

Université de Relizane
Département Electrotechnique et
Automatique
Master 02 Electrotechnique Industrielle
Matière: Régimes transitoires
des systèmes électriques

Chapitre 01: : Etude des régimes transitoires des circuits réactifs

Chapitre 02: Généralités sur les surtensions électriques

Chapitre 01: Etude des régimes transitoires des circuits réactifs

Origine des processus transitoires

En analysant les résultats obtenus à partir des considérations physiques sur les inductances et les capacités, nous pouvons nous poser une question générale : pourquoi toute modification de la charge de capacité et toute modification du courant d'inductance prend du temps, alors que, par exemple, les modifications des grandeurs d'une résistance, du courant de condensateur et de la tension d'inductance peuvent être instantanées ?

La réponse à cette question peut être donnée en considérant l'évolution de l'état énergétique d'un circuit contenant des éléments réactifs.

Energie des éléments réactifs

Un condensateur charge emmagasine un champ électrique entre ses électrodes.

$$W_C = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{Q_C^2}{2C}.$$

Une bobine par laquelle passe un courant I_L emmagasine un champ magnétique à l'intérieur de ses spires.

$$W_L = \frac{LI_L^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Un élément réactif, en revanche, ne peut pas dissiper l'énergie qui lui est transmise par le circuit : cette énergie est accumulée dans le champ électrique ou magnétique de l'élément, et peut être rendue au circuit.

Analyse des processus transitoires

En régime transitoire, les tensions et les courants du circuit évoluent dans le temps pour trouver les lois d'évolution, il faut établir et résoudre les équations différentielles qui décrivent le système.

Système du 1° ordre

Définition

Un système du 1° ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ sera régi par une équation différentielle du 1° ordre à coefficients constants :

$$\tau \dot{s}(t) + s(t) = f(t)$$

$f(t)$ est proportionnel au signal d'entrée (impulsion, échelon ...) et τ est une constante qui caractérise le système (constante de temps)

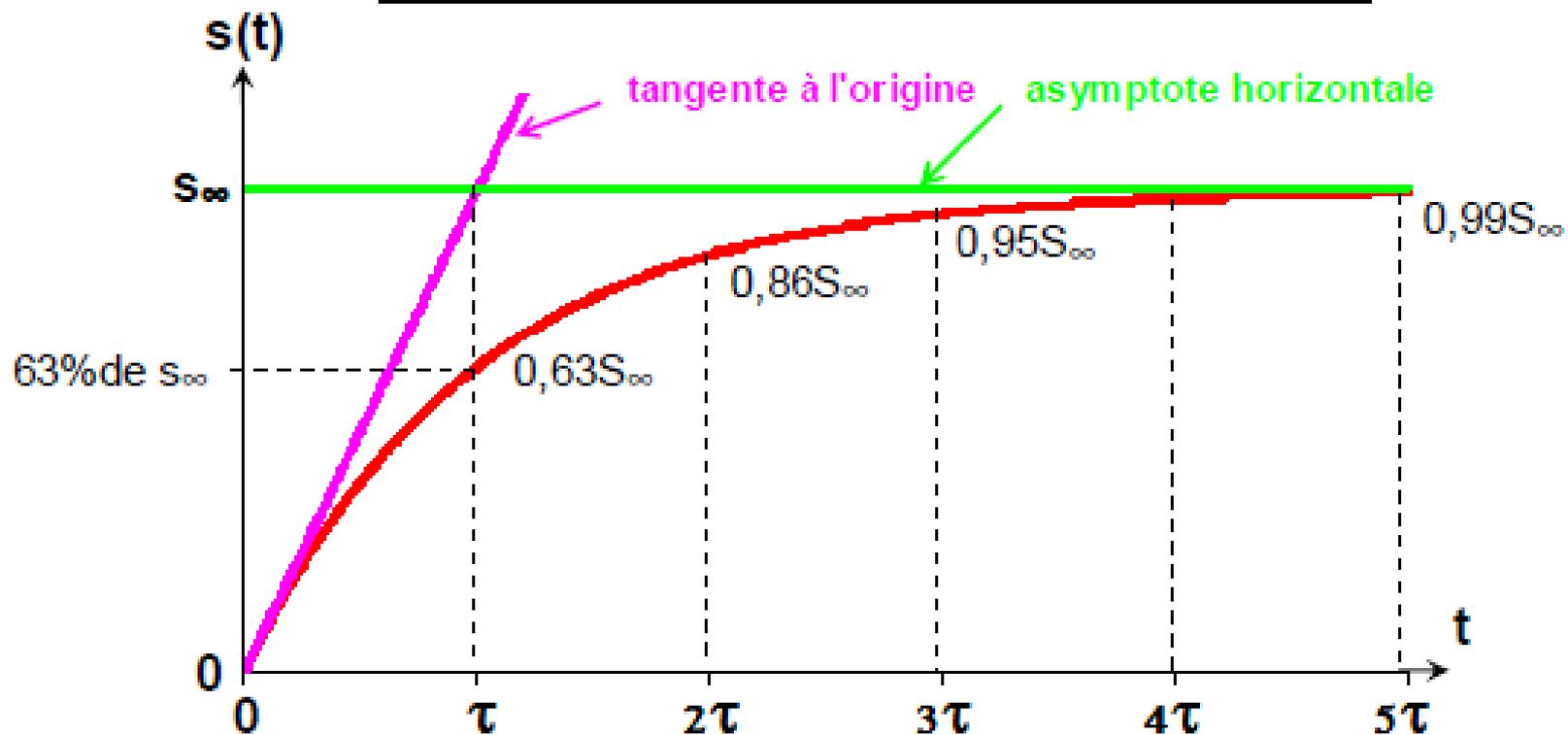
On rappelle que $\dot{s}(t)$ est la notation simplifiée de s' ou $\frac{ds}{dt}$.

La solution générale de l'équation est : $s(t) = A + B.e^{-t/\tau}$

Les constantes A et B seront déterminées en considérant $s(0)$ et $s(\infty)$.

Propriétés de la courbe de réponse à un échelon (1^o ordre)

Courbe générale $s(t)$ de réponse à un échelon d'un système du 1^o ordre



Système du 2° ordre

Définition (limitée au cas de la réponse à un échelon)

Un système du 2° ordre d'entrée $\mathbf{e}(t)$ et de sortie $\mathbf{s}(t)$ sera régi par une équation différentielle du 2° ordre à coefficients constants :

