# Chapitre II

## Les ensembles, les relations et les applications

vous connaissez déjà quelques ensembles :

- l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.
- l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, par exemple $1$, $\sqrt{2}$, $\pi$, $\ln(2)$,...
- l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Nous allons essayer de voir les propriétés des ensembles, sans s'attacher à un exemple particulier.
Vous vous apercevrez assez rapidement que ce qui est au moins aussi important que les ensembles, ce sont les relations entre ensembles : ce sera la notion d'application (ou fonction) entre deux ensembles.

# 1 Ensembles

## 1.1 Définir des ensembles

- On va définir informellement ce qu'est un ensemble : un ensemble est une collection d'éléments.

- Exemples :
$$\{0,1\}, \quad \{\text{rouge}, \text{noir}\}, \quad \{0,1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}.$$

- Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté $\varnothing$ qui est l'ensemble ne contenant aucun élément.

- On note
$$\boxed{x \in E}$$
si $x$ est un élément de $E$, et $x \notin E$ dans le cas contraire.

- Voici une autre façon de définir des ensembles : une collection d'éléments qui vérifient une propriété.

- Exemples :
$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < 1\right\}, \quad \left\{z \in \mathbb{C} \mid z^5 = 1\right\}, \quad \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\right\} = [0,1].$$

## 1.2 Inclusion, union, intersection, complémentaire

- L'inclusion. $E \subset F$ si tout élément de $E$ est aussi un élément de $F$. Autrement dit: $\forall x \in E\ (x \in F)$. On dit alors que $E$ est un sous-ensemble de $F$ ou une partie de $F$.

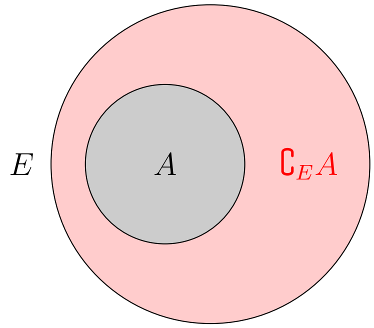
- L'égalité. $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

- Ensemble des parties de $E$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$. Par exemple si $E = \{1,2,3\}$ :
$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \left\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\right\}.$$

- Complémentaire. Si $A \subset E$,

$$\boxed{\complement_E A = \left\{x \in E \mid x \notin A\right\}}$$

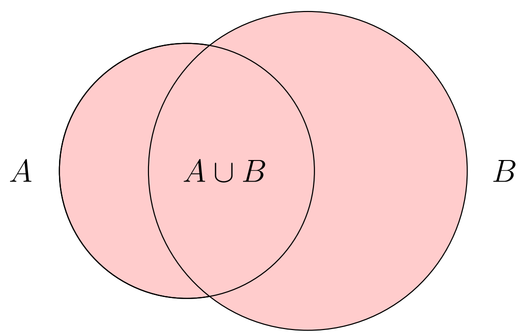
On le note aussi $E \setminus A$ et juste $\complement A$ s'il n'y a pas d'ambiguïté (et parfois aussi $A^c$ ou $\overline{A}$).




- union. Pour $A, B \subset E$,

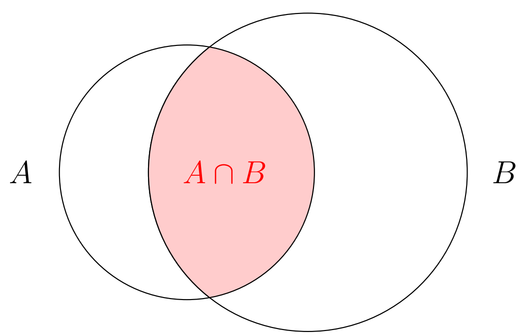
$$\boxed{A \cup B = \left\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\right\}}$$

Le *"ou"* n'est pas exclusif : $x$ peut appartenir à $A$ et à $B$ en même temps.




