



**Université
Hassiba Benbouali, Chlef**
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

Domaine : Sciences et Techniques
Filière : Génie mécanique

3^{ème} Année Licence
Génie Mécanique Energétique

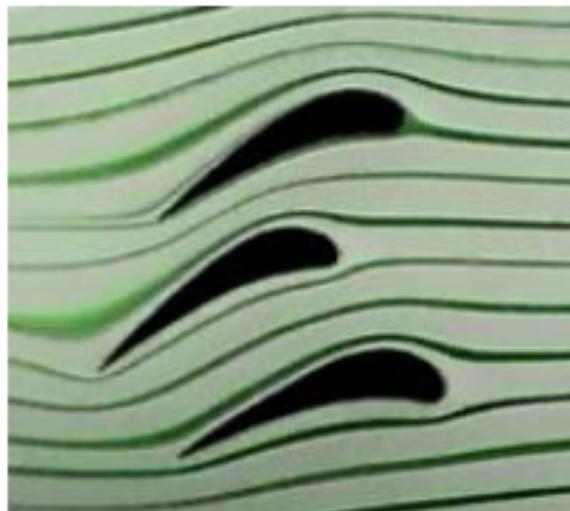
Polycopié de la matière :

MECANIQUE DES FLUIDES II

Cours & Exercices corrigés

Fait par :

Docteur M'hamed BERIACHE
Maître de Conférences « A »



2019

Avant-propos

Le présent polycopié est dédié au programme de la mécanique des fluides II destinée aux étudiants de 3ème année licence relevant du domaine sciences et techniques. Il couvre plusieurs spécialités, particulièrement le génie mécanique, l'hydraulique et génie civil, l'aéronautique, le génie maritime, le génie climatique et plusieurs d'autres. Son contenu consiste en trois chapitres traitant la cinématique des fluides, la théorie de la couche limite et l'analyse dimensionnelle et similitude.

Ce polycopié est conforme aux programmes ministériels de la mécanique des fluides II enseignés pour les étudiants de 3ème année licence génie mécanique énergétique.

Chaque chapitre du polycopié est développé en cours détaillé couvrant tous les éléments du canevas de formation ministériel suivi d'un nombre d'exercices bien sélectionnés et corrigés.

Les cours ainsi que les exercices sélectionnés et améliorés sont tirés des grands ouvrages de références, cités en bibliographie, portent sur des applications diverses de la mécanique des fluides en relation directe avec les cours enseignés.

La rédaction de ce polycopié est le fruit de lecture de nombreux ouvrages classiques et quelques documents électroniques, tous disponibles à la bibliothèque ainsi que sur le net. J'espère que ce polycopié constituera un support utile pour nos étudiants ainsi que nos collègues enseignants.

Les critiques, les suggestions et les avis des collègues, des étudiants et des intéressés par ce cours me seront précieux pour l'amélioration de la qualité de notre enseignement.

M'hamed BERIACHE

Chlef, le 17 janvier 2019

Table des matières

Chapitre 1 : Cinématique des fluides

1.1.	Introduction	01
1.2.	Rappels mathématiques	01
1.2.1.	Champs scalaires et vectoriels	01
1.2.1.1.	Scalaire	01
1.2.1.2.	Champ scalaire	01
1.2.1.3.	Vecteur	01
1.2.1.4.	Champ de vecteur	01
1.2.2.	Champ d'écoulement	02
1.2.3.	Les opérateurs mathématiques	02
1.2.3.1.	L'opérateur Nabla	02
1.2.3.2.	Le gradient	02
1.2.3.3.	Le divergent	03
1.2.3.4.	Le rotationnel	03
1.2.3.5.	Le Laplacien	03
1.3.	Description de mouvement du fluide	04
1.3.1.	Approche Lagrangienne	05
1.3.2.	Approche Eulérienne	06
1.4.	Champ de vitesse et champ d'accélération	07
1.5.	Equations de Navier-Stokes	09
1.6.	Equation d'Euler	09
1.7.	Equation de Bernoulli	10
1.8.	Equation de continuité (forme différentielle)	11
1.9.	Notions de lignes de courant, trajectoire, tube de courant et surface de courant	12
1.9.1.	Ligne de courant (ligne d'écoulement)	12
1.9.2.	La trajectoire	14
1.9.3.	Le tube de courant	14
1.9.4.	La surface de courant	14
1.10.	La fonction de courant et fonction potentiel de vitesse	15
1.10.1.	La fonction de courant	15
1.10.2.	La fonction de potentiel ou fonction potentiel de vitesse	16
1.11.	Equations de Cauchy-Riemann	17
1.12.	Ecoulements plans	17
1.12.1.	Ecoulements simples	17
1.12.1.1.	Ecoulement uniforme rectiligne	17
1.12.1.2.	Ecoulement autour d'une source ou autour d'un puit	18
1.12.1.3.	Ecoulement avec circulation (à vortex)	21
1.12.2.	Ecoulements superposés	24
1.13.	Eléments de la théorie potentiel complexe	24
1.13.1.	Définition et contexte	25

1.13.2.	Vitesse complexe	25
1.13.3.	Ecoulements potentiels élémentaires exprimés sous forme complexe	26
1.13.3.1.	Ecoulement uniforme rectiligne	26
1.13.3.2.	Écoulement plan autour d'une source ou autour d'un puits	27
1.13.3.3.	Ecoulement à Vortex (tourbillon libre)	30
1.14.	Utilisation des transformations conformes	31
Exercices corrigés	32

Chapitre 2 : Théorie de la couche limite

2.1.	Introduction	51
2.2.	Définitions et caractéristiques de la couche limite	51
2.2.1.	Épaisseur de la couche limite	53
2.2.2.	Épaisseur conventionnelle de la couche limite	53
2.2.3.	Épaisseur de déplacement de la couche limite	53
2.2.4.	Épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite	55
2.3.	Equations de la couche limite	56
2.3.1.	Solution de Blasius de la couche limite sur une plaque plane	57
2.3.2.	Equation intégrale de Von-Karman	59
2.3.2.1.	Profil de vitesse linéaire	62
2.3.2.2.	Profil de vitesse parabolique	64
2.4.	Transition vers la turbulence	65
2.5.	La couche limite turbulente sur une plaque plane (sans gradient de pression) ...	65
Exercices corrigés	68

