : Principes de la commande prédictive

Chapitre 2 : Commande Prédictive Généralisée (GPC)

Modèle de prédiction, prédicteur optimal. Minimisation d'une fonction de coût quadratique à horizon fini. Synthèse du régulateur polynomial RST équivalent. Choix des paramètres de réglage, compromis stabilité, performances, robustesse. GPC sous contraintes.

Chapitre 3 : La commande prédictive à base de modèle d'état (MPC)

Modèle de prédiction, prédicteur optimal. Minimisation d'une fonction de coût quadratique à horizon fini , MBPC sous contraintes.

Résumé:

La commande prédictive est une technique de prévision qui, souvent alliée à une technique de commande PID (Proportionnel-Intégral-Dérivateur) intervient dans la plupart des systèmes de régulation industrielle. Les techniques de commande prédictive et PID sont utilisées dans des domaines aussi variés que le domaine médical, la sidérurgie, la robotique, l'aérospatiale, l'agroalimentaire, le pétrole, l'énergie, la mécanique, etc. Leurs applications vont de la régulation de réacteurs de fusées au réglage de l'ambiance de serres horticoles.

De toutes les commandes dites "avancées", la commande prédictive est la plus utilisée dans l'industrie, aussi bien pour les qualités techniques auxquelles elle doit ses performances que pour sa facilité de mise en œuvre. Son champ d'application s'étend à tous les domaines industriels, notamment aux cas où la régulation PID n'est pas efficace.

Introduction

La commande prédictive est une technique de commande avancée de l'automatique, elle a pour objectif de commander des systèmes industriels complexes. Le principe de cette technique est d'utiliser un modèle dynamique du processus à l'intérieur du contrôleur en temps réel afin d'anticiper le futur comportement du procédé. La commande prédictive fait partie des techniques de contrôle à modèle interne (IMC: Internal Model Controller). En anglais on utilise le terme MPC ou MBPC pour qualifier la commande prédictive : Model (Based) Predictive Control. Cette méthode a été inventée par un français, J. Richalet, en 1978 et généralisée par D.W. Clarke en 1987 en accord avec de grands groupes industriels aux USA et en Europe (Shell et Adersa).

La prédiction est une notion qui joue un rôle important pour toute activité dans laquelle on cherche à anticiper une trajectoire prédéfinie. De fait, de nombreuses activités humaines telles que la marche, la conduite d'une automobile ou la pratique sportive cherchent à anticiper une trajectoire afin de prévoir les gestes et manœuvres à effectuer.

Applications industrielles

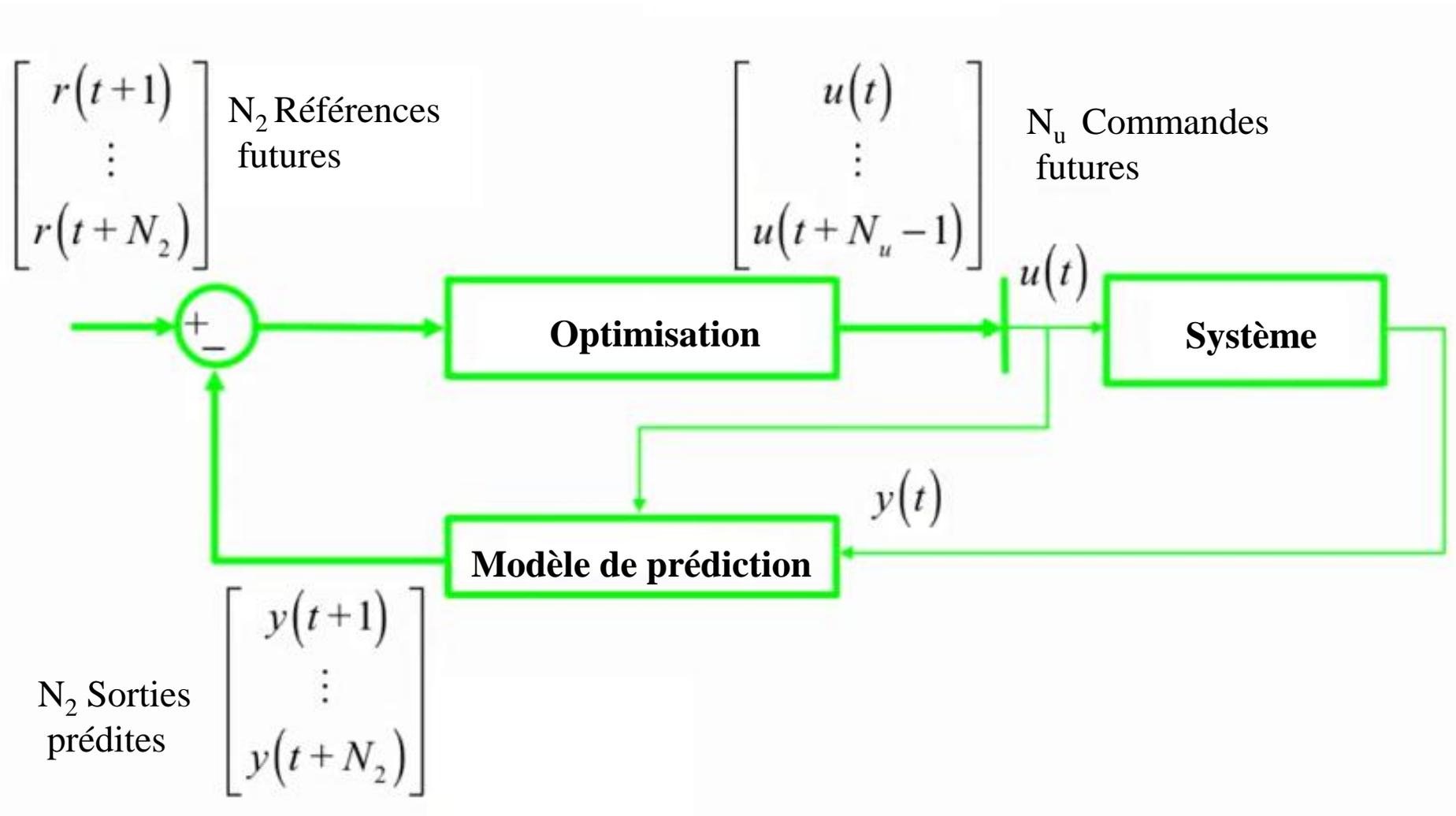
- ▶ 1979 Dynamic Matrix Control (DCM) : industrie pétrolière
- ▶ Plus de 1000 applications répertoriées (Qin&Badgwell'03)
 - ❑ Robots, machines-outils, industrie chimique ou biochimique, aéronautique, thermique, l'industrie du ciment, bâtiment intelligent ...
 - ❑ Exemple : régulation de vitesse des ascenseurs de la tour Eiffel

