

Table des Matières

1	Corps des nombres complexes	2
1.1	Opérations algébriques sur les nombres complexes	2
1.1.1	Addition	2
1.1.2	Multiplication	3
1.2	Module et argument d'un nombre complexe	4
1.2.1	Module d'un nombre complexe	4
1.2.2	Argument d'un nombre complexe	4
1.3	Représentation géométrique d'un nombre complexe	5
1.4	Forme trigonométrique d'un nombre complexe	6
1.5	Forme exponentielle d'un nombre complexe	6
1.6	Formules d'Euler	7
1.7	Racines n-ième d'un nombre complexe	7
1.7.1	Racines carrées d'un nombre complexe	7
1.7.2	Racines n-ième	8
1.7.3	Formule de Moiver	9

Chapitre 1

Corps des nombres complexes

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}$

Si $i^2 = -1$ alors l'équation $x^2 + 1 = 0$ admet deux solutions i et $-i$.

1.1 Opérations algébriques sur les nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes noté par $\mathbb{C}$

$$\text{et } \mathbb{C} = \{z = x + i.y / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$$

Si $x \in \mathbb{R}$, $x = x + i.0$.

Et si $y \in \mathbb{R}^*$ on a $i.y = 0 + i.y \notin \mathbb{R}$.

Remarque 1 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 Si $z = x + iy$, la partie réelle de z noté $\text{Ré}(z) = x$ et la partie imaginaire noté $\text{Im}(z) = y$.

Si $z = x + i.y$ et $z' = x' + i.y'$,

1.1.1 Addition

$$z + z' = x + x' + i.(y + y')$$

1.1.2 Multiplication

$$\begin{aligned} z.z' &= (x + i.y) . (x' + i.y') \\ &= x.x' - y.y' + i . (x.y' + y.x') . \end{aligned}$$

$(\mathbb{C}, +, .)$ est un corps commutatif ou 0 est un élément neutre pour la loi (+) et 1 l'élément neutre pour (.).

Exemple 1

Exemple 2

Définition 1.1.2 Si $z = x + iy$, le conjugué de z noté $\bar{z}$ et $\bar{z} = x - iy$.

Proposition 1.1.1 Soient z et $z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

- 1) $\text{Ré}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$.
- 2) $\text{Ré}(z + z') = \text{Ré}(z) + \text{Ré}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z) + \text{Im}(z')$.
- 3) $\text{Ré}(\lambda z) = \lambda \text{Ré}(z)$ et $\text{Im}(\lambda z) = \lambda \text{Im}(z)$
- 4) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- 5) $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$
- 6) $\bar{\bar{z}} = z$.
- 7) Si $\bar{z} = z$ alors $z \in \mathbb{R}$.

Preuve. ■

Exemple 3 Simplifier le nombre complexe $z = \frac{3+5i}{(1-i)(2+3i)}$

Alors:

$$\begin{aligned} z &= \frac{3 + 5i}{(1 - i)(2 + 3i)} = \frac{(3 + 5i)(1 + i)(2 - 3i)}{(1 - i)(2 + 3i)(1 + i)(2 - 3i)} \\ &= \frac{(3 + 5i)(2 - 3i + 2i + 3)}{2 \cdot 13} = \frac{(3 + 5i)(5 - i)}{26} \\ &= \frac{(15 - 3i + 25i + 5)}{26} = \frac{20 + 22i}{26} = \frac{10}{13} + \frac{11i}{13}. \end{aligned}$$

1.2 Module et argument d'un nombre complexe

1.2.1 Module d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 1.2.1 Le module d'un nombre complexe z noté, $|z|$ avec $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

c'est à dire $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Proposition 1.2.1 Soient $z = x + i.y$ et $z' = x' + i.y'$,

1) $|z| = 0 \iff z = 0$.

2) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

3) $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$

4) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

5) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

6) $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$.

7) $\frac{z}{z'} = \frac{z \cdot \bar{z}'}{z' \cdot \bar{z}'} = \frac{z \cdot \bar{z}'}{|z'|^2}$

Preuve. ■

1.2.2 Argument d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 1.2.2 L'argument d'un nombre complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noté, $\arg z$ et

$$\text{Si } z \neq 0, \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}, \theta = \arg z.$$

Si $z = 0$, $\arg z$ n'existe pas.

Si θ est l'argument $z = x + i.y$ alors

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{c'est à dire } \begin{cases} x = |z| \cos \theta, \\ y = |z| \sin \theta. \end{cases}$$

Exemple 4 $z = 1 + i$ alors $|z| = \sqrt{2}$

$$\text{et } z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{donc } \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Proposition 1.2.2 Soient $z = x + i.y$ et $z' = x' + i.y' \neq 0$, $\theta = \arg z, \theta' = \arg z'$ alors

$$z.z' = |z| \cdot |z'| (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

$$\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Preuve. ■

Proposition 1.2.3 Soient $z = x + i.y$ et $z' = x' + i.y' \neq 0$, $\theta = \arg z, \theta' = \arg z'$ alors

$$\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} (\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')).$$

$$\arg \frac{z}{z'} = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Preuve. ■

Proposition 1.2.4 $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$ si z est non nul.