Chapitre 3 : Analyse dimensionnelle et similitude

3.1.	Analyse dimensionnelle	77
3.2.	Dimensions, unités et système international	77
3.3.	Les dimensions de référence	78
3.4.	Systèmes d'unités	79
3.4.1.	3.4.1. Système gravitationnel britannique BG.....	79
3.4.2.	Système international SI	79
3.4.3.	Système anglais d'ingénierie (EE)	80
3.5.	Théorème de Vachy-Buckingham	81
3.6.	Les étapes de l'analyse dimensionnelle	81
3.7.	La sélection des variables	82
3.8.	Exemple d'analyse dimensionnelle dans la mécanique des fluides	83
3.9.	Quelques groupes adimensionnels communs en mécanique des fluides	85
3.10.	Similitude et modèles	86
3.10.1.	Définitions	86
3.10.1.a.	Le prototype	86
3.10.1.b.	La maquette	86

3.11.	Similitude géométrique	87
3.12.	Similitude cinématique	87
3.13.	Similitude dynamique	88
3.13.1.	Similitude de Froude	89
3.13.2.	Similitude d'Euler	89
3.13.3.	Similitude de Reynolds	90
3.14.	Variables réduites	90
Exercices corrigés		91

Références bibliographiques

Annexe

Chapitre 1

Cinématique des Fluides

1.1. Introduction

Dans la cinématique des fluides, nous allons nous intéresser aux mouvements des fluides par rapport au temps, indépendamment des causes qui les provoquent, c'est-à-dire sans prendre en compte les forces qui sont à leur source.

Un milieu fluide étant en mouvement, comment l'observer, comment le décrire ? Pour commencer, on introduit la notion de « particule fluide ».

A cette particule fluide, on attache des grandeurs cinématiques (position, vitesse, accélération) et des grandeurs thermodynamiques (masse volumique, température, pression, ...etc.).

Lors de l'écoulement d'un fluide, le mouvement peut s'effectuer dans tous les sens (en 3 dimensions) comme il peut être rotationnel ou irrotationnel.

Dans la description du milieu fluide, la particule fluide est assimilée à un point au sens mathématique du terme (c'est-à-dire avec un diamètre nul).

1.2. Rappels mathématiques

1.2.1. Champs scalaires et vectoriels

1.2.1.1. Scalaire

Le scalaire est une quantité qui peut être exprimée par un nombre unique représentant sa grandeur. Exemple : masse, pression, densité et température.

1.2.1.2. Champ scalaire

Si à chaque point d'un domaine, une fonction scalaire a une valeur définie, le domaine est appelé un champ scalaire. Exemple : Distribution de pression, distribution de température dans une ailette.

1.2.1.3. Vecteur

Le vecteur est une quantité, qui est spécifiée à la fois par la magnitude et la direction. Exemple : Force, Vitesse et Déplacement.

1.2.1.4. Champ de vecteur

Si à chaque point d'un domaine, une fonction vectorielle a une valeur définie, le domaine est appelée un champ vectoriel. Exemple : champ de vitesse d'un fluide en écoulement.

1.2.2. Champ d'écoulement

Le domaine dans lequel les paramètres d'écoulement, c'est-à-dire la vitesse, la pression, etc., sont définis à chaque point et à chaque instant est appelée un champ d'écoulement. Ainsi, un champ d'écoulement serait spécifié par les vitesses à différents points de la région à des moments différents.

1.2.3. Les opérateurs mathématiques

1.2.3.1. L'opérateur Nabla

On simplifie les écritures en utilisant la notation dyadique qui introduit le vecteur symbolique nabla, noté $\vec{\nabla}$, dont les composantes formelles sont les opérateurs de dérivation partielle par rapport aux variables d'espace x, y, z .

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

La notation des différents opérateurs en fonction de Nabla est donnée dans le tableau ci-dessous.

<i>Opérateur</i>	<i>Notation</i>
<i>Gradient, $\overrightarrow{\text{grad}}\varphi$</i>	$\vec{\nabla}\varphi$
<i>Divergent, $\text{div}\vec{\varphi}$</i>	$\vec{\nabla}\vec{\varphi}$
<i>Rotationnel, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{\varphi}$</i>	$\vec{\nabla}\wedge\vec{\varphi}$
<i>Laplacien, $\Delta\varphi$</i>	$\vec{\nabla}^2\varphi$
<i>Laplacien vectoriel, $\Delta\vec{\varphi}$</i>	$\vec{\nabla}^2\vec{\varphi}$

1.2.3.2. Le gradient

En mathématiques, le gradient est un vecteur représentant la variation d'une fonction par rapport à la variation de ses différents paramètres, généralisant la notion de dérivée d'une fonction dans le cas de plusieurs variables. En physique et en analyse vectorielle, le gradient est une grandeur vectorielle indiquant la façon dont une grandeur physique varie dans l'espace.

Il est courant, selon la façon de noter des vecteurs, d'écrire le gradient d'une fonction ainsi :

$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{\nabla}V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

1.2.3.3. Le divergent

L'opérateur divergence est un outil d'analyse vectorielle qui mesure, pour faire simple, si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace, comme ce que l'on peut observer sur un diagramme de lignes de champ. Il donne donc une information très liée aux sources qui créent le champ. Comme nous le préciserons, l'opérateur divergence est l'équivalent local de la mesure d'un flux.

$$\operatorname{div}\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \vec{k} \quad (1.3)$$

1.2.3.4. Le rotationnel

Le rotationnel est un opérateur qui transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs.