➡ *surtout pour des systèmes avec une trajectoire à suivre connue à l'avance*

Historique

- ▶ Début à la fin des années '70 (Richalet et al., Cutler&Ramaker)
- ▶ Améliorations dans les années '90 : faisabilité, stabilité en boucle fermée
- ▶ Maturité depuis le début des années 2000 : commande prédictive robuste (Mayne et al.), solutions explicites, commande prédictive des systèmes hybrides et non-linéaires, applications aux systèmes rapides
- ▶ 2010 : commande prédictive stochastique, distribuée, décentralisée, économique

Schéma de principe de la commande prédictive



Principe de la commande prédictive

❖ Élaboration de la commande

- Choix d'un *modèle numérique* du processus sur lequel est fondée la prédiction de la sortie (fonction de transfert, représentation d'état)
- Formulation d'un *critère de performance* à partir des objectifs de la commande
 - suivie de trajectoire, erreur statique nulle ...
- Choix des *paramètres de réglage* (horizon de prédiction, horizon de commande, pondérations)

▪ À chaque pas d'échantillonnage :

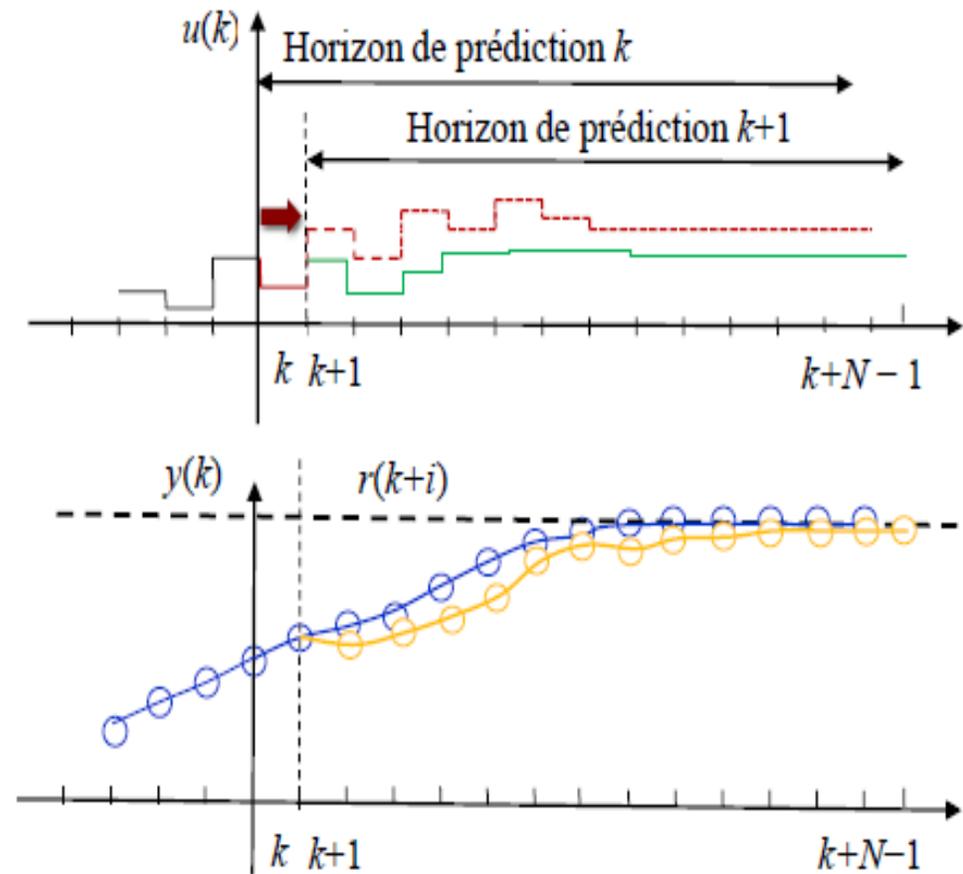
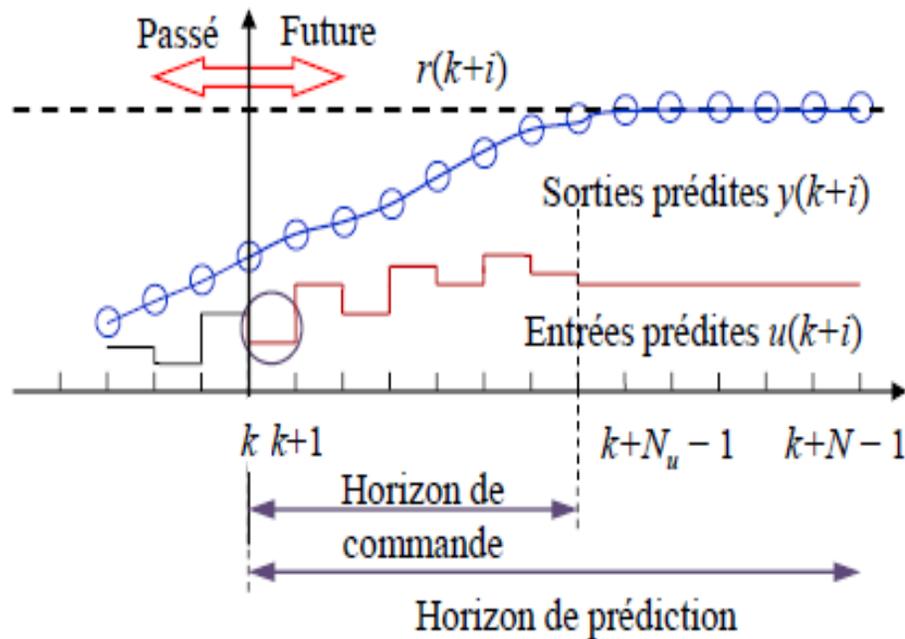
- résoudre un problème d'optimisation à *horizon finit*
- obtenir une séquence de commande futures en **boucle ouverte** par minimisation d'une **fonction de coût** sur un horizon **fini**
- appliquer au processus la **première** valeur de la séquence de commande optimale