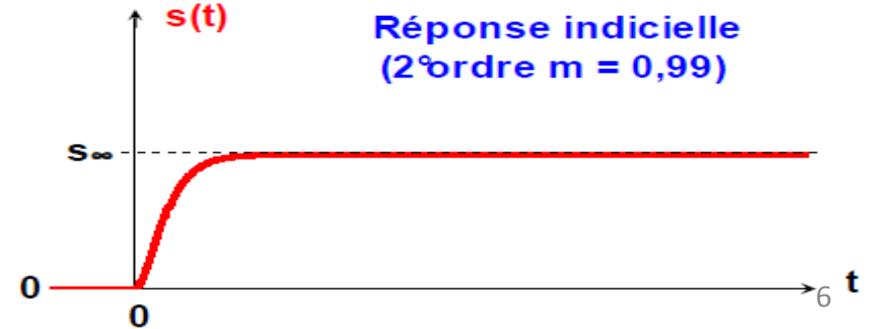
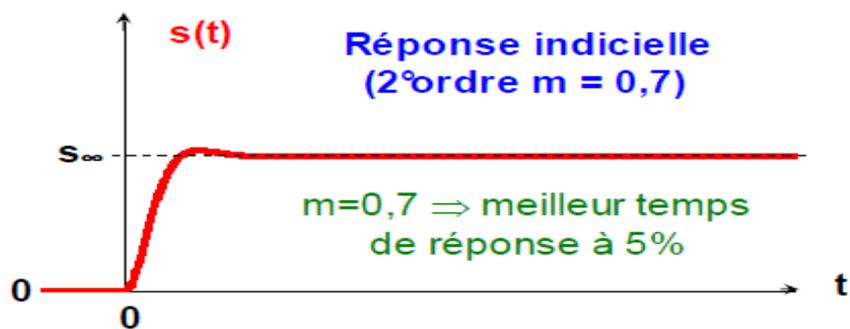
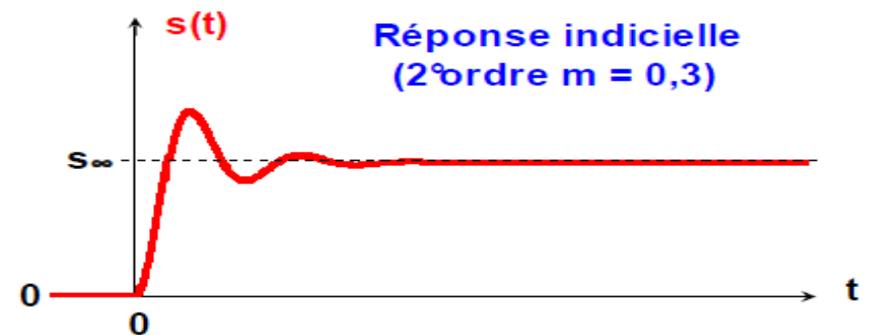
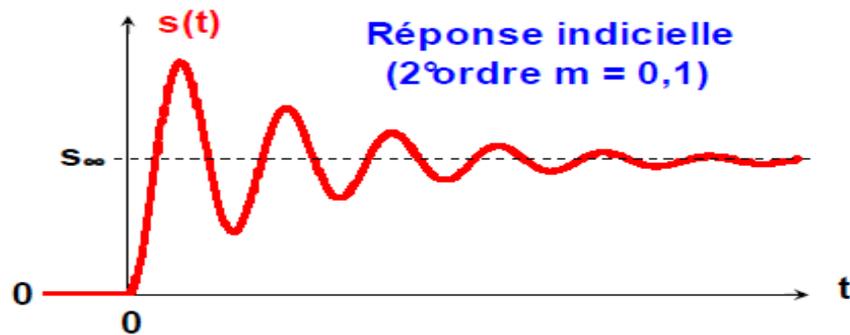
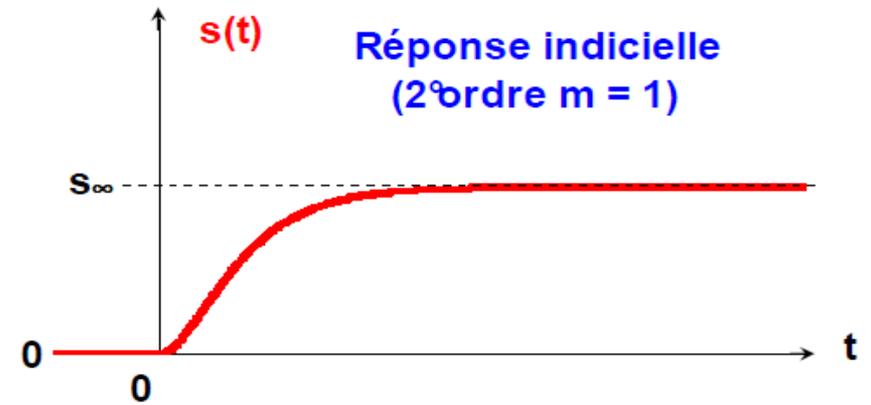
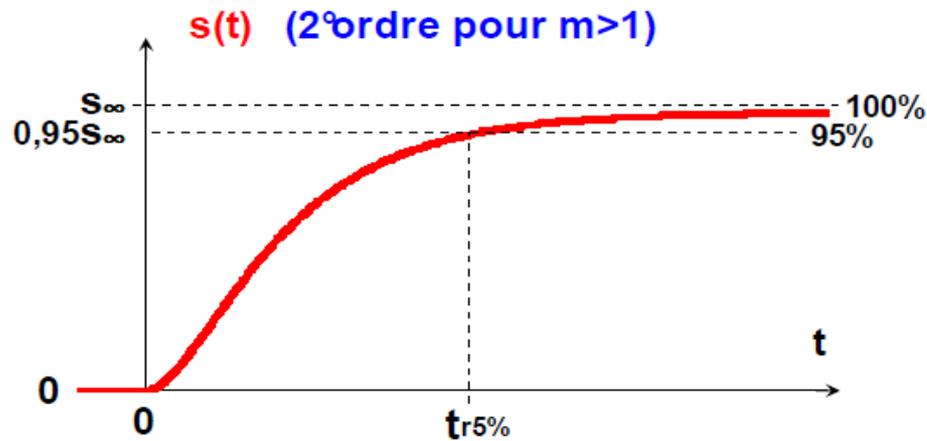
$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{s}(t) + 2m \frac{1}{\omega_0} \dot{s}(t) + s(t) = f(t)$$

- $\mathbf{f}(t)$ est proportionnel au signal d'entrée $\mathbf{e}(t)$ et on aura $\mathbf{f}(t) = \mathbf{s}(\infty)$ si le système est stable (plus de variations lorsque $t \rightarrow +\infty$).
- ω_0 est une constante qui caractérise la pulsation d'oscillation propre du système (pulsation propre).
- \mathbf{m} est une constante qui caractérise l'amortissement du système (coefficient d'amortissement $\mathbf{m} > 0$).

On rappelle que $\dot{s}(t)$ est la notation simplifiée de s' ou $\frac{ds}{dt}$ et que $\ddot{s}(t)$ est la notation

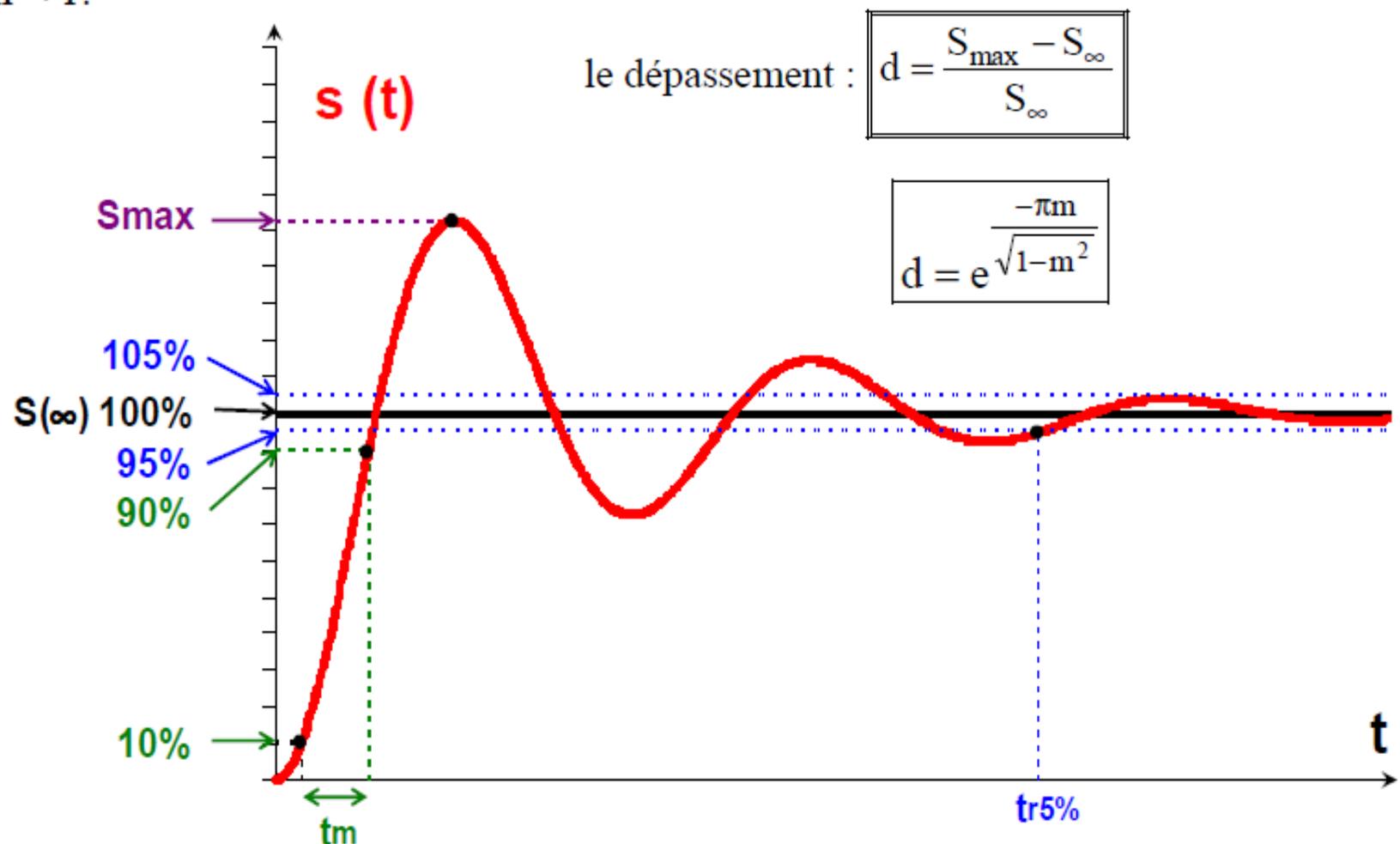
simplifiée de s'' ou $\frac{d^2s}{dt^2}$.

La solution générale de l'équation dépend de la valeur de m .