La notion de rotationnel de la vitesse est essentielle en mécanique des fluides. Elle décrit une rotation de la particule fluide. Si l'écoulement est irrotationnel (son rotationnel est nul en tout point), en termes mathématiques, le vecteur de vitesse est alors le gradient du potentiel (on dit alors que les vitesses « dérivent d'un potentiel »). Si le fluide peut être considéré comme incompressible, la divergence de ce vecteur s'annule. Le Laplacien du potentiel est donc nul : il s'agit d'un potentiel harmonique qui satisfait l'équation de Laplace.

Le rotationnel d'un champ vectoriel est donné par :

$$\vec{\operatorname{rot}}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

1.2.3.5. Le Laplacien

L'**opérateur Laplacien**, ou simplement le **Laplacien**, est l'opérateur différentiel défini par l'application de l'opérateur gradient suivie de l'application de l'opérateur divergence. Intuitivement, il combine et relie la description statique d'un champ (décrit par son gradient) aux effets dynamiques (la divergence) de ce champ dans l'espace et le temps.

Il s'applique le plus souvent aux champs scalaires, et son résultat est alors également un champ scalaire.

$$\Delta p = \vec{\nabla}^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (1.5)$$

$$\Delta p = \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}}(p)) \quad (1.6)$$

Un champ de gradient est à rotationnel partout nul.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(p))=0 \quad (1.7)$$

1.3. Description de mouvement de fluide

Considérons l'écoulement 2D d'un fluide.

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} \quad (1.8)$$

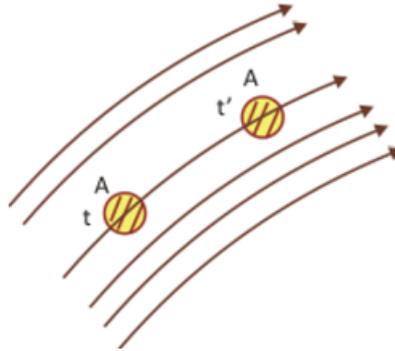


Figure 1.1 Mouvement de particule fluide

Il existe deux approches pour décrire le mouvement d'un fluide et propriétés associées.

1. Approche Lagrangienne

2. Approche Eulérienne

1.3.1. Approche Lagrangienne

Identifier (ou étiqueter) une particule fluide ; suivez-la au fur et à mesure qu'elle se déplace et surveillez les changements dans ses propriétés. Les propriétés peuvent être la vitesse, la température, la densité, la masse ou la concentration, etc. dans le champ d'écoulement. Reportez-vous à la figure ci-dessus. La particule fluide «A» au moment t a été déplacé vers un autre emplacement au moment t' . Sa propriété, par exemple la vitesse, est enregistrée lorsque la particule se déplace dans le champ d'écoulement :

$$\begin{aligned} A : \quad t_1 &\rightarrow v_1 \\ t_2 &\rightarrow v_2 \\ t_3 &\rightarrow v_3 \end{aligned}$$

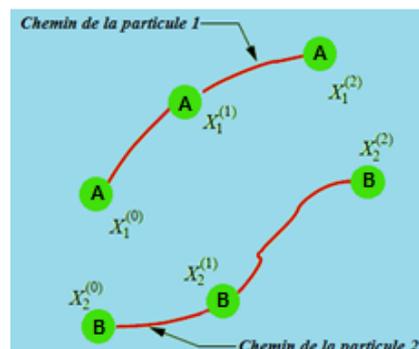


Figure 1.2 Déplacement d'une particule fluide au fil du temps

Notez que les vitesses enregistrées sont associées à la même particule de fluide, mais à des endroits différents et à des moments différents.

Imaginez un capteur de vitesse fixé sur un oiseau, volant dans l'atmosphère et enregistrant la vitesse de l'oiseau dans le champ d'écoulement.

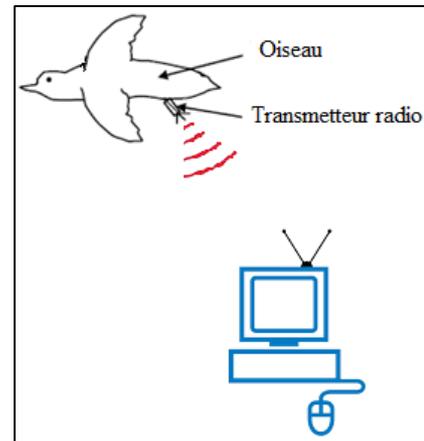


Figure 1.3. Exemple de description Lagrangienne du mouvement

Dans ce cas, le capteur enregistre les données de vitesse suivantes :

Position	temps	Vitesse
$P_1(x_1, y_1, z_1)$	t_1	v_1
$P_2(x_2, y_2, z_2)$	t_2	v_2
$P_3(x_3, y_3, z_3)$	t_3	v_3

Le changement temporel de la vitesse dans une telle mesure est désigné par :

$$\frac{dv}{dt} \quad (1.9)$$

Appelé dérivé matériel ou dérivé substantiel. Il reflète le changement temporel de la vitesse (ou de toute autre propriété) de la particule fluide marquée (ciblée), observée par un observateur se déplaçant avec la particule fluide. L'approche lagrangienne est également appelée «approche basée sur la particule».

1.3.2 Approche Eulérienne

Identifiez (ou étiquetez) un certain emplacement fixe dans le champ d'écoulement et suivez l'évolution de sa propriété, à mesure que différentes particules passent par cet emplacement.

Dans ce cas, la propriété suivante, par exemple, la température est enregistrée par le capteur :

temps	Température
t_1	T_1
t_2	T_2
t_3	T_3
...	...
t_n	T_n

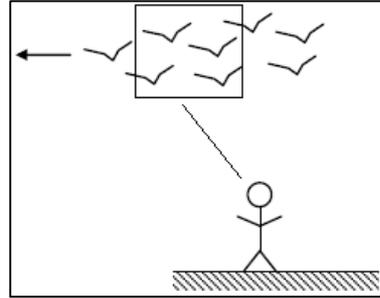


Figure 1. 4. Exemple sur la description Eulérienne du mouvement

Notez que les températures enregistrées sont associées à l'emplacement fixe dans le champ d'écoulement, ayant différentes particules fluide à différents moments.