réitération à la période d'échantillonnage suivante : **stratégie de l'horizon fuyant**

➡ structure de commande en boucle fermée

Principe de l'horizon fuyant

❖ Stratégie de commande prédictive – principe de l'horizon fuyant



Avantages et défis de la commande prédictive

❖ Aspects importants

- Choix large du modèle de prédiction : linéaire/non-linéaire, monovarié/multivarié, à retard
- Formulation des différents objectifs
- Effet anticipatif : technique bien adaptée pour des problèmes de suivi de trajectoire
- Méthode systématique de manipulation des contraintes

❖ Défis

- Implantation : résolution en temps-réel ($<$ période d'échantillonnage du système) avec la technologie disponible (capacité de stockage, processeur...)
- Stabilité : convergence (stabilité en boucle fermée) pas garantie automatiquement
- Robustesse : vis-à-vis des incertitudes et perturbations
- Faisabilité : possibilité d'insatisfaction des contraintes à un certain instant de temps futur

Prise en compte des contraintes

❖ Considération des contraintes dans la synthèse de la loi de commande

– Présence des contraintes pour tous les systèmes physiques :

- limitations physiques (actionneurs)
- contraintes liées aux performances dynamiques (dépassement)
- contraintes liées à la sûreté (limites de température, pression)

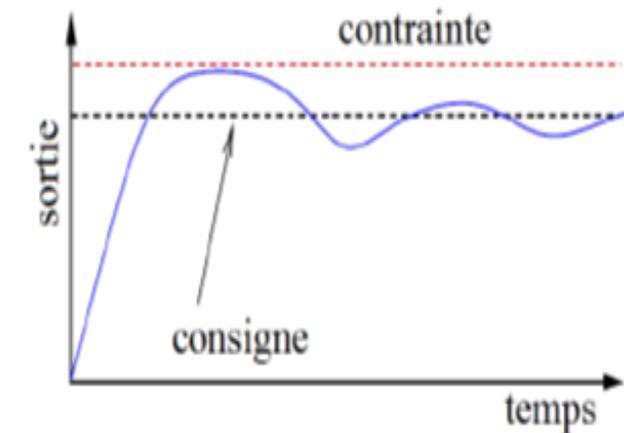
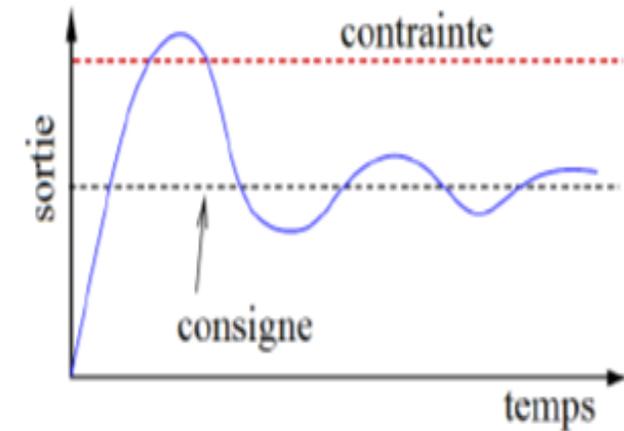
– Points de fonctionnement optimaux situés près des contraintes