- intersection.

$$\boxed{A \cap B = \left\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\right\}}$$

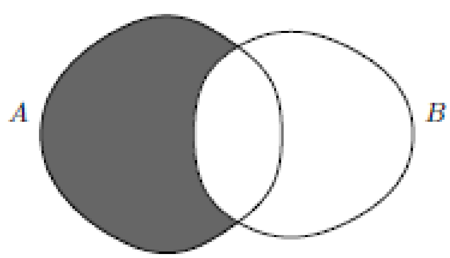


- L'ensemble fini On dit que l'ensemble $E$ est fini si nombre d'éléments de E est fini. Nombre d'éléments de $E$ s'appelle le cardinal de $E$ noté $\text{Card}(E)$

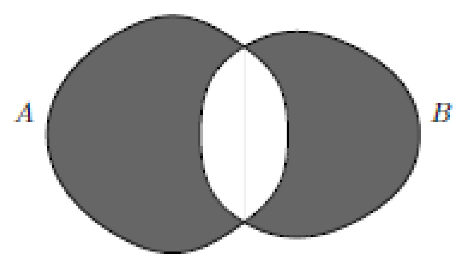
- Par exemple si $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$, donc $\text{Card}(E) = 6$
  $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini.
  $\text{Card}(\emptyset) = 0$

- $A \backslash B$ l'ensemble $\{x \in A \mid x \notin B\}$ et on l'appelle différence de $A$ et $B$.

- $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$ et on l'appelle différence symétrique $A$ et $B$.




$A \setminus B$




$A \Delta B$

**Proposition 1.1** *Soient $A, B, C$ des parties d'un ensemble $E$.*
- $A \cap B = B \cap A$ *et* $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité)*
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *et* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(associativité)*
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *et* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivité)*
- $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$ *et* $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$ *(loi de Morgan)*
- $\complement_E\left(\complement_E A\right) = A$

**Preuve 1.1** – *Preuve de* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ :

$x \in A \cap (B \cup C) \Longleftrightarrow x \in A$ *et* $x \in (B \cup C) \Longleftrightarrow x \in A$ *et* $(x \in B$ *ou* $x \in C)$
$\Longleftrightarrow (x \in A$ *et* $x \in B)$ *ou* $(x \in A$ *et* $x \in C\ ) \Longleftrightarrow (x \in A \cap B)$ *ou* $(x \in A \cap C)$
$\Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

– *Preuve de* $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ : $x \in \complement(A \cap B) \iff x \notin (A \cap B)$
$\iff \overline{\left(x \in A \cap B\right)} \iff \overline{\left(x \in A \text{ et } x \in B\right)}$
$\iff \overline{(x \in A)}$ *ou* $\overline{(x \in B)} \iff x \notin A$ *ou* $x \notin B \iff x \in \complement A \cup \complement B$.

### 1.3 Produit cartésien

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x, y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.

$$\boxed{E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}}$$

**Exemple 1.1** $E = \{1, 2\}$ *et* $F = \{3, 5\}$ *alors*
$E \times F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$
$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

## 2 Relations déquivalence-Relations dordre

### 2.1 Relations binaires

**Définition 2.1** *On appelle relation binaire, toute assertion entre deux objets, pouvant être vérifiée ou non. On note* $x\Re y$ *et on lit* $\ll x$ *est en relation avec* $y \gg$.

### 2.2 Relation déquivalence

**Définition 2.2** *Soit* $\Re$ *une relation binaire dans un ensemble* $E$ *et* $x, y, z$ *des eléments de* $E, \Re$ *est dite*
♣ *Réflexive si :* $\forall x \in E,\ x\Re x.$
♣ *Symétrique si :* $\forall x, y \in E,\ x\Re y \Longrightarrow y\Re x.$
♣ *Anti-symétriquesi :* $\forall x, y \in E,\ x\Re y$ *et* $y\Re x \Longrightarrow x = y.$
♣ *Transitive si* : $\forall x, y, z \in E,\ x\Re y$ *et* $y\Re z \Longrightarrow x\Re z$

### 2.3 Relation d'équivalence

On dit que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $E$ si elle est réflexive , symétrique et transitive.

**Classe d'équivalence**

Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur $E, a \in E$. On appelle classe d'équivalence de $a$ notée $\bar{a}, \dot{a}$ ou $cl(a)$, l'ensemble des éléments $y$ de $E$ qui sont en relation $\Re$ avec $a$. C'est à dire

$$\boxed{\bar{a} = \{y \in E,\ y\Re a\}}$$

**Ensemble quotient**

Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur $E$. On définit l'ensemble quotient de $E$ par la relation $\Re$ l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de $E$, noté et on a

$$\boxed{E/\Re = \{\bar{a},\ a \in E\}}$$

**Propriétés** Soit $E$ un ensemble et $\Re$ une relation d'équivalence dans $E$.
Soit $x$ un élément de $E$, alors
1. $x \in \bar{x}$.
2. $\forall\, x, y \in E \;\; x\Re y \Longleftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$.