Disons que nous sommes intéressés par le taux de variation temporelle du changement de température, T , que la particule observe lorsqu'elle se déplace d'un endroit à l'autre. La particule peut subir un changement de température car la température de tout le champ de fluide peut changer en fonction du temps (c'est-à-dire que le champ de température peut être instable). De plus, le champ de température peut avoir des gradients spatiaux (différentes températures à différents endroits, c'est-à-dire non uniformes), de sorte que lorsque la particule se déplace d'un point à l'autre, elle subit un changement de température.

Ainsi, la particule subit deux effets qui peuvent provoquer un changement de température dans le temps : les effets instables, également appelés effets locaux ou eulériens, et les effets de gradient spatial, également appelés effets de convection. Nous pouvons décrire cela en termes mathématiques en écrivant la température de tout le champ en fonction du temps, t et de l'emplacement, x :

$$T = T(t, x)$$

Notez que l'emplacement de la particule de fluide est fonction du temps : $x = x(t)$ de sorte que :

$$T = T(t, x(t))$$

Prendre la dérivée temporelle de la température, étendre le vecteur de localisation en ses composantes x , y et z et utiliser la règle de chaîne donne :

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{\substack{\text{suivant} \\ \text{une particule} \\ \text{fluide}}} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt}}_{=u_x} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt}}_{=u_y} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt}}_{=u_z} \quad (1.10)$$

Réécrivant cela sous une forme plus compacte :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.11)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T \quad (1.12)$$

La notation, D/Dt , indiquant une dérivée lagrangienne (parfois désigne un élément matériel ou substantiel), est utilisée dans l'éq. Précédente pour indiquer que nous suivons un élément (morceau) de fluide particulier et non pas une particule seulement. Plus généralement, nous avons :

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}(\dots)}_{\text{Taux de variation Lagrangien}} = \underbrace{\frac{\partial(\dots)}{\partial t}}_{\text{Variation locale ou d'Euler (effet du temps)}} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\dots)}_{\text{Variation convective due au variation de position de la particule}} \quad (1.13)$$

$$\frac{D}{Dt}(\dots) = \frac{\partial}{\partial t}(\dots) + u_x \frac{\partial}{\partial x}(\dots) + u_y \frac{\partial}{\partial y}(\dots) + u_z \frac{\partial}{\partial z}(\dots) \quad (1.14)$$

Où (...) représente toute grandeur d'intérêt dans le champ d'écoulement.

1.4 Champ de vitesse et champ d'accélération

Sur la base du concept du milieu continu qu'on a accordé au fluide, la description des propriétés du fluide (densité, pression, vitesse, accélération etc. ...) peuvent être des fonctions de l'espace, et peuvent par conséquence être représentées graphiquement.

Une de ces grandeurs est le champ de vitesse. Il s'agit d'une fonction vectorielle de la position et du temps avec les composantes u , v et w . Dans un système Eulérien, la formulation du vecteur de vitesse en coordonnées cartésiennes est définie comme :

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k} \quad (1.15)$$

La dérivée totale par rapport au temps du vecteur de vitesse est le vecteur d'accélération (\vec{a}) :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d[u(x,y,z,t)]}{dt}\vec{i} + \frac{d[v(x,y,z,t)]}{dt}\vec{j} + \frac{d[w(x,y,z,t)]}{dt}\vec{k} \quad (1.16)$$

Pour la composante de vitesse u , on peut écrire :

$$\frac{d[u(x,y,z,t)]}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dz}{dt} \quad (1.17)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.18)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.19)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)u \quad (1.20)$$

De même pour les composantes v et w , on a :

$$\frac{d[v(x,y,z,t)]}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)v \quad (1.21)$$

$$\frac{d[w(x,y,z,t)]}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)w \quad (1.22)$$

Sommons les trois termes précédents, on écrit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{v} \quad (1.23)$$

Ou,

$$\vec{V} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et, } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1.24)$$

Il vient donc :

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.25)$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.26)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.27)$$

Dans l'équation ci-dessus, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est appelée « **accélération locale** » ce terme traduit la non

permanence de l'écoulement, il est nul pour un écoulement permanent. La deuxième partie,

$u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$ est appelée l'accélération convective. Ce terme traduit la non

uniformité de l'écoulement.

La dérivée temporelle totale $\frac{d\vec{v}}{dt}$ est appelée « **dérivée matérielle** ou **particulare** ». Ce concept

peut être appliqué sur n'importe quelle grandeur (vecteur ou scalaire). Par exemple, on peut écrire la dérivée temporelle locale pour la pression et la température.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)p \quad (1.28)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)T \quad (1.29)$$

1.5 Equations de Navier-Stokes

Ainsi, l'équation de mouvement pour un fluide Newtonien avec une masse volumique $\rho = Cte$ et une viscosité constante, $\mu = Cte$ est donnée comme suit :

Mouvement suivant x,

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{du}{dt} \quad (1.30)$$

Mouvement suivant y,

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{dv}{dt} \quad (1.31)$$

Mouvement suivant z,

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{dw}{dt} \quad (1.32)$$

Réécrivant les en fonction des contraintes de cisaillement, on obtient :

Suivant x :

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{du}{dt} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.33)$$

Suivant y :

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{dv}{dt} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (1.34)$$

Suivant z :

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{dw}{dt} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.35)$$

Ce sont des équations différentielles partielles non linéaires du 2^{ème} ordre appelées équations de Navier-Stokes. Sous forme vectorielle, elles peuvent être réécrites sous la forme :

$$\rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (1.36)$$

1.6 Equation d'Euler

Quand les tensions visqueuses dans l'équation différentielle linéaire de mouvement sont négligeables (τ_{ij}), l'équation de mouvement de Navier-Stokes se réduit à :

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (1.37)$$

La même équation de mouvement sous forme scalaire peut-être réécrite comme suit :