❖ Méthodes de commande classiques

- gestion aléatoire des contraintes
- consigne éloignée des contraintes
- fonctionnement sous optimal du processus

❖ Commande prédictive

- contraintes prise en compte dans la synthèse du correcteur
- fonctionnement optimal du processus



Approche GPC

❖ Modèle numérique

- Définition du modèle sous forme **CARIMA** (Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average)

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + \frac{C(q^{-1})\xi(k)}{\Delta(q^{-1})}$$

avec : $A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a}$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}$$

$$\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \text{ , } q^{-1} \text{ opérateur retard temporel}$$

$\xi(k)$ bruit blanc centré

$C(q^{-1})$ polynôme de perturbation

- Cette structure apporte un **terme intégrateur** dans la loi de commande et garantit l'**annulation** de toute erreur statique vis à vis de consigne ou de perturbation constante

Approche GPC

❖ Equation de prédiction

- Prédicteur optimal au pas i :

$$\hat{y}(k+i|k) = \underbrace{\frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{H_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}\Delta u(k-1)}_{\text{réponse libre}} + \underbrace{G_i(q^{-1})\Delta u(k+i-1)}_{\text{réponse forcée}} + \cancel{J_i(q^{-1})\xi(k+i)}$$

réponse libre

réponse forcée

- Les polynômes inconnus sont solutions d'équations diophantiennes pouvant être résolues récursivement :

$$\begin{aligned}\Delta(q^{-1})A(q^{-1})J_i(q^{-1}) + q^{-i}F_i(q^{-1}) &= C(q^{-1}) \\ C(q^{-1})G_i(q^{-1}) + q^{-i}H_i(q^{-1}) &= B(q^{-1})J_i(q^{-1})\end{aligned}$$

Approche GPC

❖ Forme matricielle de l'équation de prédiction

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \tilde{\mathbf{u}} + \underbrace{\frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(k) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(k-1)}_{\text{réponse libre}}$$

réponse libre

$$\mathbf{if} = [F_{N_1}(q^{-1}) \quad \dots \quad F_{N_2}(q^{-1})]^T$$

$$\mathbf{ih} = [H_{N_1}(q^{-1}) \quad \dots \quad H_{N_2}(q^{-1})]^T$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\Delta u(k) \quad \dots \quad \Delta u(k + N_u - 1)]^T$$

$$\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(k + N_1) \quad \dots \quad \hat{y}(k + N_2)]^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{N_1}^{N_1} & g_{N_1-1}^{N_1} & \dots & \dots \\ g_{N_1+1}^{N_1+1} & g_{N_1}^{N_1+1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N_2}^{N_2} & g_{N_2-1}^{N_2} & \dots & g_{N_2-N_u+1}^{N_2} \end{bmatrix}$$

- Les coefficients de la matrice \mathbf{G} sont en fait les coefficients de la réponse impulsionnelle du modèle

Approche GPC

❖ Fonction de coût quadratique

- Comprenant des termes portant sur les **erreurs de prédiction** dans le futur et les **incréments de commandes futures**

$$J = \sum_{i=N_1}^{N_2} (\hat{y}(k+i) - y_r(k+i))^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N_u} (\Delta u(k+i-1))^2$$

sous l'hypothèse : $\Delta u(k+i) = 0$ pour $i \geq N_u$

- Quatre paramètres doivent être choisis par l'utilisateur

N_1 horizon de prédiction inférieur
 N_2 horizon de prédiction supérieur
 N_u horizon de prédiction sur la commande
 λ facteur de pondération sur la commande

Approche GPC

❖ Expression de la loi de commande

- Forme matricielle du critère

$$J(\tilde{\mathbf{u}}) = \left[\mathbf{G} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(k) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(k-1) - \mathbf{y}_r \right]^T \left[\mathbf{G} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(k) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(k-1) - \mathbf{y}_r \right] + \lambda \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}}$$

$\frac{\partial J}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = 0$

- Séquence de commandes optimales

$$\tilde{\mathbf{u}}_{opt} = \mathbf{N} \left(\mathbf{y}_r - \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(k) - \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(k-1) \right)$$

avec $\mathbf{y}_r = [y_r(k+N_1) \ \cdots \ y_r(k+N_2)]^T$ et $\mathbf{N} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}_{N_u}]^{-1} \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{N_u}^T \end{bmatrix}$