**Exemple 2.1** *Dans $\mathbb{R}$, On définit la relation binaire $\Re$ par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

*1. Montrer que $\Re$ une relation d'équivalence.*
*2. Préciser la classe de $a$ pour tout $a$ de $\mathbb{R}$.*
*1) Montrons que $\Re$ une relation d'équivalence*
*a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x^2 = x - x = 0 \Longrightarrow x\Re x \Longrightarrow \Re$ est réflexive.*
*b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} x\Re y &\Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Longleftrightarrow -\left(y^2 - x^2\right) = -(y - x) \\ &\Longleftrightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Longleftrightarrow y\Re x \end{aligned}$$

*Donc $\Re$ est symétrique.*
*c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$*

$$x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \tag{2.1}$$

*et*

$$y\Re z \Longleftrightarrow y^2 - z^2 = y - z \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} (2.1) + (2.2) &\Longleftrightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \\ &\Longleftrightarrow x^2 - z^2 = x - z \\ &\Longleftrightarrow x\Re z. \end{aligned}$$

*Donc $\Re$ est transitive.*

*De a), b) et c), on a bien $\Re$ une relation d'équivalence.*

*2) Soit $a \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \{x \in \mathbb{R},\ x\Re a\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 - y^2 = x - y\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R},\ (x-a)(x+a) = x - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R},\ (x-a)(x+a-1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R},\ x = a \ ou\ x = 1 - a\} \\ &= \{a, 1-a\}\end{aligned}$$

## 2.4 Relation d'ordre

Une relation binaire $\Re$ dans un ensemble $E$ est dite relation d'ordre si elle est réflexive , antisymétrique et transitive.

**Ordre partiel, ordre total**

Soient $E$ un ensemble et $\Re$ une relation d'ordre dans $E$. On dit que $\Re$ est d'ordre total si

$$\forall\ \alpha, \beta \in E,\ \alpha\Re\beta \text{ ou } \beta\Re\alpha$$

Et on dit qu'elle est d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total, c'est à dire :

$$\exists\ \alpha, \beta \in E,\quad \text{ni } \alpha\not\Re\beta \ \text{ et } \ \text{ni } \beta\not\Re\alpha$$

**Exemple 2.2** *Soit $E = \{a, b, c\}$, on note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$. Dans $\mathcal{P}(E)$, on définit la relation binaire $\Re$ par*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A\Re B \Longleftrightarrow A \subset B$$

*1. Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.*

*2. Cet ordre est-il total?*

*1) Montrons que $\Re$ est une relation d'ordre*

*a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, alors il est clair que $A \subset A$, donc $A\Re A$, c'est àdire que $\Re$ est réflexive.*

*b) Soient* $A, B \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} A\Re B \text{ et } B\Re A &\Longleftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A \\ &\Longleftrightarrow A = B \end{aligned}$$

*Donc* $\Re$ *est antisymétrique.*
*c) Soient* $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} A\Re B \text{ et } B\Re C &\Longleftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset C \\ &\Longleftrightarrow A\Re C \end{aligned}$$

*Donc* $\Re$ *est transitive.*
*De a), b) et c) on a bien* $\Re$ *est une relation d'ordre.*
*2) On a* $E = \{a, b, c\}$*, donc* $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
*L'ordre de la relation est partiel car* $\exists\ A = \{a\} \in \mathcal{P}(E)$*,* $\exists\ B = \{b\} \in \mathcal{P}(E)$ *:*
$A \not\subseteq B$ *et* $B \not\subseteq A$

# 3 Applications

**Définition 3.1** *On appelle Fonctions d'un ensemble* $E$ *dans un ensemble* $F$*, toute correspondance* $f$ *entre les éléments de* $E$ *et ceux de* $F$*.*