Propriétés de la courbe de réponse à un échelon (2° ordre avec $m < 1$)

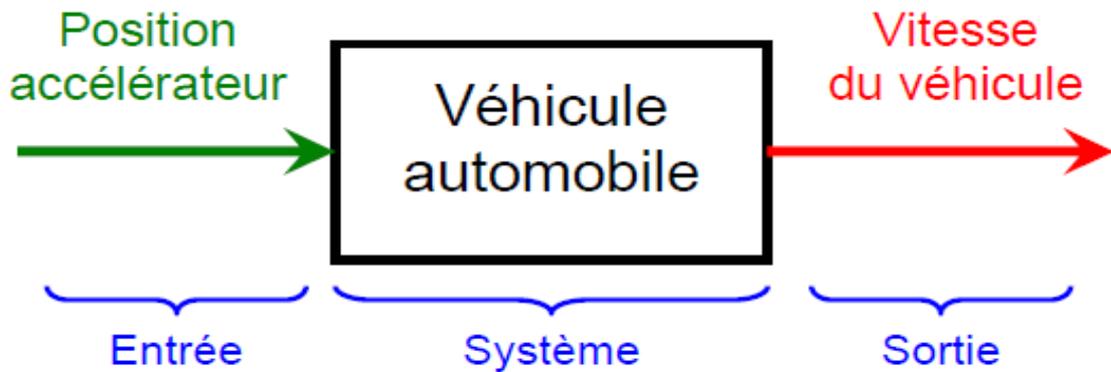
Le graphe ci-dessous représente la réponse à un échelon d'un système du 2° ordre avec $m < 1$.



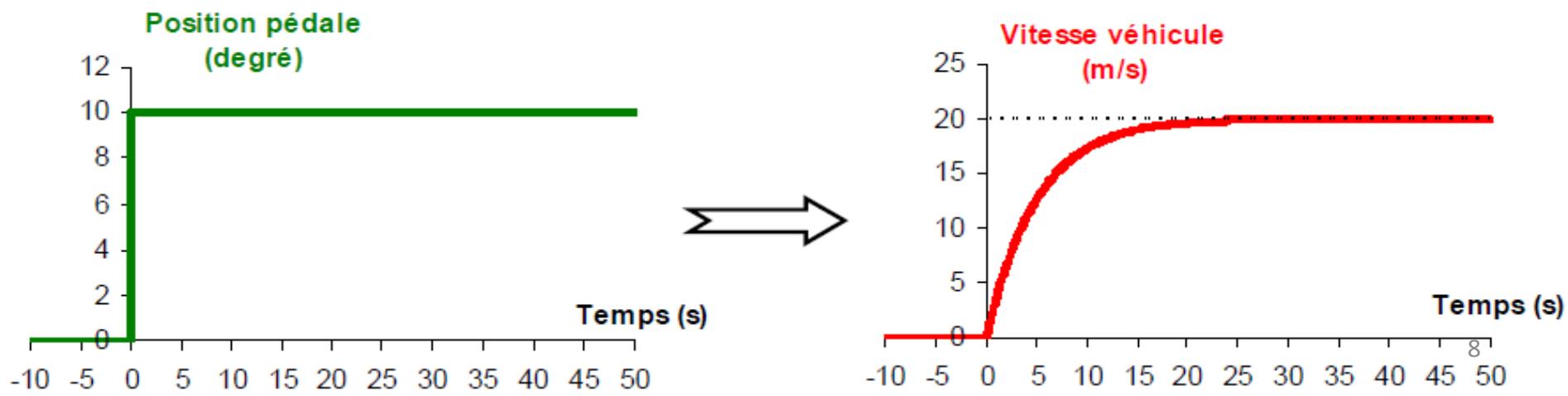
1- Exemple 1

Considérons le système constitué d'une automobile :

- l'entrée du système sera la position angulaire (en degré) de la pédale d'accélérateur,
- la sortie du système sera la vitesse du véhicule (en km/h).



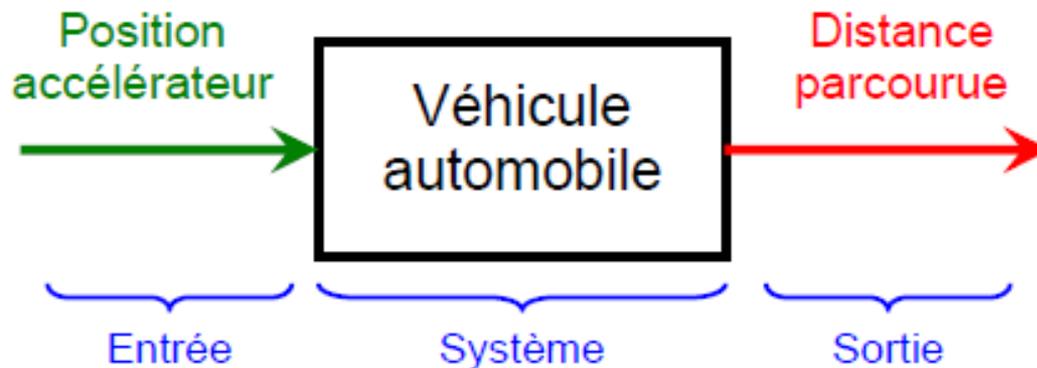
Observons l'évolution de la vitesse (sortie du système) lorsque le conducteur actionne brutalement la pédale d'accélérateur de 10° (entrée du système) :



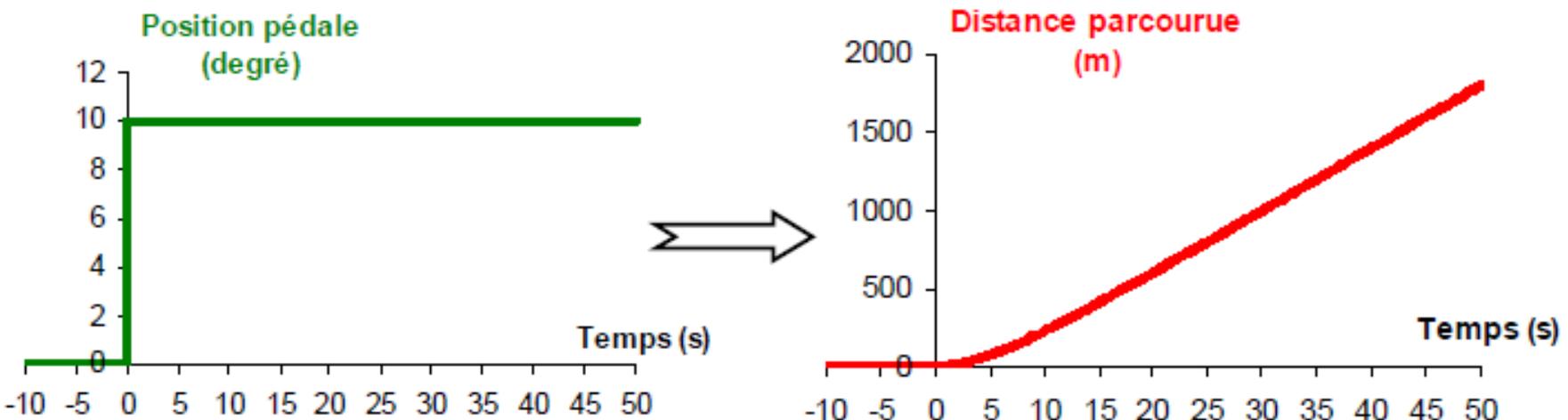
2- Exemple 2

Considérons toujours le système constitué d'une automobile :

- l'entrée du système sera la position angulaire, en degré, de la pédale d'accélérateur,
- la sortie du système est maintenant la distance parcourue par le véhicule.



Observons l'évolution de la distance parcourue (sortie du système) lorsque le conducteur actionne brutalement la pédale d'accélérateur de 10° (entrée du système) :

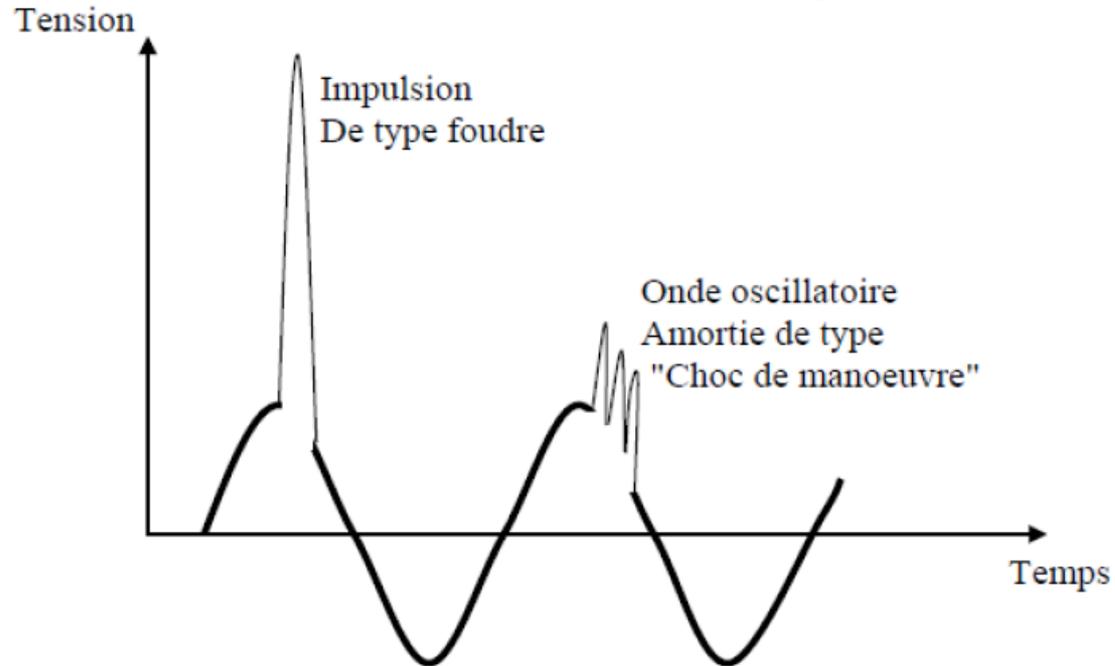


Chapitre 02: Généralités sur les surtensions électriques

Surtensions

On qualifie de surtension toute tension fonction du temps qui dépasse la tension crête de régime permanent à sa tolérance maximale.