Mouvement suivant x,

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{du}{dt} \quad (1.38)$$

Mouvement suivant y,

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{dv}{dt} \quad (1.39)$$

Mouvement suivant z,

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{dw}{dt} \quad (1.40)$$

1.7 Equation de Bernoulli

Maintenant, réécrivons l'équation d'Euler sous la forme suivante,

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = \rho \vec{g} - \nabla p \quad (1.41)$$

Le terme $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ peut-être simplifié comme suit :

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + (\vec{\xi} \times \vec{V}) \quad (1.42)$$

Par substitution de ce terme dans l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + (\vec{\xi} \times \vec{V}) + \frac{\nabla p}{\rho} - \vec{g} = 0 \quad (1.43)$$

Multipliant l'équation précédente par $(d\vec{r})$.

$$\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + (\vec{\xi} \times \vec{V}) + \frac{\nabla p}{\rho} - \vec{g} \right] \cdot d\vec{r} = 0 \quad (1.44)$$

Supposant que : $(\vec{\xi} \times \vec{V}) \cdot d\vec{r} = 0$, qui est valide sous les hypothèses suivantes :

- Quand il n'y a pas d'écoulement ($\vec{V} = 0$), (cas de l'hydrostatique) ;
- Quand l'écoulement est irrotationnel, ($\vec{\xi} = 0$) ;
- $d\vec{r}$ est perpendiculaire à $(\vec{\xi} \times \vec{V})$ ce qui très rare ;
- $d\vec{r}$ est parallèle à \vec{V} donc on peut aller suivant la ligne de courant.

Si l'écoulement est irrotationnel et on prend, $\vec{g} = -g\vec{k}$, l'équation se réduit à :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\vec{r} + d \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + \frac{dp}{\rho} + gz = 0 \quad (1.45)$$

Intégrant l'équation le long d'une ligne de courant entre deux points (1) et (2) pour un écoulement dont les frottements sont négligeables.

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (1.46)$$

ds est la longueur de l'arc le long de la ligne de courant. Cette équation est connue sous le nom de l'équation de Bernoulli pour les fluides parfaits le long d'une ligne de courant. Si, le fluide est incompressible ($\rho = Cte$), l'écoulement est permanent, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 \quad (1.47)$$

Autrement dit, $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = Cte$, le long d'une ligne de courant.

1.8 Equation de continuité (forme différentielle)

Mathématiquement, elle est représentée, comme étant le taux de variation de masse d'un système est nul. Par définition, un système = quantité de masse fixe.

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{\text{système}} = 0 \quad (1.48)$$

Considérons un élément fluide parallélépipédique de volume $dV = dx dy dz$ (voir Fig.1.5) incompressible au repos.

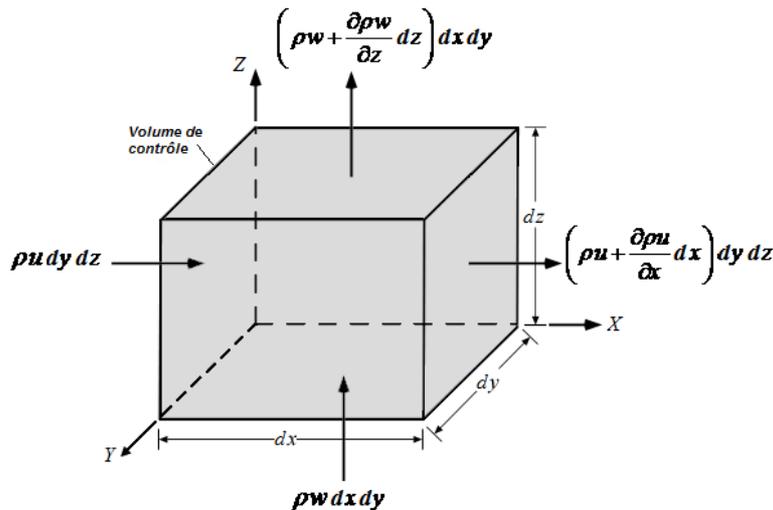


Figure 1.5 Volume de contrôle d'un élément fluide parallélépipédique

L'équation de continuité stipule que ; un système = quantité de masse fixe. Ce qui nous permis d'écrire :

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{Sortantes} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{Entrantes} = 0 \quad (1.49)$$

$$\text{Avec, } \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

Essayons de développer les termes de l'équation ci-dessus suivant les trois axes ox, oy et oz.

Pendant le temps dt , il entre par la face $dydz$ un débit massique de fluide égale à :

$$\rho u dy dz \quad (1.50)$$

Pendant le même temps, il sort part la face opposée $dydz$, un flux massique de fluide égale à celui qui est entré, augmenté de sa différentielle partielle par rapport à x . or seules les grandeurs u et ρ peuvent varier suivant x . le débit massique sortant est donc :

$$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \right] dy dz \quad (1.51)$$

La différence de ces deux termes donne :

$$+ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz \quad (1.52)$$

Qui représente la variation (augmentation) du débit massique traversant le parallélépipède.

Par un raisonnement similaire, on peut déterminer la variation en débit à travers les autres faces.

Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau II.1.

<i>Face</i>	<i>Débit massique entrant</i>	<i>Débit massique sortant</i>	<i>Augmentation</i>
x	$\rho u dy dz$	$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \right] dy dz$	$+ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz$
y	$\rho v dx dz$	$\left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy \right] dx dz$	$+ \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy dx dz$
z	$\rho w dx dy$	$\left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz \right] dx dy$	$+ \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz dx dy$

Après substitution de ces termes dans l'équation précédente (1.48), on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \frac{\partial \rho}{\partial x} (\rho u) dx dy dz + \frac{\partial \rho}{\partial y} (\rho v) dx dy dz + \frac{\partial \rho}{\partial z} (\rho w) dx dy dz = 0 \quad (1.53)$$

Où,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial \rho}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (1.54)$$

Où,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.55)$$

Pour un fluide incompressible, $\rho = Cte$, c.-à-d. : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

L'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \vec{V} = \text{div} \vec{V} = 0 \quad (1.56)$$

C'est la forme recherchée de l'équation de conservation de masse pour un volume de contrôle infinitésimal dans un système de coordonnées cartésiennes.