**Domaine de définition de $f$ :** noté $D_f$ l'ensemble des éléments $x \in E$ fait correspondre un unique élément $y \in F$ noté $f(x)$.
$y = f(x)$ est appelé image de $x$ et $x$ est un antécédant de $y$.
$E$ est appelé ensemble de départ et $F$ l'ensemble d'arrivée de l'application $f$.
On écrit

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

**Définition 3.2** *L'application est une fonctions d'un ensemble* $E$ *dans un ensemble* $F$*, tel* $D_f = E$*.*

**Exemple 3.1**

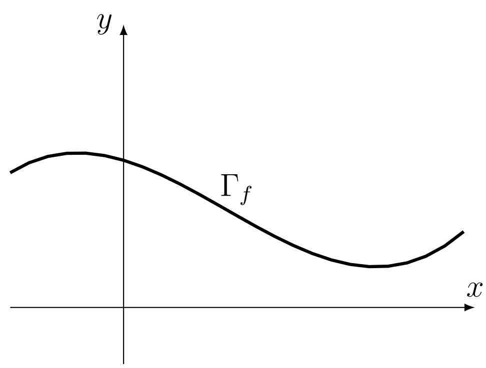
$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \frac{x}{x-1}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
g : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \frac{x}{x-1}
\end{aligned}
$$

*Dans cet exemple $g$ est une application mais $f$ est une fonction et n'est pas une application car l'élément $1$ n'a pas une image dans $\mathbb{R}$.*

- Égalité. Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.

- Le graphe de $f : E \to F$ est

$$\boxed{\Gamma_f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) \in E \times F \mid x \in E \Big\}}$$




- Composition. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G
\end{tikzcd}
$$

- L'identité, $Id_E : E \to E$ est simplement définie par $x \mapsto x$ et sera très utile dans la suite.

**Exemple 3.2**

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & ]0,+\infty[ \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}, \qquad g \;:\; \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}.$$

*Alors* $g \circ f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ *vérifie pour tout* $x \in ]0,+\infty[$ *:*

$$g \circ f(x) = g\Big(f(x)\Big) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1-x}{1+x} = -g(x).$$

**Exemple 3.3** *Etant données les applications*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad\qquad g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longrightarrow x^2 \qquad\qquad x \longrightarrow x^3$$

*alors*

$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad\qquad f \circ g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longrightarrow \left(x^2\right)^3 = x^6 \qquad\qquad x \longrightarrow \left(x^3\right)^2 = x^6$$

*Il est claire que* $f \circ g \neq g \circ f$

## 3.1 Restriction et prolongement dune application

**Définition 3.3** *Etant donnée une application* $f : E \longrightarrow F$*.*
*1. On appelle restriction de* $f$ *à un sous ensemble non vide* $X$ *de* $E$*, l'application* $g : X \longrightarrow F$ *telle que*

$$\forall x \in X, \quad g(x) = f(x)$$

*On note* $g = f_{/X}$
*2. Etant donné un ensemble* $G$ *tel que* $E \subset G$*, on appelle prolongement de l'application* $f$ *à l'ensemble* $G$*, toute application* $h$ *de* $G$ *dans* $F$ *telle que* $f$ *est la restriction de* $h$ *à* $E$*. D'après cette définition,* $f$ *est un prolongement de* $f_{/X}$ *à* $E$*.*

**Exemple 3.4** *Etant donnée l'application*

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

*alors*

$$g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \ln|x| \qquad\qquad x \longrightarrow \ln(2|x| - x)$$

*sont deux prolongements différents de $f$ à $\mathbb{R}^*$.*

## 3.2 Applications injectives, surjectives, bijectives

**Définition 3.4** *Soit $E$, $F$ deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que :*
*$f$ est injective* $\Longleftrightarrow \forall x_1,\ x_2 \in E,\ (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
*En prenant la contrapposée de l'implication, dans la deuxième proposition de cette équivalence, on obtient*

♣ *$f$ est injective* $\Longleftrightarrow \forall\, x_1,\ x_2 \in E,\ (f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)$

♣ *$f$ est surjective* $\Longleftrightarrow \forall\, y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$

*$f$ est bejective si elle injective et surjective. Autrement dit :*

♣ *$f$ est bejective* $\Longleftrightarrow \forall\, y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x)$