On définit aussi une surtension comme une impulsion ou une onde de tension qui se superpose à la tension nominale du réseau. La figure ci-dessous montre un exemple de surtension:



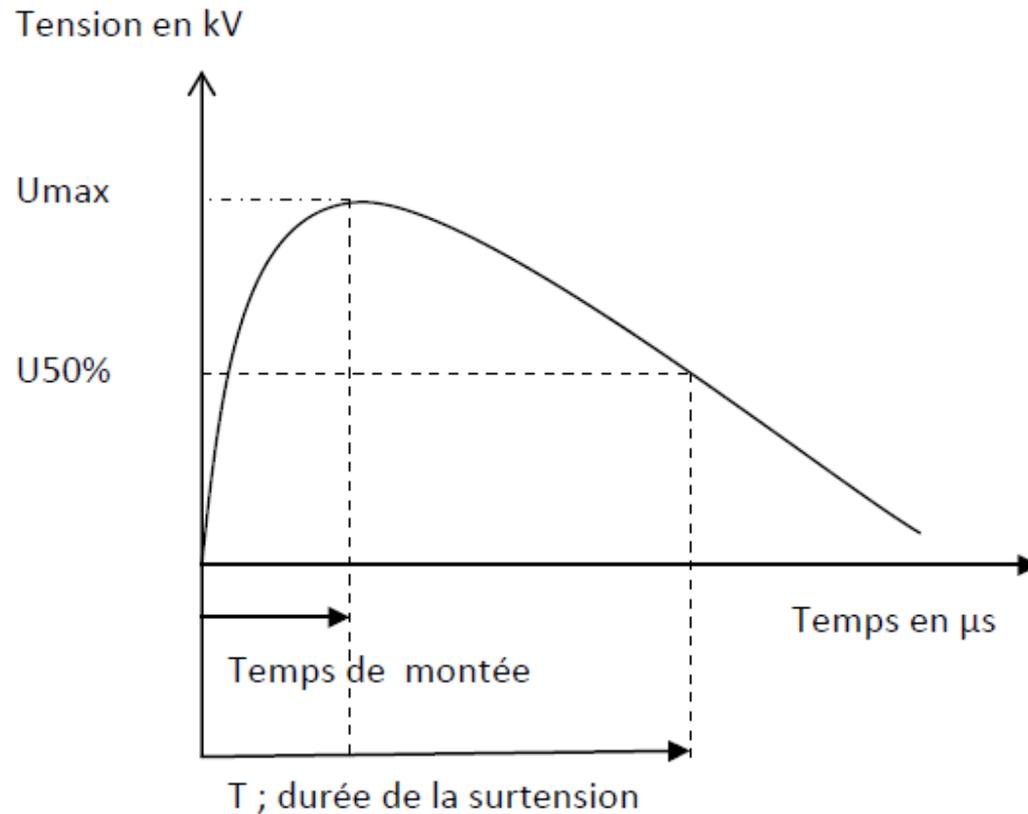
Sur cette courbe on voit deux types de surtensions caractérisées par une impulsion de type choc de foudre et une impulsion de type choc de manoeuvres.

Ce type de surtension est caractérisé par :

- Le temps de montée en (μs)
- Une pente S ($\text{kV}/\mu\text{s}$)

Caractéristiques d'une onde de surtension

Une surtension perturbe les équipements et produit un rayonnement électromagnétique. En plus, la durée de la surtension (T) cause un pic énergétique dans les circuits électriques qui est susceptible de détruire des équipements.



Classification des surtensions

Selon leur durée d'application, les surtensions sont classées :

- Les surtensions transitoires de durée inférieure à 0,1s en 50Hz comprenant les ondes de foudre et de manœuvres.
- Les surtensions temporaires de durée supérieure à 0,1s de nature périodique ou oscillatoire.

1. Les surtension temporaires:

Elles apparaissent lors de la modification brusque de la configuration du réseau ou lors d'un défaut à la terre. Les surtensions temporaires, ont une amplitude relativement non élevée ; elles sont de longue durée (quelques secondes) et de basse fréquence. En persistant sur le réseau pendant une période relativement longue. Parmi les causes on peut citer :

- Défauts entre phase et terre (déplacement du point du neutre);
- Déclenchement brusque d'une charge;
- Effet Ferranti provoqué par le fonctionnement à vide d'une ligne de grande longueur;
- Alimentation d'une charge capacitive au travers d'une impédance élevée ;
- Phénomène de ferrorésonance; etc.

2. Les surtensions transitoires

Les ondes transitoires sont caractérisées par les paramètres suivants :

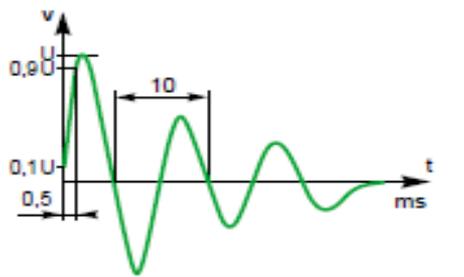
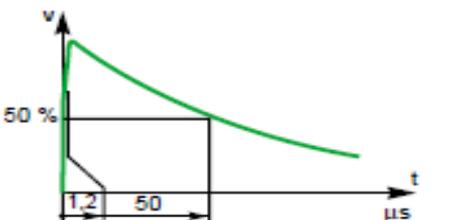
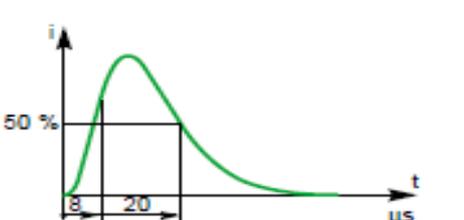
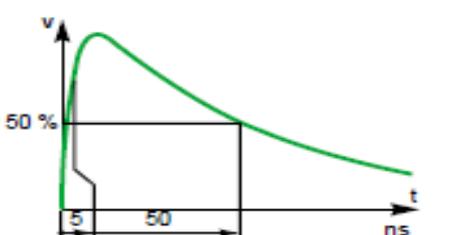
- Le temps de montée (T_{cr}) en μs ;
- La pente de montée mesurée en $kV/\mu s$ ou en $kA/\mu s$;
- La durée de la surtension (T_h) en μs correspondant à la descente à mi-amplitude.

Les surtensions transitoires sont classées en fonctions de leur origine en surtensions atmosphériques (foudre) et en ondes de manœuvres. Elles se superposent à la tension nominale.

2.1 Les surtensions de manœuvres

Les manœuvres d'interrupteurs ou de disjoncteurs entraînent des changements dans la configuration électrique des réseaux. Ces changements provoquent des surtensions plus ou moins élevées:

- Coupure des courants de ligne à vide, des câbles à vide ou de batteries de condensateurs;
- Coupure des faibles courants inductifs ou magnétisants (transformateurs à vide ou chargés par des inductances shunts);
- Mise sous tension des lignes;
- Rétablissement d'une ligne après défaut.