Elle est applicable aux principales catégories d'écoulement, visqueux, non visqueux, pour fluide incompressible, ou un fluide compressible. Souvent appelée équation de continuité car elle ne nécessite aucune hypothèse, sauf le fait que la densité et la vitesse sont des fonctions continues.

1.9. Notion de lignes de courant, trajectoire, tube de courant

1.9.1. Ligne de courant (ligne d'écoulement)

Une ligne de courant est la courbe qui est tangente en chacun de ces points au vecteur de vitesse en ces points (Fig. 1.6).

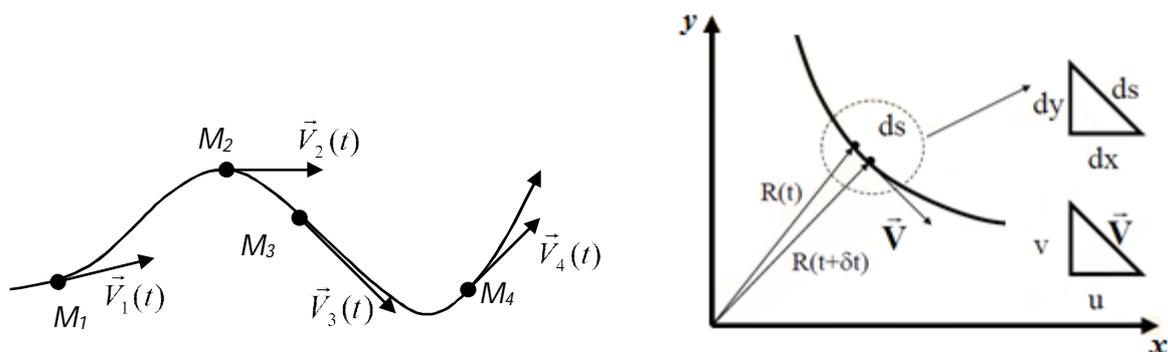


Fig. 1.6 Lignes de courant

Une Ligne de courant est définie par les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (1.57)$$

Les lignes de courant changent d'un instant à l'autre. Mais dans un écoulement permanent, elles ne varient pas et coïncident avec **les trajectoires**.

1.9.2. La trajectoire

La trajectoire retrace l'histoire d'une particule alors que la ligne d'écoulement est un «instantanée» du champ de vitesse. De ce fait, ces deux notions sont différentes. Par contre, lorsque que le régime d'écoulement est stationnaire, une particule suit nécessairement la ligne d'écoulement sur laquelle elle se trouve puisque celle-ci est fixe.

1.9.3 Le tube de courant

Un volume de fluide limité par des lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée est appelé tube de courant (Fig. 1.7).

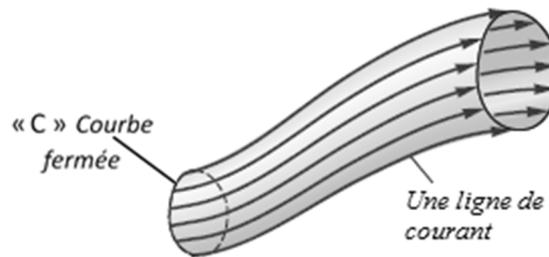


Figure 1.7 Tube de courant

1.9.4. Surface de courant

Une surface de courant est l'infinité des Lignes de courant qui s'appuient à un instant donné, sur une courbe C donnée (Fig. 1.8).

La vitesse en un point quelconque de cette surface est située à l'instant considéré, dans le plan tangent de telle sorte que si :

$$F(x, y, z, t) = K, \quad K = Cte \quad (1.58)$$

Est l'équation différentielle de cette surface de courant, on a :

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (1.59)$$

L'expression (3) représente l'équation différentielle des surfaces de courant passant à l'instant considéré par le point où la vitesse est $V(u, v, w)$.

Aux différentes valeurs de K , correspondent les diverses surfaces de courant passant par ce point. Lorsque la courbe C est fermée, la surface devient un tube de courant.

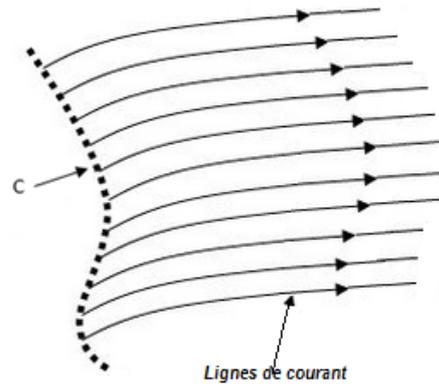


Figure 1.8 Surface de courant

1.10. Fonction de courant et fonction potentiel de vitesse

1.10.1. Fonction de courant

Rappelons que les lignes de courant sont définies par :

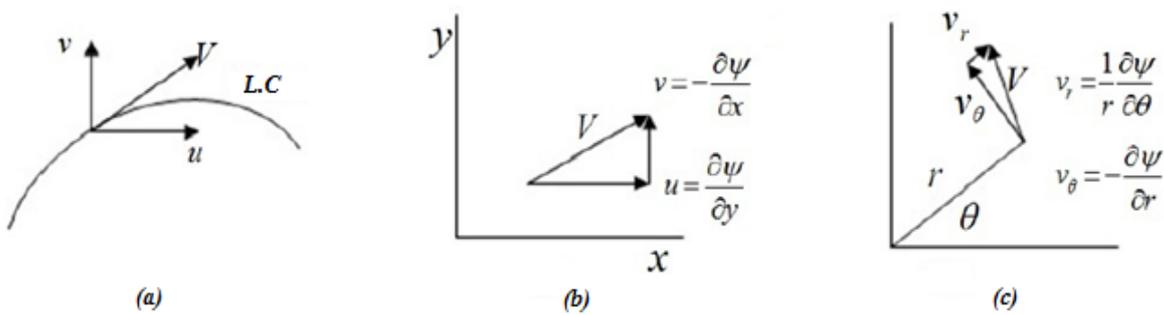


Figure 1.9 Composantes de vitesse le long d'une ligne de courant

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (1.60)$$

Considérons un écoulement plan (x, y) bidimensionnel, l'équation (4) peut devenir :

$$-w dx + u dz = 0 \quad (1.61)$$

L'écoulement est permanent et le fluide incompressible. Soit une fonction que l'on désigne par ψ et qui en chaque point du plan x, z satisfait :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (1.62)$$

Et,

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.63)$$

ψ : est alors appelée **Fonction de courant**.