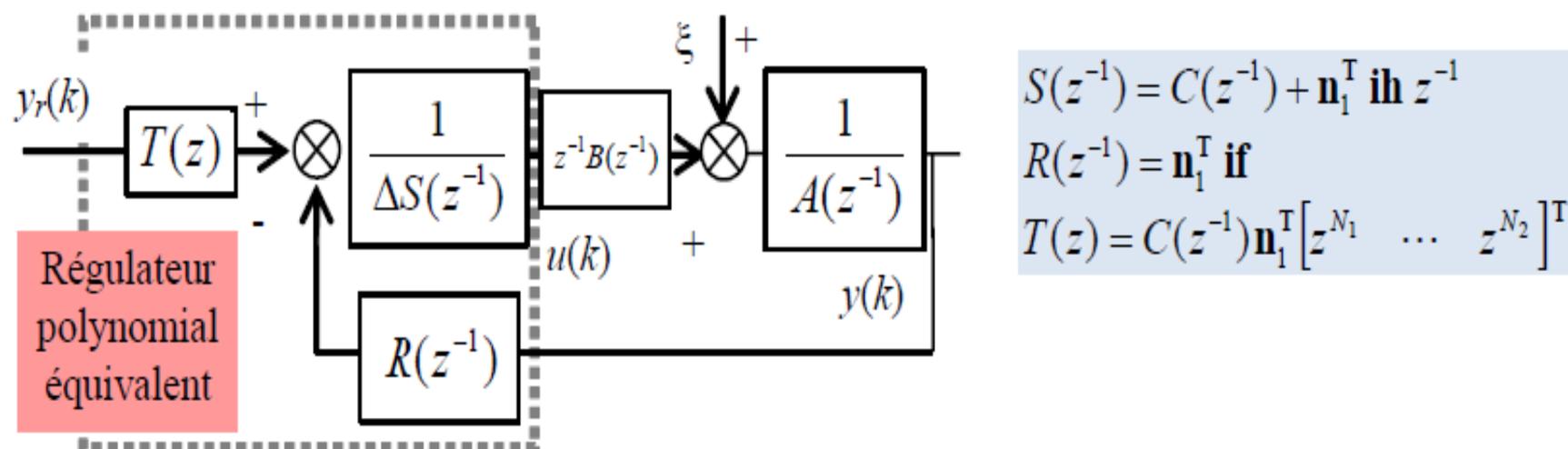
- Commande appliquée au système à l'instant k

$$u_{opt}(k) = u_{opt}(k-1) + \mathbf{n}_1^T \left(\mathbf{y}_r - \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(k) - \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u_{opt}(k-1) \right)$$

Approche GPC

❖ Mise en œuvre : Régulateur polynomial équivalent

- Equation aux différences pour l'implantation de la loi de commande



- Par rapport à une structure RST classique, **le polynôme T est ici non causal**

$$S(z^{-1})\Delta(z^{-1})u(k) = -R(z^{-1})y(k) + T(z)y_r(k)$$

- Reformulation avec un polynôme T causal : $T(z^{-1}) = C(z^{-1})\mathbf{n}_1^T [z^{-N_2+N_1} \quad z^{-N_2+N_1+1} \quad \dots \quad 1]^T$
- Loi de commande : $S(z^{-1})\Delta(z^{-1})u(k) = -R(z^{-1})y(k) + T(z^{-1})y_r(k + N_2)$

Approche GPC

❖ Programmation hors ligne

- Définition de la consigne (stockage point par point)
- Choix d'une période d'échantillonnage et définition des polynômes A et B du modèle CARIMA (par identification préalable si nécessaire)
- Choix des paramètres de réglage de la fonction de coût
- Calcul des prédicteurs optimaux par résolution des équations diophantiennes
- Synthèse des polynômes R , S et T du régulateur équivalent

Approche MPC

Modèle sous forme d'état : système MIMO (m entrées, p sorties)

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases}, \text{ où } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$$

- ▶ Ajout d'une action intégrale pour annuler les erreurs statiques

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1) + \Delta\mathbf{u}(k)$$

- ▶ Représentation d'état étendue

$$\begin{cases} \mathbf{x}_e(k+1) = \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e(k) + \mathbf{B}_e \Delta\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_e \mathbf{x}_e(k) \end{cases}, \text{ où } \mathbf{x}_e(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \end{bmatrix}, \mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{m,n} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{p,m} \end{bmatrix}$$

Prédiction de la sortie

$$\hat{\mathbf{y}}(k+i) = \hat{\mathbf{y}}(k+i/k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^i \mathbf{x}(k) + \underbrace{\sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-j-1} \mathbf{B} \left[\mathbf{u}(k-1) + \sum_{l=0}^j \Delta\mathbf{u}(k+l) \right]}_{\mathbf{u}(k+j)}$$

Approche MPC

Minimisation du critère pour l'élaboration de la loi de commande

$$J = \sum_{i=N_1}^{N_2} \|\hat{\mathbf{y}}(k+i) - \mathbf{y}_r(k+i)\|_{\mathbf{Q}_J(i)}^2 + \sum_{i=0}^{N_u-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+i)\|_{\mathbf{R}_J(i)}^2$$