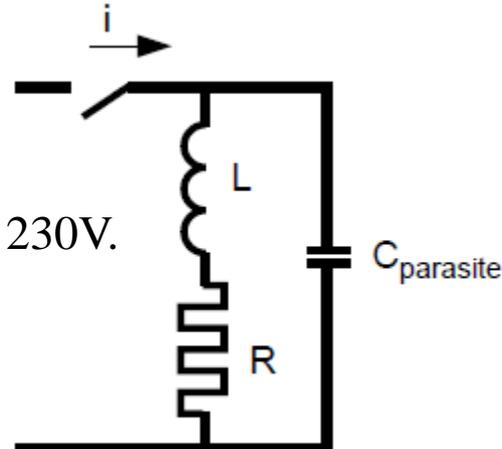
Origine	Type d'onde	Onde de test
■ manoeuvre	Onde longue amortie : 0,25 / 2,5 ms	a 
	Onde oscillatoire amortie récurrente : (100 kHz < f < 1 MHz)	b 
■ foudre	Onde de tension impulsionnelle récurrente : 1,2 / 50 μs	c 
	Onde de courant 8 / 20 μs	d 
■ appareillage BT, (ex. : fusion fusible)	Onde 5 / 50 ns	e 

Les principales formes d'ondes d'essai normalisées

Manœuvres de l'appareillage et fonctionnement des protections BT

Les bobines des relais et les contacteurs ont une impédance de caractère selfique, et interrompre un courant selfique provoque presque toujours des surtensions importantes. Dans le cas d'un relais, lorsque le courant est coupé brutalement par l'interrupteur K, l'énergie $1/2 LI^2$ se transforme en énergie $1/2 CV^2$ d'où une surtension :

$$\frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} LI^2 \rightarrow V = I \sqrt{\frac{L}{C}}$$

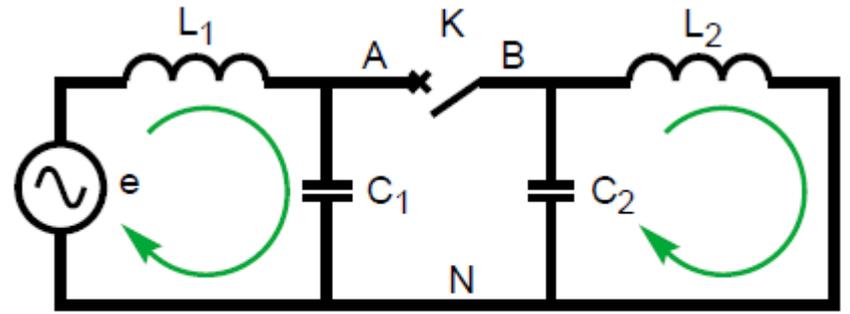


Les surtensions observées peuvent atteindre près de 10 kV sur un circuit 230V.

Sur le circuit monophasé de la , pris pour exemple, lorsqu'on ouvre l'interrupteur K, le courant continue à circuler dans L_2 avec, aux bornes de C_2 , la tension V_{BN} :

$$V_{BN} = i \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} \sin \omega_2 t$$

$$V_{AN} = i \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \sin \omega_1 t$$



L_1, C_1 = inductance et capacité du réseau amont, L_2, C_2 = inductance et capacité du réseau aval.¹⁵

2.2 Surtensions d'origine atmosphérique

Elles ont pour origine des décharges atmosphériques de foudre. Les surtensions engendrées se propagent guidées par la ligne avec des vitesses proches de la vitesse de la lumière.

Le courant de foudre peut s'écouler directement dans des circuits électriques provoquant des différences de potentiel en raison de l'impédance de ces derniers.

2.2.1 Le coup de foudre direct

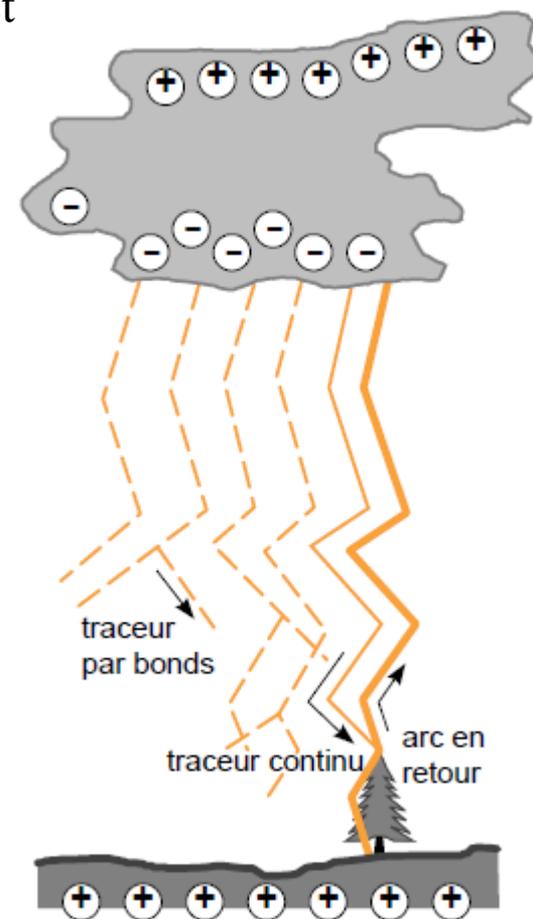
Dans le domaine de l'électrotechnique, le coup de foudre «direct» est celui qui atteint directement les installations électriques (lignes aériennes, postes, ...).

Son énergie est importante puisque 50 % des coups de foudre dépassent 25 kA crête et 1% sont au-delà de 180 kA.

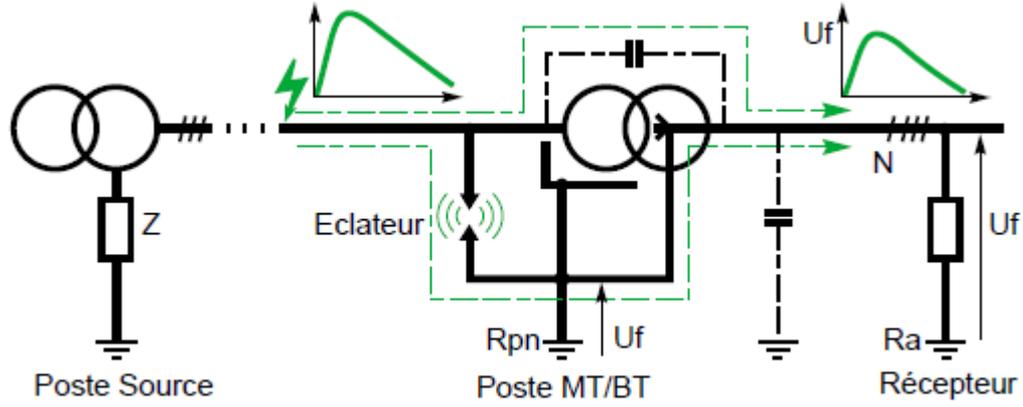
2.2.2 Le coup de foudre indirect

C'est la manifestation à distance d'un coup de foudre direct.

Ses effets sont ici abordés selon trois aspects : les surtensions conduites, l'élévation du potentiel de terre, et le rayonnement.



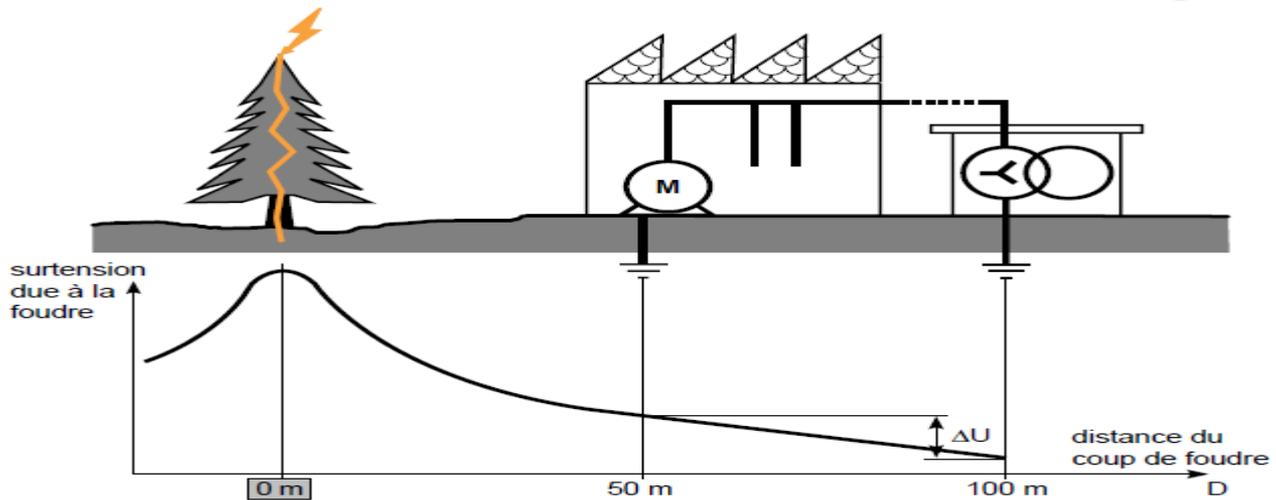
Surtensions conduites: font suite à un impact sur des lignes aériennes. Elles peuvent atteindre plusieurs centaines de kV. Si l'impact a lieu sur un réseau MT, la transmission par le transformateur à la BT se réalise par couplage capacitif.