$\exists!\, x \in E$ *( le quantificateur existentiel suivi d'un point d'exclamation ) signifie : il existe un unique $x$ appartenant à $E$*

**Exemple 3.5** *La application*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

*Non injective car $f(1) = f(-1) \Longrightarrow 1 = -1$ est fausse*
*La application*

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 3x$$

*est injective car $g(x_1) = g(x_2) \Longrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$*
*La application $g$ est surjective car $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists\, x = \dfrac{y}{3} \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$ donc $g$ est bijective car $g$ est surjective et injective.*

**Proposition 3.1** *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors on a*
*1) $g \circ f$ est injective $\Longrightarrow f$ est injective.*
*2) $g \circ f$ est surjective $\Longrightarrow g$ est surjective.*
*3) $g \circ f$ est bijective $\Longrightarrow f$ est injective et $g$ est surjective.*

**Preuve 3.1** *On suppose que $g \circ f$ est injective et on montre que $f$ est injective.*
*Soient $x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2)$ qui est dans $F$.*
*On compose par $g$ aux deux membres de l'égalité, on obtient*

$$\begin{aligned} g(f(x_1)) = g(f(x_2)) &\Longrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ car } g \circ f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

*Ce qui montre que $f$ est injective.*
*2) On suppose que $g \circ f$ est surjective et on montre que $g$ est surjective.*

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ surjective } &\Longrightarrow \forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in E : z = g(f(x)) \end{aligned}$$

*En posant $y = f(x) \in F$ alors $\forall z \in G, \exists y \in F : z = g(y)$, ce qui montre que $g$ est surjective.*
*3) $g \circ f$ est bijective $\Longleftrightarrow \begin{cases} g \circ f \text{ est injective} \\ g \circ f \text{ est surjective} \end{cases} \Rightarrow f$ est injective et $g$ est surjective.*

## 3.3 Applications réciproques

**Définition 3.5** *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors il existe une application notée $f^{-1}$ définie par $f^{-1} : F \longrightarrow E$*

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

*appelée application réciproque de $f$.*

**Exemple 3.6** *On considère l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \backslash \{2\} &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow \frac{x+5}{x-2} \end{aligned}$$

*avec $F$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$.*
*Déterminer $F$ pour que l'application $f$ soit bijective et donner l'application inverse de $f$.*

*Montrer que $f$ est bijective revient à examiner l'existence de solution de l'équation $y = f(x)$, pour tout $y \in F$. Soit $y \in F$, alors*

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Longleftrightarrow y = \frac{x+5}{x-2} \\ &\Longleftrightarrow y(x-2) = x+5 \\ &\Longleftrightarrow yx - x = 5 + 2y \\ &\Longleftrightarrow x(y-1) = 5 + 2y \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{5+2y}{y-1} \quad \textit{si } y \neq 1 \end{aligned}$$

*ce qui montre que :*

$$\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \exists! x = \frac{5+2y}{y-1}; \quad y = f(x)$$

*pour montrer que $f$ est bijective, il reste à voir si $x = \dfrac{5+2y}{y-1} \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$? On a:*

$$\frac{5+2y}{y-1} = 2 \Longleftrightarrow 5 + 2y = 2(y-1) \Longleftrightarrow 5 = -2$$

*ce qui est impossible ce qui montre que $\dfrac{5+2y}{y-1} \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, par suite :*

$$\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \exists! x = \frac{5+2y}{y-1} \in \mathbb{R}\backslash\{2\}; \quad y = f(x)$$

*donc $f$ est bijective si $F = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et l'inverse de $f$ est :*

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{1\} &\longrightarrow \quad \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ y &\longrightarrow \quad \frac{5+2y}{y-1} \end{aligned}$$

**Théorème 3.1** *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors son application réciproque $f^{-1}$ vérifie $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$. On rappelle*

$$\begin{aligned} Id_E : E &\longrightarrow \quad E \\ x &\longmapsto \quad Id_E(x) = x \end{aligned}$$

**Proposition 3.2** *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors on a*
*a) $f$ et $g$ sont injectives $\Longrightarrow g \circ f$ est injective.*

*b) $f$ et $g$ sont surjectives $\Longrightarrow g \circ f$ est surjective.*
*c) $f$ et $g$ sont bijectives $\Longrightarrow g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