Substituant l'équation (6) dans l'équation (5), on obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = d\psi = 0 \quad (1.64)$$

ce qui permet d'écrire que : $\psi = Cte$ Le long d'une ligne de courant.

1.10.2. Fonction potentiel ou potentiel de vitesse

Rappelons que l'écoulement irrotationnel est un écoulement tangent. Le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ est nul en tout point de cet écoulement :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \vec{0} \quad (1.65)$$

Dans un écoulement irrotationnel où le vecteur tourbillon est nul, la vitesse \vec{V} , peut être exprimée par une fonction Φ , appelée potentiel des vitesses et qui satisfait la relation :

$$\vec{V} = \text{grad} \Phi \quad (1.66)$$

Dont les composants sont :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} ; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} ; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.67)$$

Un tel écoulement est appelé « *écoulement à potentiel des vitesses* » ou encore « *écoulement potentiel* ».

Comme la fonction de courant, ψ , on définit les surfaces ou lignes équipotentielles telles que la fonction Φ , conserve la même valeur en tout point de chacune d'elles. Les équipotentielles sont données par :

$$\Phi(x, y, z) = Cte \quad (1.68)$$

Où

$$\Phi(x, y) = Cte \quad \text{Dans un écoulement plan bidimensionnel.}$$

Il faut rappeler que pour un écoulement de fluide incompressible, parfait et conservatif, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div} \vec{V} = 0 \quad (1.69)$$

Lorsque l'écoulement est à potentiel de vitesse, les équations (1.67) et (1.69) nous permettent d'écrire :

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} \Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.70)$$

$\Phi = Cte$, Le long d'une équipotentielle.

$\nabla^2\Phi = 0$; La fonction potentielle Φ est donc harmonique.

1.11. Equations de Cauchy- Riemann

Considérons un écoulement plan x, z irrotationnel d'un fluide incompressible. La fonction des vitesses Φ et la fonction de courant Ψ existent et sont liées entre elles par :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{Equations de Cauchy-Riemann}) \quad (1.71)$$

Φ et Ψ forment un double réseau de courbes ayant des propriétés orthogonales.

1.12. Ecoulements plans

On distingue deux types d'écoulements plans :

- les écoulements potentiels de base ou simples ;
- les écoulements en superposition ou superposés.

1.12.1. Ecoulements simples

1.12.1.1. Ecoulement uniforme rectiligne

Soit un écoulement plan, de vitesse $u = U_\infty$ partielle à x (Fig. 1.10).

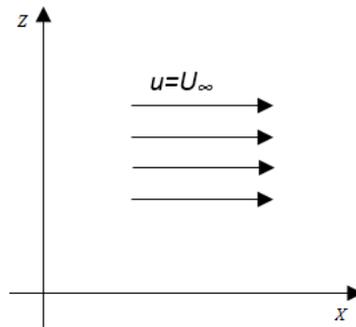


Figure 1. 10 Ecoulement rectiligne uniforme

Calcul de la fonction de courant ψ et de la fonction potentiel Φ :

Rappelons les équations de **Cauchy-Riemann** (1.71) ; on écrit selon les données de l'exemple :

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = u = U_\infty = \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = w = 0 = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.72)$$

Après intégration de ce système, on obtient :

$$\Phi(x, z) = U_{\infty} \cdot x + c_1 \tag{1.73}$$

$$\psi(x, z) = U_{\infty} \cdot z + c_2 \tag{1.74}$$

c_1 et c_2 deux constantes dépendantes des conditions initiales.

Cas particulier où $c_1 = c_2 = 0$:

$$\Phi(x, z) = U_{\infty} \cdot x \tag{1.75}$$

$$\psi = U_{\infty} \cdot z \tag{1.76}$$

Et le réseau des lignes de courant $\psi(x, z)$ et des lignes d'équipotentiels $\Phi(x, z)$, forment un damier (Fig. 1.11).

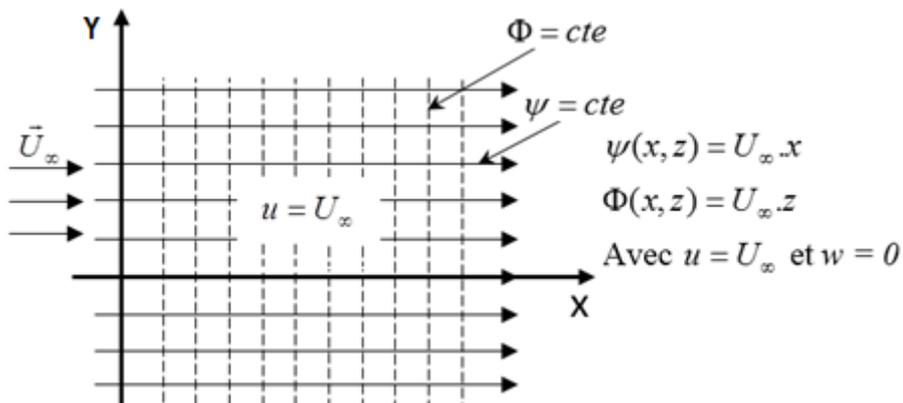


Figure 1.11 Lignes de courant et lignes équipotentiels

1.12.1.2. Ecoulement autour d'une source ou autour d'un puit

C'est un écoulement radial. Il serait plus commode d'utiliser les coordonnées polaires (r, θ).