Élévation du potentiel de terre : a lieu lorsque le courant de foudre est écoulé par le sol. Cette variation du potentiel de terre touche les installations lorsque l'impact de la foudre au sol est à proximité de leurs prises de terre. Ainsi à une distance donnée D du point d'impact de la foudre, le potentiel U s'exprime par l'équation:

$$U \approx 0,2 \cdot I \cdot \rho_s / D$$

I : courant de foudre,
 ρ_s : résistivité du sol.



transmission des surtensions à travers les transformateurs

Transfert magnétique

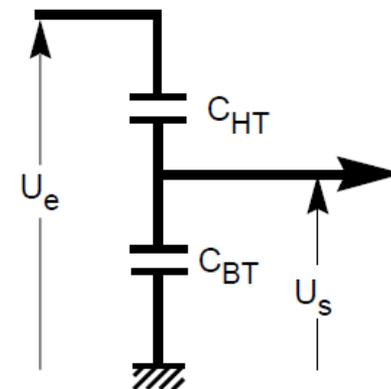
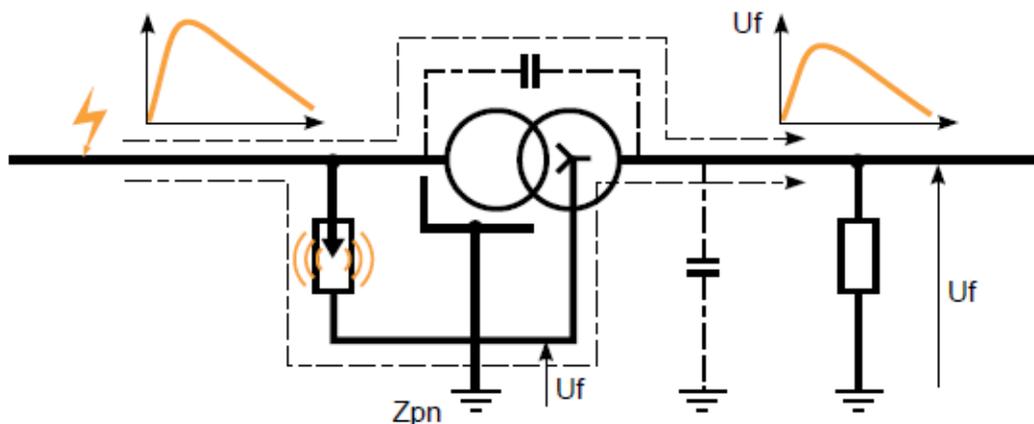
Pour un transformateur MT/BT, pas ou peu chargé, les surtensions de foudre et de manœuvre sont transmises au secondaire en fonction du rapport de transformation auquel on applique un coefficient correcteur. Ce coefficient est en général inférieur à 1,3 pour l'onde de foudre 1,2 / 50 μ s, et il ne dépasse que rarement 1,8 pour les surtensions de manœuvre selon l'onde 250 / 2500 μ s.

Transfert capacitif

Il dépend de la disposition des enroulements primaire et secondaire par rapport à la masse du transformateur. Généralement pour chaque « colonne » l'enroulement BT est proche du noyau et l'enroulement MT en est relativement éloigné puisque placé autour de l'enroulement BT.

La surtension transmise au secondaire, par les différentes « capacités parasites » du transformateur, se calcule par la formule :

$$U_s = U_e \frac{C_{BT / Masse}}{C_{HT / Masse} + C_{BT / Masse}}$$



Chapitre III: Régime transitoire des lignes électriques

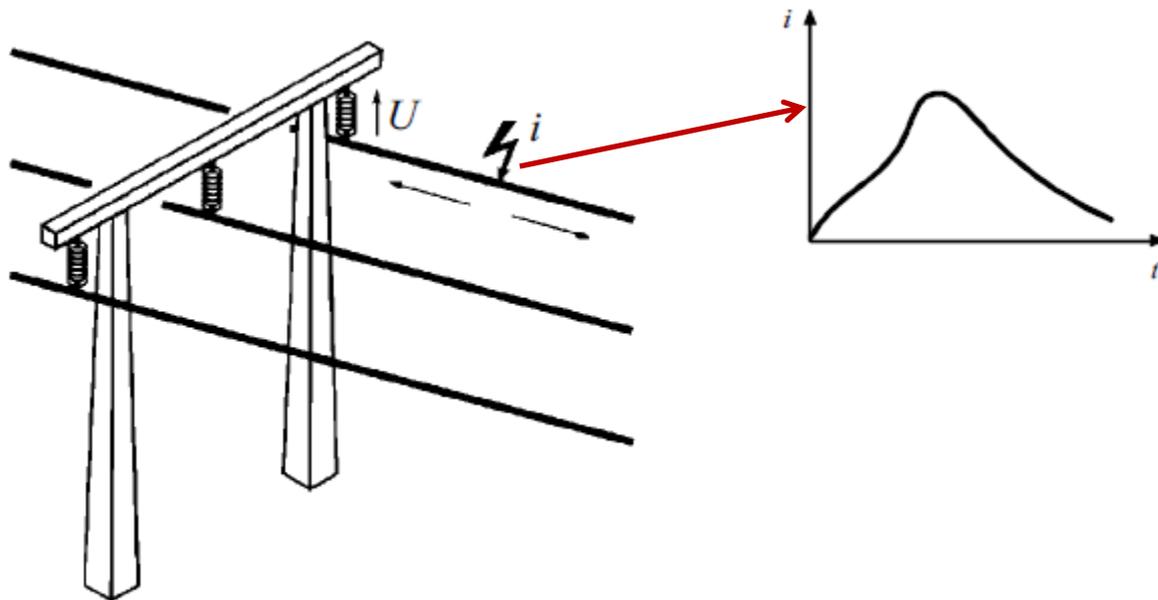
- **Propagation des phénomènes transitoires sur les lignes électriques.**
- **modélisation en régimes transitoires des lignes par la méthode de Laplace et la méthode des ondes mobiles.**

Introduction

Les phénomènes transitoires dans les réseaux électriques sont causés par les manœuvres, les défauts et les autres perturbations comme la foudre. Ils impliquent une gamme de fréquence de zéro à quelques MHz.

Lorsque la foudre tombe sur un conducteur de phase d'une ligne, le courant $i(t)$ se répartit par moitié de chaque côté du point d'impact et se propage le long des conducteurs. Ceux-ci présentent une impédance d'onde Z dont la valeur est comprise entre 300 et 500 Ω . Cette impédance est celle vue par le front d'onde, elle est indépendante de la longueur de la ligne et d'une nature différente de l'impédance à 50 Hz.

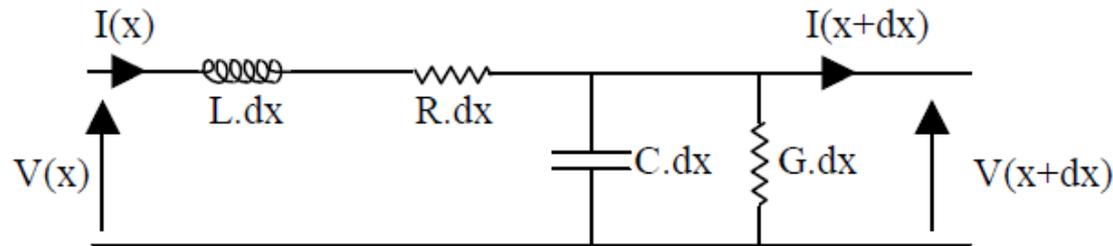
Il en résulte une onde de tension :
$$U(t) = Z \cdot \frac{i(t)}{2}$$



Pour étudier le comportement des lignes de transport d'énergie intégrées dans un réseau, nous allons considérer le modèle d'une ligne à constantes réparties. L'analyse transitoire, comme le comportement en régime permanent, doit être basée sur des équations aux dérivées partielles.

Modélisation du phénomène transitoire

La ligne ci dessous, de longueur l est donc découpée en éléments de longueur dx modélisés par des quadripôles constitués de 4 composants. L'inductance $L \cdot dx$ représente les effets magnétiques liés au passage du courant dans les conducteurs, la capacité $C \cdot dx$ modélise le condensateur composé des 2 conducteurs portés à des potentiels différents, la résistance $R \cdot dx$ représente les pertes par effet joule dans les conducteurs et enfin la conductance $G \cdot dx$ les pertes diélectriques. L , C , R , G sont définis par unité de longueur et sont les caractéristiques de la ligne.