Forme matricielle du critère

$$J = \|\mathbf{Y}(k) - \mathbf{Y}_r(k)\|_{\mathbf{Q}_J}^2 + \|\Delta \mathbf{U}(k)\|_{\mathbf{R}_J}^2 = \|\Phi_{\Delta} \Delta \mathbf{U}(k) - \Theta(k)\|_{\mathbf{Q}_J}^2 + \|\Delta \mathbf{U}(k)\|_{\mathbf{R}_J}^2$$

avec

$$\mathbf{Y}(k) = \Psi \hat{\mathbf{x}}(k) + \Phi \mathbf{u}(k-1) + \Phi_{\Delta} \Delta \mathbf{U}(k)$$

$$\Theta(k) = \mathbf{Y}_r(k) - \Psi \hat{\mathbf{x}}(k) - \Phi \mathbf{u}(k-1)$$

et

$$\mathbf{Y}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}(k+N_1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}(k+N_2) \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_r(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_r(k+N_1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_r(k+N_2) \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{U}(k) = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}(k+N_u-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_J = \text{diag}(\mathbf{R}_J(i))$$

$$\mathbf{Q}_J = \text{diag}(\mathbf{Q}_J(i))$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_2} \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} \Sigma_{N_1-1} \\ \vdots \\ \Sigma_{N_2-1} \end{bmatrix}, \Phi_{\Delta} = \begin{bmatrix} \Sigma_{N_1-1} & \cdots & \Sigma_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{N_2-1} & \cdots & \Sigma_{N_2-N_1} & \Sigma_{N_2-N_1-1} & \cdots & \Sigma_{N_2-N_u} \end{bmatrix}, \Sigma_i = \mathbf{C} \sum_{j=0}^i \mathbf{A}^{i-j} \mathbf{B}$$

Commandes futures

Etat étendu et
consignes futures

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{U}(k)} = 0$$

$\Delta \mathbf{U}(k)$

$$\Delta \mathbf{U}(k) = (\mathbf{R}_J + \Phi_{\Delta}^T \mathbf{Q}_J \Phi_{\Delta})^{-1} \Phi_{\Delta}^T \mathbf{Q}_J \Theta(k)$$

Approche MPC

Loi de commande

- ▶ Séquence de commandes futures obtenue par minimisation du critère J
- ▶ Par application du principe de l'horizon fuyant, seule la première valeur de cette séquence est appliquée au système

$$\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{F}_r \mathbf{y}_r(k + N_2) - \mathbf{L} \mathbf{x}_e(k) \quad \text{avec} \quad \mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2] = [\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\Psi} \quad \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\Phi}]$$

$$\text{où} \quad \boldsymbol{\mu} = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}_{m, m(N_u-1)}] (\mathbf{R}_J + \boldsymbol{\Phi}_\Delta^\top \mathbf{Q}_J \boldsymbol{\Phi}_\Delta)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_\Delta^\top \mathbf{Q}_J$$

$$\text{et} \quad \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}, \mathbf{L}_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{L}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{m \times p(N_2 - N_1 + 1)}$$

$$\mathbf{A}_{Fr} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p(N_2-N_1-1), p} & \mathbf{I}_{p(N_2-N_1-1)} \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p, p(N_2-N_1-1)} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B}_{Fr} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p(N_2-N_1-1), p} \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C}_{Fr} = [\boldsymbol{\mu}_1 \quad \boldsymbol{\mu}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\mu}_{N_2-N_1}]$$
$$\mathbf{D}_{Fr} = \boldsymbol{\mu}_{N_2-N_1+1}$$