**Preuve 3.2** *a) On suppose que $f$ et $g$ sont injectives et on montre que $g \circ f$ est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$, alors on a*

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\Longrightarrow g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \\ &\Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{ car } g \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ car } f \text{ est injective.}\end{aligned}$$

*Ce qui montre que l'application $g \circ f$ est injective.*
*b) On suppose que $f$ et $g$ sont surjectives et on montre que $g \circ f$ l'est aussi.*
*Soit $z \in G \Longrightarrow \exists y \in F : z = g(y)$ car $g$ est surjective $y \in F \Longrightarrow \exists x \in E : y = f(x)$ car $f$ est surjective. Donc, on obtient $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.*
*Ce qui montre que l'application $g \circ f$ est surjective.*
*c) On suppose que $f$ et $g$ sont bijjectives, donc $f$ et $g$ sont surjectives et $f$ et $g$ sont injectives. D'après a) et b) on déduit que $g \circ f$ est injective et est surjective, c'est à dire $g \circ f$ est bijective.*
*Montrons que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ D'après b), pour $z \in G, z = g(y), y = f(x)$ et $z = (g \circ f)(x)$, comme $f, g$ et $g \circ f$ sont bijectives, alors $y = g^{-1}(z), x = f^{-1}(y)$ et $x = (g \circ f)^{-1}(z)$, par suite*

$$\forall z \in G, \quad (g \circ f)^{-1}(z) = x = f^{-1}(y) = f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(z)$$

*donc:* $\quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

**Remarque 3.1** *1. Les graphes d'une application bijective $f$ et de son inverse $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.*
*2. Notons que si $f$ est bijective alors $f^{-1}$ est aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

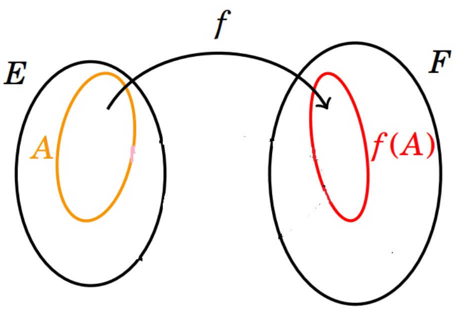
## 3.4 Image directe, image réciproque

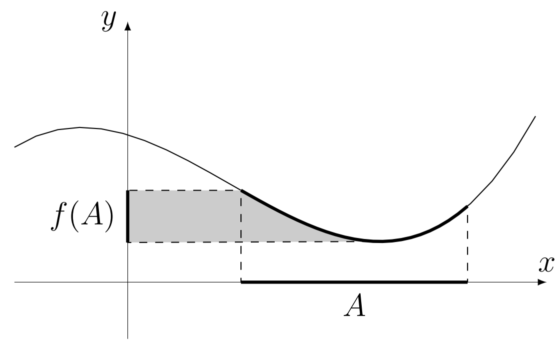
Soient $E, F$ deux ensembles.

**Définition 3.6** *Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$, l'image directe de $A$ par $f$ est l'ensemble*

$$\boxed{f(A) = \left\{f(x) \mid x \in A\right\}}$$

$$y \in f\,(A) \Longleftrightarrow \exists\, x \in A,\ y = f(x)$$

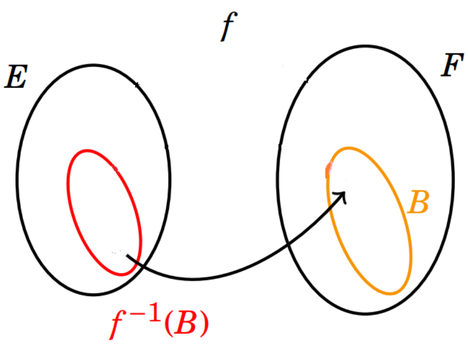


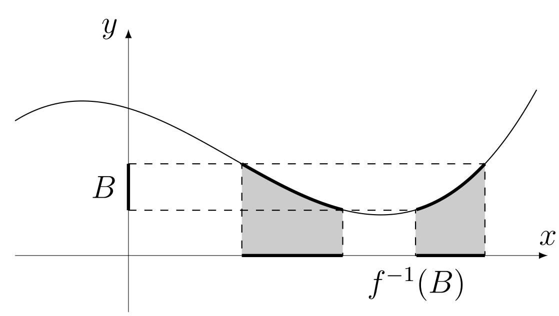




**Définition 3.7** *Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$, l'image réciproque de $B$ par $f$ est l'ensemble*

$$\boxed{f^{-1}(B) = \Big\{x \in E \mid f(x) \in B\Big\}}$$

$$x \in f^{-1}\,(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$$




**Exemple 3.7** *Soit*

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longmapsto \quad f(x) = x^2 \end{aligned}$$