L en H/m, C en F/m, R en Ω /m, G en Ω^{-1} /m

On a
$$V(x,t) = Ldx \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + RdxI(x,t) + V(x+dx,t)$$

d'où :
$$-\frac{V(x+dx,t) - V(x,t)}{dx} = L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + RI(x,t)$$

c'est à dire :
$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + RI(x,t) \tag{1}$$

et de même :
$$-\frac{\partial I}{\partial x} = C \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + GV(x,t) \quad (\text{au } 1^{\text{er}} \text{ ordre d'approximation}) \tag{2}$$

en dérivant la relation (1) par rapport à x on obtient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t \partial x} - R \frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$$

d'où en utilisant la relation (2) :

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial V}{\partial t} + RGV}$$

(Équation des télégraphistes)

On démontre de la même manière que :

$$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial I}{\partial t} + RGI}$$

a. Cas de la ligne sans perte :

Dans le cas de ligne sans perte, $R=G=0$, ce qui donne :

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0}$$

Cette équation est une équation de propagation dont la solution générale s'écrit :

$$V(x,t) = V^+(x-vt,0) + V^-(x+vt,0)$$

où $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la vitesse de propagation. V^+ est une onde de tension qui se propage vers les x croissants à

la vitesse v . En effet, si on se déplace suivant l'axe des x croissants à la vitesse v , on voit $x - vt$ constant, et

donc $V^+(x - vt)$ constant. De même V^- est une onde qui se propage vers les x décroissants à la vitesse v .

La forme de l'onde ne dépend que du générateur. Si le générateur produit une tension sinusoïdale, impulsionnelle ou autre, l'onde aura la même forme.

b. Cas de la ligne réelle

L'équation des télégraphistes admet également des ondes comme solutions générales. Leur forme dépend là aussi du générateur mais aussi des caractéristiques de la ligne. La forme de ces ondes va évoluer au fur et à mesure de leur propagation. Elles vont subir une atténuation et une déformation pendant leur propagation.

B. Régime sinusoïdal

On peut procéder de 2 manières pour traiter ce cas particulier de régime temporel.

i) en utilisant le calcul précédent

La tension aux bornes du générateur $v(t)=v_0\cos(\omega t+\varphi)$ s'écrit en utilisant les notations complexes:

$$V(t) = V_0 e^{j\omega t} \quad \text{où } V_0 \text{ est un nombre complexe, } V_0 = v_0 e^{j\varphi}$$

et la tension sur la ligne s'écrit $V(x,t) = V(x)e^{j\omega t}$ où $V(x)$ est l'amplitude complexe de la tension

Toute dérivée par rapport au temps d/dt se transforme en une multiplication par $j\omega$. L'équation des télégraphistes devient alors :

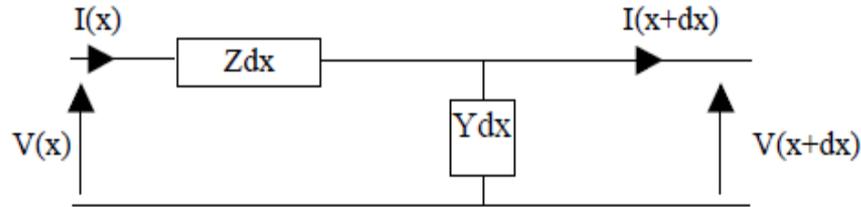
$$\frac{d^2V}{dx^2} = [-LC\omega^2 + j\omega(RC + LG) + RG]V(x)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = ZY V(x)} \quad \text{où } Z = R + jL\omega \quad \text{et } Y = G + jC\omega$$

et de la même manière :

$$\boxed{\frac{d^2I}{dx^2} = ZY I(x)}$$



L'application des lois de Kirchhoff nous donne :

$$V(x) = Zdx I(x) + V(x + dx) \text{ ce qui donne } \frac{dV}{dx} = -ZI(x, t) \quad (3)$$

et de la même manière :

$$I(x) = Ydx V(x) + I(x + dx) \text{ ce qui donne } \frac{dI}{dx} = -YV(x, t) \quad (4)$$

puis en dérivant (3) et en remplaçant dI/dx par (4) on trouve :

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = ZY V(x)} \quad \text{et de même} \quad \boxed{\frac{d^2I}{dx^2} = ZY I(x)}$$

Ces deux équations appelées équations des lignes, sont équivalentes en régime sinusoïdal à l'équation des télégraphistes.

C. Solutions générales en régime sinusoïdal

a. Cas général de la ligne avec pertes

On pose $\gamma = \sqrt{ZY}$

L'amplitude complexe de la tension et du courant s'écrivent :

$$V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

$$I(x) = I_1 e^{-\gamma x} + I_2 e^{\gamma x}$$

où V_1 , V_2 , I_1 et I_2 sont des constantes complexes qui dépendent des conditions aux limites c'est à dire du générateur et de la charge. Les constantes I_1 et I_2 sont reliées aux constantes V_1 et V_2 car le courant et la tension ne sont pas indépendants. Ils sont liés par les équations (3) et (4). En injectant l'expression de $I(x)$ dans l'équation (3) par exemple on trouve des relations entre les constantes V_1 , V_2 , I_1 et I_2 .

On trouve finalement les expressions suivantes que nous utiliserons partout dans la suite de ce cours :

$$\boxed{V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}} \quad \text{et} \quad \boxed{I(x) = \frac{1}{Z_0} [V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}]} \quad \text{où} \quad \boxed{\gamma = \sqrt{ZY}} \quad \text{et} \quad \boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}}$$

b. Interprétation physique

γ est complexe. On l'écrit sous la forme : $\gamma = \alpha + j\beta$ où α et β sont Réels. On a donc en réintroduisant le temps :

$$V(x,t) = V_1 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + V_2 e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} \quad \text{puis comme} \quad v(x,t) = \text{Reel}(V(x,t)) \quad \text{et} \quad V_1 = v_1 e^{j\phi_1} \quad \text{et} \quad V_2 = v_2 e^{j\phi_2}:$$

$$v(x,t) = v_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_1) + v_2 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_2) \quad \text{où} \quad v_1 \quad \text{et} \quad v_2 \quad \text{sont 2 constantes réelles}$$

et de la même manière :

$$i(x,t) = i_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi'_1) - i_2 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi'_2) \quad \text{où} \quad i_1 \quad \text{et} \quad i_2 \quad \text{sont 2 constantes réelles}$$

La tension $v(x,t)$ (et le courant $i(x,t)$) est la superposition de deux ondes. La première est une onde qui se propage vers les x croissants alors que la seconde se propage vers les x décroissants, mais toutes deux s'atténuent au cours de leur propagation d'un facteur $e^{\pm\alpha x}$. La première s'éloignant du générateur sera logiquement appelée "onde incidente", alors que la seconde revenant vers le générateur sera appelée "onde réfléchie".

γ est appelée la constante de propagation complexe, α est la constante d'atténuation et β est la constante de propagation.

Ces ondes se propagent avec une vitesse de phase v_ϕ :

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta}$$

Z_0 , quant à elle, est appelée **impédance caractéristique** de la ligne. Elle ne dépend que des caractéristiques électriques de la ligne. Elle est complexe dans le cas général d'une ligne avec pertes et varie avec la fréquence.

Remarque :

On peut remarquer que dans le cas où seule l'onde incidente se propage, c'est à dire dans le cas où V_2 est nulle, le rapport tension/courant vaut $V(x)/I(x)=Z_0$. Z_0 est donc l'impédance vue par l'onde incidente.

Si Z_0 est indépendante de la fréquence, le générateur, voit au moment de l'allumage une impédance égale à l'impédance caractéristique puisque seule l'onde incidente se propage sur la ligne, l'onde n'ayant pu atteindre la charge pour s'y réfléchir.

c. Cas particulier de la ligne sans perte

Dans le cas d'une ligne sans perte, $R=G=0$. On a alors :

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{jL\omega jC\omega} = j\omega\sqrt{LC}$$

donc la constante d'atténuation α est nulle : $\alpha=0$ et la constante de propagation $\beta = \omega\sqrt{LC}$

La tension (ou le courant) reste dans ce cas la superposition de deux ondes se propageant en sens inverse mais sans atténuation.

La relation de dispersion devient alors : $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ La vitesse de phase est dans ce cas indépendante de la fréquence (si L et C n'en dépendent pas). Les ondes se propagent alors sans distorsion.

