

Chapitre 2

Intégrale impropres

2.1 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle non borné

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, x]$, pour tout x dans $[a, +\infty[$. On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Définition 2.1.1 On dit que f admet une intégrale impropre convergente sur $[a, +\infty[$ si $F(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt$$

Dans ce cas, on dit que f est semi-intégrable sur $[a, +\infty[$.

Exemple 2.1.2 Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, on a

$$\int_1^x f(t) dt = \frac{\ln x}{x} + 1 - \frac{1}{x}$$

c'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = 1$
donc l'intégrale impropre de f est convergente sur $[1, +\infty[$.

Remarque 2.1.3 Si la fonction $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable (au sens de Riemann) sur $[x, b]$, pour tout x dans $]-\infty, b]$, on dit qu'elle admet une intégrale impropre convergente (ou qu'elle est semi-intégrable) sur $]-\infty, b]$ si la fonction $F(x) = \int_x^b f(t) dt$ admet une limite quand x tend vers $-\infty$ et on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) dt = \int_{-\infty}^b f(t) dt$$

Remarque 2.1.4 Pour une fonction définie sur un intervalle ouvert $]-\infty, +\infty[$ et intégrable sur tout intervalle $[x, y]$, $-\infty < x < y < +\infty$, on dit que son intégrale impropre sur $]-\infty, +\infty[$ converge si, pour $-\infty < c < +\infty$, ses intégrales impropres sur $]-\infty, c]$ et $[c, +\infty[$ existent.

2.1.1 Intégrale impropre de fonctions positives

Proposition 2.1.5 Soient f et $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme $[a, \beta]$, $\forall \beta \in [a, +\infty[$. On suppose que $f \leq g$, alors

1) Si l'intégrale impropre de g est convergente sur $[a, +\infty[$, implique que l'intégrale impropre de f est convergente et on a

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt$$

2) Si l'intégrale impropre de f est divergente sur $[a, +\infty[$, implique que l'intégrale impropre de g est divergente.

Corollaire 2.1.6 Soient f et $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme $[a, \beta], \forall \beta \in [a, +\infty[$. On suppose qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que

$$c_1 f \leq g \leq c_2 f$$

Alors, l'intégrale impropre de f est convergente si et seulement si l'intégrale impropre de g est convergente.

Corollaire 2.1.7 Soient f et $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme $[a, \beta], \forall \beta \in [a, +\infty[$. On suppose qu'il existe $c \geq 0$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Alors, l'intégrale impropre de f sur $[a, +\infty[$ est convergente si et seulement si celle de g est convergente.

Exemple 2.1.8 $f(x) = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}, g(x) = \frac{1}{t^2}$ deux fonctions définies sur $[1, +\infty[$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

comme l'intégrale impropre de g sur $[1, +\infty[$ est convergente alors l'intégrale impropre de f sur $[1, +\infty[$ est convergente.

2.2 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle borné

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, x]$, pour tout x dans $[a, b[$. On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Définition 2.2.1 On dit que f admet une intégrale impropre convergente sur $]a, b[$ si $F(x)$ admet une limite lorsque x tend vers b et on note

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Dans ce cas, on dit que f est semi-intégrable sur $]a, b[$.

Exemple 2.2.2 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$ une fonction définie sur $]-1, 0[$, et on remarque que cette fonction est intégrable en sens Riemann sur $]-1, \alpha]$, $\forall \alpha \in]-1, 0[$, et $\int_{-1}^x f(t) dt = -2\sqrt{-x} + 2$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{-1}^x f(t) dt = 2$

donc f admet une intégrale impropre convergente sur $]-1, 0[$.

Remarque 2.2.3 Si la fonction $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable (au sens de Riemann) sur $[x, b]$, pour tout x dans $]a, b]$, on dit qu'elle admet une intégrale impropre convergente (ou qu'elle est semi-intégrable) sur $]a, b]$ si la fonction $F(x) = \int_x^b f(t) dt$ admet une limite quand x tend vers a et on note

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Remarque 2.2.4 Pour une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ et intégrable sur tout intervalle $[x, y]$, $a < x < y < b$, on dit que son intégrale impropre sur $]a, b[$ converge si, pour $a < c < b$, ses intégrales impropres sur $]a, c]$ et $[c, b[$ existent.

Exemple 2.2.5 L'intégrale impropre $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{1-t^2} dt$ est divergente car $\int_{-1}^0 \frac{1}{1-t^2} dt$ est divergente.

2.2.1 Intégrale absolument convergente

Définition 2.2.6 Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle de la forme $[a, \alpha]$, $\forall \alpha < b$. On dit que l'intégrale impropre de f est absolument convergente sur $[a, b[$ si l'intégrale impropre de $|f|$ est convergente sur $[a, b[$.

Exemple 2.2.7 L'intégrale impropre sur $]0, 1]$ de la fonction $f : x \rightarrow \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ est absolument convergente.

car

$$0 \leq \int_0^1 \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{et } \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 - 2\sqrt{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2.$$

Bibliography

Cours Mathématiques 3, 2 année LMD-Sciences et Techniques
Beddani Abdallah et Djebar Samir