1.1 Espaces topologiques

Définition 1.1.1. Une **topologie** sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X, *i.e.* $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, vérifiant les propriétés suivantes, appelées **axiomes des ouverts.**

(O1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$.

(O2) Si $U, V \in \mathcal{T}$, alors $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(O3) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X appartenant à $\mathcal{T}$, alors $\underset{i\in I}{\cup} U_i \in \mathcal{T}$.

L'ensemble X, muni de la topologie $\mathcal{T}$, est appelé **espace topologique**. On notera quelquefois $(X, \mathcal{T})$ un tel espace. Les parties de X qui appartiennent à $\mathcal{T}$ sont dites **parties ouvertes** ou **ouverts** de X. Les éléments de X sont généralement appelés **points**.

– La partie vide $\emptyset$ et l'ensemble X sont des ouverts.

– L'intersection de deux ouverts est un ouvert.

– La réunion de toute famille d'ouverts est un ouvert.

Définition 1.1.2. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. On dit que A est un **fermé** ou partie fermée de X si le complémentaire de A dans X est ouvert. Autrement dit, si l'on a $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Construction d'une topologie à partir des axiomes des fermés. La famille $\mathcal{F}$ des fermés d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ vérifie les propriétés suivantes, appelées **axiomes des fermés.**

(F1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$, *i.e.* la partie vide $\emptyset$ et l'ensemble X sont des fermés.

(F2) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$, *i.e.* la réunion de deux fermés est un fermé.

(F3) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X appartenant à $\mathcal{F}$, alors $\underset{i\in I}{\cap} A_i \in \mathcal{F}$, *i.e.* l'intersection de toute famille de fermés est un fermé.

Exemple 1.1.1. 1. Soit X un ensemble. Alors $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X, appelée **topologie discrète**. Un ensemble muni de la topologie discrète est dit **espace discret**. Dans un tel espace toute partie est à fois ouverte et fermée.
A l'autre extrême, $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X, appelée **topologie grossière** ou **triviale.** Le seul intérêt de ces deux topologies est de donner des contre-exemples et montrer que certains phénomènes pathologiques peuvent arriver en topologie.

2. Soit $X = \{x, y\}$ un ensemble à deux éléments. Alors les topologies sur X sont
$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}, \ \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{x\}, X\}, \ \mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{y\}, X\}, \ \mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, X\}.$$

3. Soit $X = \{x, y, z\}$ un ensemble à trois éléments. Alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, X\}$ est une topologie sur X, par contre $\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, X\}$ n'est pas une topologie sur X.

4. Soit X un ensemble, alors $\mathcal{T}_{cf} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \ ; \ X \setminus U \text{ est fini}\}$ est une topologie sur X, appelée **topologie cofinie**. Si l'ensemble X est fini, alors la topologie cofinie coïncide avec la topologie discrète. Si l'ensemble X est infini, alors deux ouverts quelconques non vides dans $(X, \mathcal{T}_{cf})$ ont une intersection non vide.

Définition 1.1.3. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{B}$ est une **base d'ouverts** de X ou **base de la topologie** $\mathcal{T}$ si tout ouvert non vide de X est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.

Tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$ possède au moins une base d'ouverts, à savoir $\mathcal{T}$ elle-même. La notion de base d'ouverts n'est bien sûr intéressante que lorsque $\mathcal{B}$ est plus petit que $\mathcal{T}$. Comme on le verra, dans de nombreux cas, il est en effet possible de se limiter à des raisonnements sur les éléments d'une base au lieu de manipuler la totalité des ouverts. Notons aussi qu'en général il n'y a pas unicité de la base d'ouverts.

Exemple 1.1.2. Si X est un espace discret, alors $\mathcal{B} = \{\{x\} \ ; \ x \in X\}$ est une base d'ouverts de X.

Proposition 1.1.1. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.

(ii) Pour tout $U \in \mathcal{T}$ et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient U un ouvert de X et $x \in U$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, alors il existe une famille $(B_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $U = \underset{j\in J}{\cup} B_j$. Par conséquent, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert non vide de X. Par hypothèse, pour tout $x \in U$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset U$. Donc on a $U = \underset{x\in U}{\cup}\{x\} \subset \underset{x\in U}{\cup} B_x \subset U$, d'où $U = \underset{x\in U}{\cup} B_x$, avec $B_x \in \mathcal{B}$ pour tout $x \in U$. Donc $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X. ■

Remarque 1.1.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, A un sous-ensemble de X et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X. Alors A est un ouvert de X si et seulement si pour tout $x \in A$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset A$.