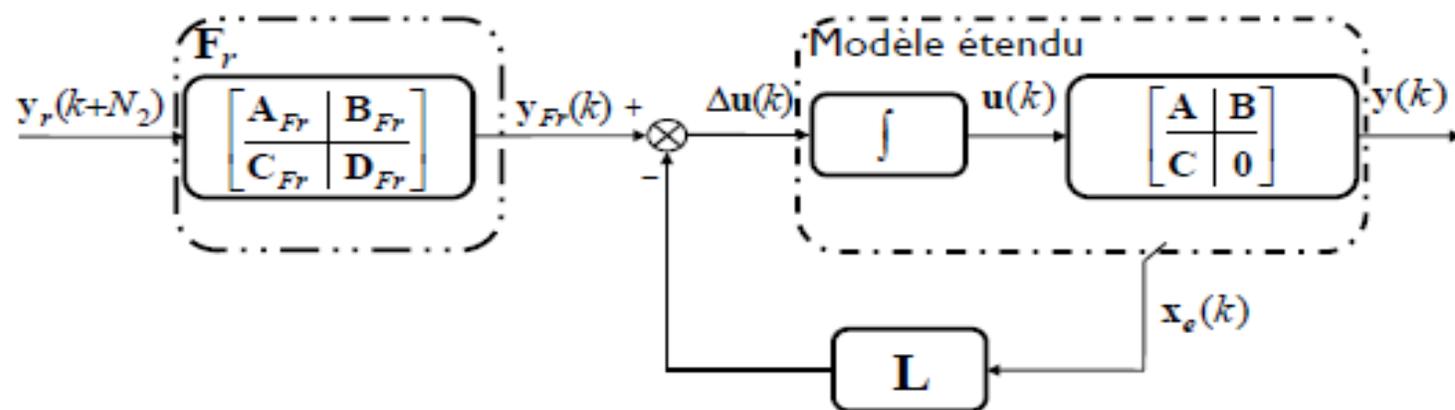


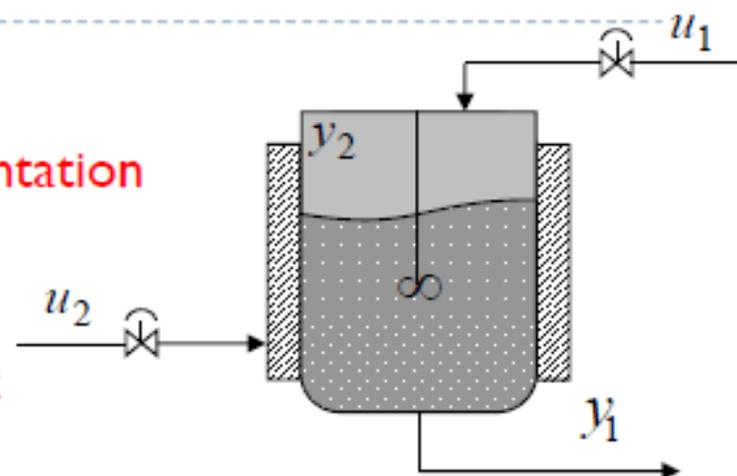
Tableau récapitulatif

- ▶ Définition de la consigne
 - ▶ Choix du modèle sous la forme d'une représentation d'état (matrices A, B, C), choix d'une période d'échantillonnage
 - ▶ Choix des paramètres de réglage de la fonction de coût
 - ▶ Calcul direct des matrices nécessaires pour la mise sous forme matricielle du critère J
 - ▶ Dans le cas où l'état est mesurable, synthèse de la matrice L (« retour d'état ») du correcteur équivalent
-

Exemple : commande MPC d'un réacteur

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+0,7s} & \frac{5}{1+0,3s} \\ \frac{1}{1+0,5s} & \frac{2}{1+0,4s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Concentration (pointing to $Y_1(s)$)
Température (pointing to $Y_2(s)$)
Débit d'alimentation (pointing to $U_1(s)$)
Débit de refroidissement (pointing to $U_2(s)$)



- ▶ Discrétisation avec $T_e = 0,03$ min
- ▶ Représentation d'état avec $n = 4, m = 2, p = 2$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,9580 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9418 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9048 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9277 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0,1678 & 0 & 0,9516 & 0 \\ 0 & 0,2329 & 0 & 0,2890 \end{bmatrix}$$

- ▶ Ajout d'action intégrale ➡ système étendu
- ▶ Paramètres de réglage MPC : $N_1 = 1, N_2 = 3, N_u = 2, \mathbf{R}_J = 0,05\mathbf{I}_m, \mathbf{Q}_J = \mathbf{I}_p$

Approche MPC en présence des contraintes

► Fonction de coût

$$J(x_k, \Delta u_k) = \underbrace{x_{k+N}^T P x_{k+N}}_{\text{coût terminal}} + \sum_{i=0}^{N-1} \left((y_{k+i} - y_{r,k+i})^T Q (y_{k+i} - y_{r,k+i}) + \Delta u_{k+i}^T R \Delta u_{k+i} \right)$$

coût terminal

avec $N_1 = 0$, $N_2 = N$

► Séquence de commande $\Delta \mathbf{u}_k = [\Delta u_k, \Delta u_{k+1}, \dots, \Delta u_{k+N-1}]^T$

► Système étendu

$$\begin{cases} x_e(k+1) = \mathbf{A}_e x_e(k) + \mathbf{B}_e \Delta u(k) \\ y(k) = \mathbf{C}_e x_e(k) \end{cases}$$

Prédicteur

$$\begin{cases} \hat{x}_e(k+i|k) = \mathbf{A}_e^i x(k) + \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{A}_e^{i-1-j} \mathbf{B}_e \Delta u(k+j) \\ \hat{y}(k+i|k) = \mathbf{C}_e \hat{x}_e(k+i|k) \end{cases}$$

► Contraintes

- ❑ incrément de la commande : $\Delta u(k+i) \in \Delta U \Leftrightarrow \Delta u_{\min} \leq \Delta u(k+i) \leq \Delta u_{\max}$, $i = 0 : N_u - 1$
- ❑ commande : $u(k+i) \in U \Leftrightarrow u_{\min} \leq u(k+i) \leq u_{\max}$, $i = 0 : N_u - 1$
- ❑ sortie : $y(k+i) \in Y \Leftrightarrow y_{\min} \leq y(k+i) \leq y_{\max}$, $i = 0 : N - 1$
- ❑ état final (contraintes terminale) : $x_e(k+N) \in X_f \Leftrightarrow a_f^i x_e(k+N) \leq b_f^i$