*et $A = [-2, 1]$. On a*

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x), x \in A\} \\ &= \Big\{x^2, x \in [-2, 1]\Big\} \\ &= [0, 4] \end{aligned}$$

**Exemple 3.8** *Soit*

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

*et* $B = [0,4]$. *On a*

$$\begin{aligned} f^{-1}([0,4]) &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0,4]\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 \in [0,4]\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x^2 \leq 4\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \leq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x-2)(x+2) \leq 0\} \\ &= [-2,2] \end{aligned}$$

**Proposition 3.3** *Soient* $f : E \longrightarrow F, A, B \subset E$ *et* $M, N \subset F$, *alors*

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ *(l'autre inclusion est vraie si* $f$ *est injective).*
3. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$
4. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$
5. $f^{-1}\left(\complement_E M\right) = \complement_E f^{-1}(M)$

**Preuve 3.3** *1. Soit* $y \in F$, *alors*

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Longleftrightarrow \exists x \in (A \cup B)\,; y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow [\exists x \in A \vee \exists x \in B]\,;\ y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow [(\exists x \in A;\ y = f(x)) \vee (\exists x \in B;\ y = f(x))] \\ &\Longleftrightarrow [y \in f(A)] \vee [y \in f(B)] \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

*ce qui montre que* $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
*2. Soit* $y \in F$, *alors*

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x \in (A \cap B\,); y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow [\exists x \in A \wedge \exists x \in B]\,;\ y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow [(\exists x \in A;\ y = f(x)) \wedge (\exists x \in B;\ y = f(x))] \\ &\Longrightarrow [y \in f(A)] \wedge [y \in f(B)] \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

*ce qui montre que* $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
*Supposons que* $f$ *est injective et montrons la deuxième inclusion.*

*Soit* $y \in (f(A) \cap f(B))$

$$\begin{aligned} y \in (f(A) \cap f(B)) &\Longrightarrow y \in f(A) \;\; et\; y \in f(B) \\ &\Longrightarrow [\exists x_1 \in A : y = f(x_1)] \;\; et \;\; [\exists x_2 \in B : y = f(x_2)] \end{aligned}$$

*Donc* $y = f(x_1) = f(x_2)$ *et* $f$ *est injective, ce qui implique que* $x_1 = x_2 = x$. *Donc* $x \in (A \cap B)$ *et* $y = f(x)$, *c'est à dire* $y \in f(A \cap B)$

*3. Soit* $x \in E$, *alors*

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M \cup N) &\Longleftrightarrow f(x) \in M \cup N \\ &\Longleftrightarrow (f(x) \in M) \vee (f(x) \in N) \\ &\Longleftrightarrow \Big(x \in f^{-1}(M)\Big) \vee \Big(x \in f^{-1}(N)\Big) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N) \end{aligned}$$

*ce qui montre que* $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.

*4. Soit* $x \in E$, *alors*

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M \cap N) &\Longleftrightarrow f(x) \in M \cap N \\ &\Longleftrightarrow (f(x) \in M) \wedge (f(x) \in N) \\ &\Longleftrightarrow \Big(x \in f^{-1}(M)\Big) \wedge \Big(x \in f^{-1}(N)\Big) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \end{aligned}$$

*ce qui montre que* $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$

*5. Soit* $x \in E$, *alors*

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\complement_F M\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \complement_F M \\ &\Longleftrightarrow (f(x) \in F) \wedge (f(x) \notin M) \\ &\Longleftrightarrow (x \in E) \wedge \Big(x \notin f^{-1}(M)\Big) \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E f^{-1}(M) \end{aligned}$$

*ce qui montre que* $f^{-1}\Big(\complement_F\Big) = \complement_E f^{-1}(M)$