De plus l'impédance caractéristique devient purement réelle : $Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$

d. Cas de la ligne avec faibles pertes

Dans le cas de la ligne possédant de faibles pertes, on a : $R \ll L\omega$ et $G \ll C\omega$

$$\text{d'où} \quad \gamma^2 = ZY = RG - LC\omega^2 + j\omega[RC + LG] \approx -LC\omega^2 + j\omega[RC + LG] = -LC\omega^2 \left[1 - \frac{j}{\omega} \left[\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right] \right]$$

$$\text{d'où} \quad \gamma \approx j\omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - \frac{j}{\omega} \left[\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right]} \approx j\omega\sqrt{LC} \left[1 - \frac{j}{2\omega} \left[\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right] \right] = \frac{\sqrt{LC}}{2} \left[\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right] + j\omega\sqrt{LC}$$

$$\text{d'où} \quad \alpha \approx \frac{\sqrt{LC}}{2} \left[\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right] \quad \text{et} \quad \beta \approx \omega\sqrt{LC}$$

On constate que la constante de propagation est identique à celle calculée dans le cas de la ligne sans perte. Comme dans le cas de la ligne sans perte, la vitesse de phase ne dépend pas de la fréquence :

$$v_{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e. Cas de la ligne sans distorsion

On a $\gamma^2 = RG - LC\omega^2 + j\omega(RC + LG)$

et si $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = k$ on a :

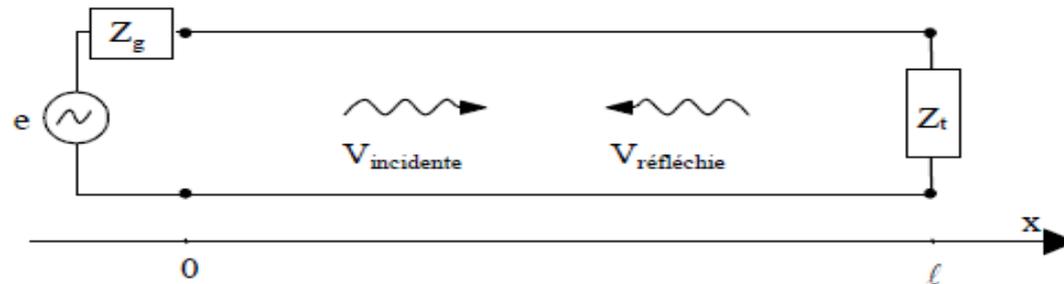
on a donc $\gamma = (k + j\omega)\sqrt{LC}$

d'où $\begin{cases} \alpha = k\sqrt{LC} \\ \beta = \omega\sqrt{LC} \end{cases}$ c'est à dire $v_{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Pourquoi sans distorsion?

Dans ce cas particulier, malgré les pertes supposées non négligeables, α et v_{φ} sont indépendants de la fréquence. Il n'y a donc pas de déformation du signal pendant sa propagation.

Coefficient de réflexion



On rappelle l'expression des ondes de tension et de courant qui se propagent sur la ligne :

$$V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0} [V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}] \quad \text{où } \gamma = \sqrt{ZY} \quad \text{et } Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

Afin de quantifier cette réflexion, on peut définir le coefficient de réflexion comme étant l'amplitude complexe de l'onde réfléchie rapportée à celle de l'onde incidente :

$$\Gamma = \frac{V_{\text{réfléchie}}}{V_{\text{incidente}}}$$

Ce coefficient de réflexion dépend bien sûr de la position sur la ligne.

$$\Gamma(x) = \frac{V_2 e^{\gamma x}}{V_1 e^{-\gamma x}}$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(x) = \frac{V_2}{V_1} e^{2\gamma x}$$

Le coefficient de réflexion est un nombre complexe. On le notera dans la suite :

$$\Gamma(x) = \rho(x) e^{j\theta(x)}$$

$$Z_l = \frac{V_{(l)}}{I_{(l)}} = Z_c \frac{V_{1(\omega)}e^{-\gamma l} + V_{2(\omega)}e^{+\gamma l}}{V_{1(\omega)}e^{-\gamma l} - V_{2(\omega)}e^{+\gamma l}} \Rightarrow Z_l = Z_c \frac{1 + \Gamma_{(l,\omega)}}{1 - \Gamma_{(l,\omega)}}, \text{ soit encore :}$$

$$\Gamma_{p(l,\omega)} = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c}$$

Pour une onde régressive de tension

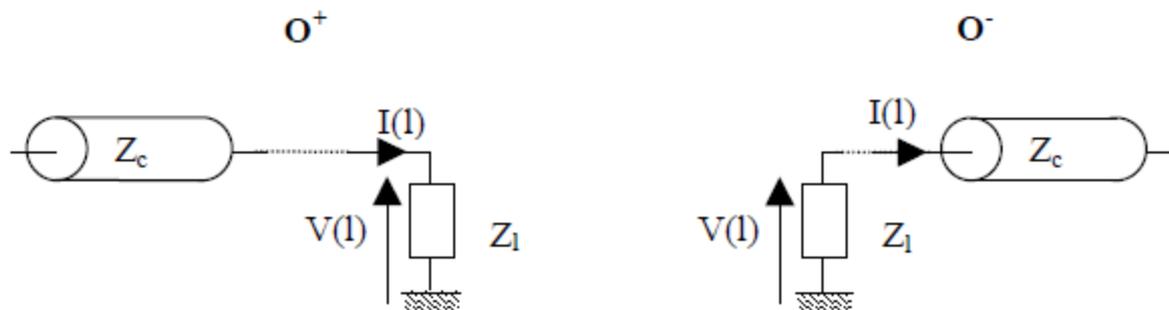
$$\Gamma_{r(x)} = \frac{V_1 e^{-\gamma x}}{V_2 e^{+\gamma x}} = \frac{V_1}{V_2} e^{-2\gamma x}$$

Au point $x=0$ on écrit $V_{(0)}/I_{(0)} = -Z_0$ d'où l'on tire :

$$\Gamma_{r(0,\omega)} = \frac{Z_0 - Z_c}{Z_0 + Z_c}$$

On en déduit la définition unique du coefficient de réflexion en tension :

$$(1-5) \quad \Gamma = \frac{Z_{charge} - Z_c}{Z_{charge} + Z_c}$$



Remarque : On pourrait montrer que le coefficient de réflexion en courant est égal à l'opposé du coefficient de réflexion en tension $\Gamma_i = -\Gamma_v$

1.3.2. Coefficient de transmission

Le coefficient de transmission est par définition le rapport entre la tension transmise à une charge (ou à une liaison entre deux lignes par exemple) et la tension incidente (se propageant vers la charge).

$$\text{Pour une onde progressive de tension on a : } T_{(x)} = \frac{V_{(x)}}{V_1 e^{-\gamma x}} = \frac{V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{+\gamma x}}{V_1 e^{-\gamma x}} = 1 + \Gamma_{p(x)}$$

$$\text{Pour une onde régressive de tension on a : } T_{(x)} = \frac{V_{(x)}}{V_2 e^{+\gamma x}} = \frac{V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{+\gamma x}}{V_2 e^{+\gamma x}} = 1 + \Gamma_{r(x)}$$

On en déduit la définition unique du coefficient de transmission en tension :

$$(1-6) \quad \boxed{T = 1 + \Gamma}$$

Remarque importante : On note que la tension transmise est égale à la tension incidente plus la tension réfléchie, et non moins.

On peut vérifier que cela n'est pas contradictoire avec le bon sens qui indique que la puissance transmise doit être égale à la puissance incidente moins la puissance réfléchie.

$$\text{Puissance incidente : } P_{inc} = kV_1^+ I_1^+ = \frac{k}{Z_c} V_1^{+2}$$

Puissance absorbée par la charge en $x=l$:

$$P_l = kV_l I_l = k(V_l^+ + V_l^-)(I_l^+ + I_l^-) = kV_l I_l = \frac{k}{Z_c} (V_l^+ + V_l^-)(V_l^+ - V_l^-) = \frac{k}{Z_c} (V_l^{+2} - V_l^{-2})$$

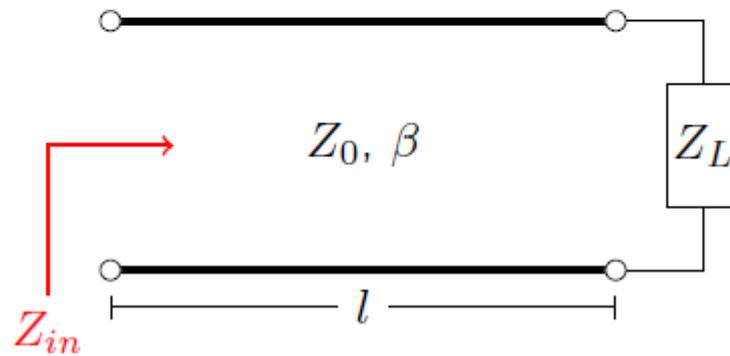
$$\text{comme } V_l^- = \Gamma_l V_l^+ \quad \text{on a} \quad P_l = \frac{k}{Z_c} V_l^{+2} (1 - \Gamma_l^2)$$

$$\text{Puissance réfléchie : } P_{ref} = P_{inc} - P_l = \frac{k}{Z_c} V_l^{+2} \Gamma_l^2 = P_{inc} \Gamma_l^2$$

L'impédance vue à l'entrée de la ligne de transmission :

Impédance de la ligne

$$Z_{in} = Z(-l) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}$$



$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}$$

- Équation très importante : la ligne transforme l'impédance de la charge.
- Plusieurs cas spéciaux :
 - Charge : circuit ouvert, court-circuit
 - Longueur : $\lambda/4$, $\lambda/2$, infinie