Preuve. ■

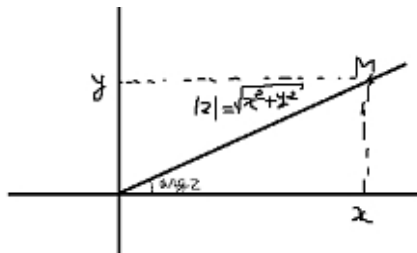
Proposition 1.2.5 Si $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ on a $\arg(z^n) = n \arg(z)$.

Preuve. ■

1.3 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Soient $z = x + i.y$ et $M(x, y)$ un point dans xy .

Le point M s'appelle l'image du nombre complexe z et z est dit l'affixe du point M .



$$\begin{cases} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}, \theta = \arg z.$$

1.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Si θ est l'argument $z = x + i.y$, alors

$$\begin{aligned} z &= x + i.y \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= |z| (\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

la forme $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$ s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe z .

$$\text{On remarque que } \begin{cases} x = |z| \cos \theta, \\ y = |z| \sin \theta. \end{cases}$$

Exemple 5 $z = 1 + i\sqrt{3}$ alors $|z| = 2$

$$\text{et } z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{donc } \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{donc } z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

1.5 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Il existe une relation entre la fonction exponentielle et le nombre complexe

$$\text{Si } z = |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) \text{ alors } z = |z| e^{i \arg z}.$$

C'est à dire

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

Et on remarque que

Si $z = x + i.y$ et $z' = x' + i.y' \neq 0$, $\theta = \arg z$, $\theta' = \arg z'$ alors

$$1) \bar{z} = |z| e^{-i\theta}.$$

$$2) z.z' = |z| |z'| e^{i(\theta+\theta')}$$

$$3) \frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} e^{i(\theta-\theta')}, z' \neq 0.$$

1.6 Formules d'Euler

Si $z = x + i.y \neq 0$ et $\theta = \arg z$, alors

$$\begin{cases} z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) & \text{Forme trigonométrique} \\ z = |z| e^{i\theta} & \text{Forme exponentielle} \end{cases}$$

$$\text{donc } \bar{z} = |z| (\cos \theta - i \sin \theta) = |z| e^{-i\theta}$$

on trouve les formules d'Euler suivantes

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

Exemple 6 Linéariser $\cos x \sin^2 x$.

$$\begin{aligned} \cos x \sin^2 x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{8} (e^{i3x} - e^{ix} - e^{-ix} + e^{-i3x}) \\ &= -\frac{1}{4} (\cos 3x - \cos x). \end{aligned}$$

1.7 Racines n-ième d'un nombre complexe

1.7.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe $z = x + iy$, on cherche les nombres α et β tels que:

$$(\alpha + i\beta)^2 = x + iy$$

d'où le système:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = x \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (équation entre les deux modules)} \\ 2\alpha\beta = y. \end{cases}$$

ce qui permet de définir α^2 et β^2 puis α, β en utilisant le signe entre α et β .

Exemple 7 Calculer les racines carrées de $z = 3 - 4i$.

On résout le système suivant:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ 2\alpha\beta = -4. \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2\alpha^2 = 8 \Rightarrow \alpha^2 = 4$$

$$\text{et } \beta^2 = 1 \text{ mais } \alpha\beta < 0$$

$$\text{d'où les racines sont} \quad : \quad z_1 = 2 - i \text{ et } z_2 = -2 + i .$$

1.7.2 Racines n-ième

Pour trouver l'ensemble des racines n-ièmes de $z \neq 0$, $z_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ avec $k = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Exemple 8 Trouver les racines cubiques de $z = 4\sqrt{2}(1 + i)$.

En effet:

1) La forme trigonométrique de z est :

$$\begin{aligned} z &= 4\sqrt{2}(1+i) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

2) Une racine n -ième de z est :

$$z_0 = (8)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

3) d'où les racines cubiques de z :

$$\begin{aligned} z_k &= z_0 \cdot u_k \\ &= 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{3}} \\ &= 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{avec } k = \{0, 1, 2\}.$$

Remarque 2 Quand on cherche à factoriser un polynôme réel P et qu'on a trouvé une racine imaginaire z , alors $\bar{z}$ est aussi une racine de P .

Exemple 9 Factoriser le polynôme: $P = z^3 - z^2 + z - 1$.

Comme $z_1 = i$ est une racine alors $z_2 = -i$ est aussi une racine et par suite par la méthode d'identification on trouve la troisième racine.

$$P = (z - i)(z + i)(z - 1).$$

1.7.3 Formule de Moivre

Pour calculer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et $\sin x$, on utilise la formule de Moivre:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Exemple 10

$$\cos 5x = \operatorname{Re}(e^{5ix}) \text{ et } \sin 5x = \operatorname{Im}(e^{5ix})$$

$$\text{donc} \quad : \quad (\cos x + i \sin x)^5$$

$$= \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x + i (5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x \\ \sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x \end{cases}.$$