Construction d'une topologie à partir d'une base d'ouverts. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une base de la topologie $\mathcal{T}$. Alors $\mathcal{B}$ possède les deux propriétés suivantes.

(B1) Pour tout $x \in X$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U$.

(B2) Pour tout $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ et tout $x \in U_1 \cap U_2$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

Réciproquement, si X est un ensemble et si $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant (**B1**) et (**B2**), alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. En effet, il suffit de prendre :

$$\mathcal{T} = \big\{\emptyset\big\} \cup \big\{U \subset X \ ; \ U \text{ soit réunion d'ensembles appartenant à } \mathcal{B}\big\}.$$

Autrement dit, un sous-ensemble U de X est un ouvert pour $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

Exemple 1.1.3.

1. **Topologie de l'ordre.** Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, et soit $\mathcal{B}$ la partie de $\mathcal{P}(X)$ constituée des intervalles ouverts, des demi-droites ouvertes et de X, voir Appendice A. Alors $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (**B1**) et (**B2**). Par conséquent, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. La topologie $\mathcal{T}$ est appelée la **topologie de l'ordre**. Un sous-ensemble U de X est un ouvert pour $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

2. **La droite réelle.** Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle est totalement ordonné. La topologique de l'ordre sur $\mathbb{R}$ est appelée la **topologie euclidienne ou usuelle** de $\mathbb{R}$. Le corps $\mathbb{R}$ muni de cette topologie est appelé la

droite réelle. Dans la suite, sauf la mention de contraire, $\mathbb{R}$ sera muni de sa topologie usuelle. Notons que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, les ensembles $]-\infty, a[$, $]a, b[$ et $]b, +\infty[$ sont, par définition, des ouverts de $\mathbb{R}$, d'où $]-\infty, a]$, $[a, b]$ et $[b, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$. Notons aussi qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ est un ouvert si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$. Autrement dit, les intervalles ouverts $]a, b[$ forment aussi une base d'ouverts pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

3. **La droite réelle achevée.** Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ l'ensemble qui est la réunion de $\mathbb{R}$ et de deux nouveaux éléments distincts notés $-\infty$ et $+\infty$ et appelés points à l'infini. On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{R}$ en convenant que tout $x \in \mathbb{R}$ vérifie $-\infty < x < +\infty$. Alors $\overline{\mathbb{R}}$ muni de cette relation d'ordre est totalement ordonné et la topologie de l'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée la **topologie usuelle** de $\overline{\mathbb{R}}$, et $\overline{\mathbb{R}}$ muni de cette topologie est appelé la **droite réelle achevée**. Une partie U de $\overline{\mathbb{R}}$ est ouverte si

   i) pour tout $x \in U \cap \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$;

   ii) lorsque $-\infty \in U$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[-\infty, \alpha[\subset U$;

   iii) lorsque $+\infty \in U$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $]\beta, +\infty] \subset U$.

   Notons que pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles $[-\infty, a[$ et $]a, +\infty]$ sont des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$ et que $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}^{\dagger}$.

Définition 1.1.4. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un **voisinage** de x s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$. Plus généralement, soit A une partie de X, on appelle **voisinage** de A toute partie V de X telle qu'il existe un ouvert U de X vérifiant $A \subset U \subset V$.

Exemple 1.1.4.

1. Si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle, un sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ est un voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$. Par exemple, $]x-\frac{1}{2}, x+1] \cup \{5\}$ est un voisinage de x.

2. Si $\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la topologie usuelle, un sous-ensemble V de $\overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage du point $-\infty$ s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[-\infty, \alpha[\subset V$. De même, un sous-ensemble W de $\overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage du point $+\infty$ s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $]\beta, +\infty] \subset W$.

Proposition 1.1.2. *Pour qu'une partie d'un espace topologique X soit un ouvert il faut et il suffit qu'elle soit voisinage de chacun de ses points. En particulier, pour connaître la topologie de X, il suffit de connaître les voisinages de tous les points de X.*

Démonstration. Il résulte immédiatement de la définition que tout ouvert de X est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, soit V une partie de X qui est voisinage de chacun de ses points. Alors pour tout $x \in V$, il existe un ouvert U_x de X contenant x et contenu dans V. Donc on a $V = \bigcup_{x \in V} U_x$. C'est une réunion d'ouverts, donc un ouvert. ■