Approche MPC en présence des contraintes

► Formulation matricielle de la fonction de coût

$$J(x_e(k), \Delta \mathbf{u}_k) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}_k^T H \Delta \mathbf{u}_k + \left[x_e^T(k) F_x^T + \mathbf{y}_r^T(k) F_w^T \right] \Delta \mathbf{u}_k + x_e^T(k) P_p x_e(k) + R_J$$

avec

$$F_x^T = 2(\varphi_N^T P \lambda_N + \Phi^T Q \Gamma)$$

$$\mathbf{y}_r(k) = [y_r(k) \quad \dots \quad y_r(k+N-1)]^T$$

$$F_w^T = -2Q\Gamma$$

$$H = 2(\lambda_N^T P \lambda_N + \Gamma^T Q \Gamma + R)$$

$$P_p = \Phi^T Q \Phi + \varphi_N^T P \lambda_N$$

$$Q = \text{diag}(Q)$$

$$R_J = \mathbf{y}_r^T(k) Q \mathbf{y}_r(k) - 2\mathbf{y}_r^T(k) Q \Phi x_e(k)$$

$$R = \text{diag}(R)$$

► Prédiction $\hat{\mathbf{y}}_k = \Phi x_e(k) + \Gamma \Delta \mathbf{u}_k$

$$\hat{x}_e(k+N) = \varphi_N x_e(k) + \lambda_N \Delta \mathbf{u}_k$$

avec $\varphi_N = A_e^N$, $\lambda_N = [A_e^{N-1} B_e \quad \dots \quad A_e^{N-N_s} B_e]$

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}(k|k) \\ \hat{y}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N-1|k) \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} C_e \\ C_e A_e \\ \vdots \\ C_e A_e^{N-1} \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ C_e B_e & \ddots & 0 & \dots \\ C_e A_e B_e & C_e B_e & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_e A_e^{N-2} B_e & \dots & \dots & C_e A_e^{N-N_s-1} B_e \end{bmatrix}$$

Approche MPC en présence des contraintes

▶ **En absence des contraintes** $\frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{u}_k} = 0 \implies \Delta \mathbf{u}_{SC}^{opt}(x_e(k)) = -H^{-1}(F_x x_e(k) + F_w \mathbf{y}_r(k))$

▶ **Problème d'optimisation avec contraintes** $\Delta \mathbf{u}_{k,opt}(x_e(k)) = \arg \min_{\Delta \mathbf{u}_k} J(x_e(k), \Delta \mathbf{u}_k)$
 sujet à $G \Delta \mathbf{u}_k \leq W + E x_e(k)$

□ Contraintes sur $\Delta u(k+i)$

Contraintes sur $u(k+i)$, $i = 0 : N_u - 1$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(k+i) < \Delta u_{\max} \\ \Delta u(k+i) > \Delta u_{\min} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \leq \begin{pmatrix} \Delta u_{\max} \\ \vdots \\ \Delta u_{\max} \\ -\Delta u_{\min} \\ \vdots \\ -\Delta u_{\min} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} u(k+i) < u_{\max} \\ u(k+i) > u_{\min} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \leq \begin{pmatrix} u_{\max} \\ \vdots \\ u_{\max} \\ -u_{\min} \\ \vdots \\ -u_{\min} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & -1 \\ \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_e(k)$$

□ Contraintes sur la sortie $\left. \begin{array}{l} \hat{y}_k = \Phi x_e(k) + \Gamma \Delta \mathbf{u}_k < y_{\max} \\ \hat{y}_k = \Phi x_e(k) + \Gamma \Delta \mathbf{u}_k > y_{\min} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma \\ -\Gamma \end{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \leq \begin{pmatrix} y_{\max} \\ -y_{\min} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Phi \\ \Phi \end{pmatrix} x_e(k)$

□ Contraintes sur l'état final $\left. \begin{array}{l} a_f^i x_e(k+N) \leq b_f^i \\ x_e(k+N) = \varphi_N x_e(k) + \lambda_N \Delta \mathbf{u}_k \end{array} \right\} \Rightarrow a_f^i \lambda_N \Delta \mathbf{u}_k \leq b_f^i - a_f^i \varphi_N x_e(k)$

Conclusion

- ▶ Commande prédictive : beaucoup utilisée dans l'industrie
- ▶ Etapes à suivre en vue de l'élaboration d'une commande prédictive
 - ❑ choix du modèle sur lequel est basée la prédiction de la sortie
 - ❑ spécification de la trajectoire que doit suivre la sortie
 - ❑ minimisation d'un critère quadratique à horizon fini élaborant une séquence de commandes futures
 - ❑ application du premier élément de la séquence de commande au système et au modèle et réitération à l'instant suivant
- ▶ Application possible à plusieurs classes de systèmes (SISO, MIMO, systèmes avec contraintes)
- ▶ Approche polynomiale (GPC) ➡ Commande RST équivalente
- ▶ Approche d'état (MPC) ➡ Commande par retour d'état
- ▶ Atout : prise en compte des contraintes directement dans la synthèse