Université de Relizane **2022-2023**

1^{er} année: Mathématiques et Informatique **Algèbre I**

TD 1

Notions de logique

Exercice 1

1) Soient P , Q, et R trois assertions, vérifier en dressant la table de vérité :
a) $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, b) $\overline{(P \Longrightarrow Q)} \Longleftrightarrow P \wedge \overline{Q}$.
2) Soient les assertions suivantes :
a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0;$
b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0;$
c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0;$
d)$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x.$
Les assertions a, b, c, d, sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes:
1) f est majorée; 2) f est bornée; 3) f est paire; 4) f ne s'annule jamais; 5) f est périodique; 6) f est croissante; 7) f n'est pas la fonction nulle; 8) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$, 8) f est inférieure à g.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Quelle différence de sens ont les deux assertions proposées :
a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ et $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.

Exercice 4

Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer.
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{R}$
1) n premier $\Longrightarrow n = 2$ ou n est impair,
2) $x \neq y \Longrightarrow (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$.
3) $(x \neq -1$ et $y \neq -1) \Longrightarrow (a + b + ab \neq -1)$

Exercice 5

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que soit 4 divise n^2 , soit 4 divise $n^2 - 1$.
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$, $n^2 \leq 2^n$.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 6