Les composantes u et w de la vitesse d'écoulement deviennent :

a) **Écoulement autour d'une source**, (voir Fig. 1.12)

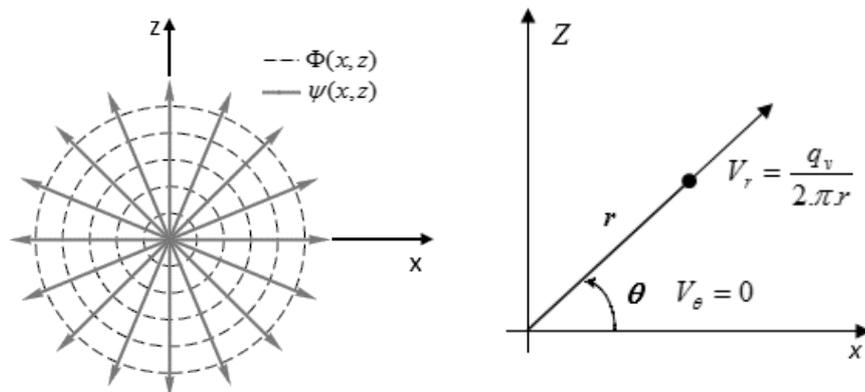


Figure 1.12 Ecoulement autour d'une source

Remarque :

$V_\theta = 0$, c'est parce que l'écoulement ne présente pas de rotation.

Recherche des composantes u et w :

$$\begin{aligned} u &= V_r \cdot \cos \theta = \frac{q_v}{2\pi r} \cos \theta \\ w &= V_r \cdot \sin \theta = \frac{q_v}{2\pi r} \sin \theta \end{aligned} \quad (1.77)$$

Le débit volumique unitaire à travers la surface $2\pi.r$ est donné par :

$$q_v = 2\pi.r.V_r \quad (1.78)$$

Avec les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u = \frac{q_v}{2\pi r} \left(\frac{r}{r}\right) \cos \theta = \frac{q_v}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + z^2)} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = w = \frac{q_v}{2\pi r} \left(\frac{r}{r}\right) \sin \theta = \frac{q_v}{2\pi} \frac{z}{(x^2 + z^2)} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.79)$$

Avec,

$$V_r = \frac{q_v}{2\pi r}; \quad V_\theta = 0$$

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$z = r \cdot \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + z^2$$

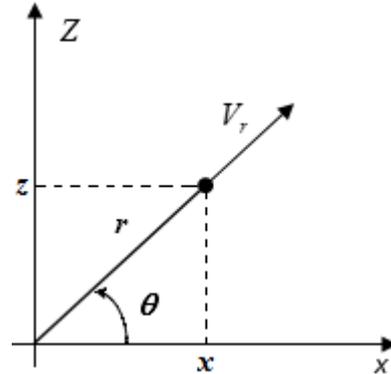


Figure 1.13 Vecteur vitesse en coordonnées polaires

Déterminons maintenant ψ et Φ

Après intégration du système d'équations (16), on obtient :

$$\Phi(x, z) = \frac{q_v}{2\pi} \frac{1}{2} \ln(x^2 + z^2) \quad (1.80)$$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q_v}{2\pi} \ln r \quad (1.81)$$

Et,

$$\psi(x, z) = \frac{q_v}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{z}{x} \right) \quad (1.82)$$

$$\psi(r, \theta) = \frac{q_v}{2\pi} \theta \quad (1.83)$$

Alors :

$$\Phi(r, \theta) = C \cdot \ln r \quad (1.84)$$

$$\psi(r, \theta) = C \cdot \theta \quad (1.85)$$

Les **lignes de courant** (ψ), sont des droites passant par l'origine des axes et divergentes à partir de cette même origine.

Les **lignes équipotentielles** (Φ), sont des cercles concentriques autour de l'origine O et dans le plan (x, z).

b) Écoulement autour d'un puits

Un puits peut être considéré comme source négative (voir Fig. 1.14 ci-dessous).

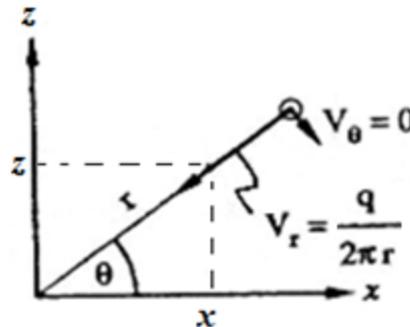


Figure 1.14 Vecteur vitesse en coordonnées polaires pour un écoulement autour d'un puit

$$u = -V_r \cdot \cos \theta = -\frac{q_v}{2\pi \cdot r} \cos \theta \quad (1.86)$$

$$v = -V_r \cdot \sin \theta = -\frac{q_v}{2\pi \cdot r} \sin \theta \quad (1.87)$$

$$\Phi(x, z) = -\frac{q_v}{2\pi} \frac{1}{2} \ln(x^2 + z^2) \quad (1.88)$$

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{q_v}{2\pi} \ln r \quad (1.89)$$

$$\psi(x, z) = -\frac{q_v}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{z}{x} \right) \quad (1.90)$$

$$\psi(r, \theta) = -\frac{q_v}{2\pi} \theta \quad (1.91)$$

Alors :

$$\Phi(r, \theta) = -C \cdot \ln r \quad (1.92)$$

$$\psi(r, \theta) = -C \cdot \theta \quad (1.93)$$

Les **lignes de courant** (ψ), sont des droites convergentes vers l'origine.

Les **lignes équipotentielles** (Φ), sont des cercles concentriques autour de l'origine O et dans le plan (x, z) .

1.12.1.3. Écoulement avec circulation (à vortex)

Un vortex correspond donc à un écoulement à tourbillon localisé (ici sur l'axe Oz).

C'est un écoulement où le fluide se déplace en cercles concentriques (Fig. 1.15). L'exemple d'un réservoir cylindrique rempli d'eau, tournant en bloc autour de son axe vertical avec une vitesse angulaire ω .

On appelle vortex, un écoulement caractérisé par un champ des vitesses défini en coordonnées cylindriques par :

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (1.94)$$

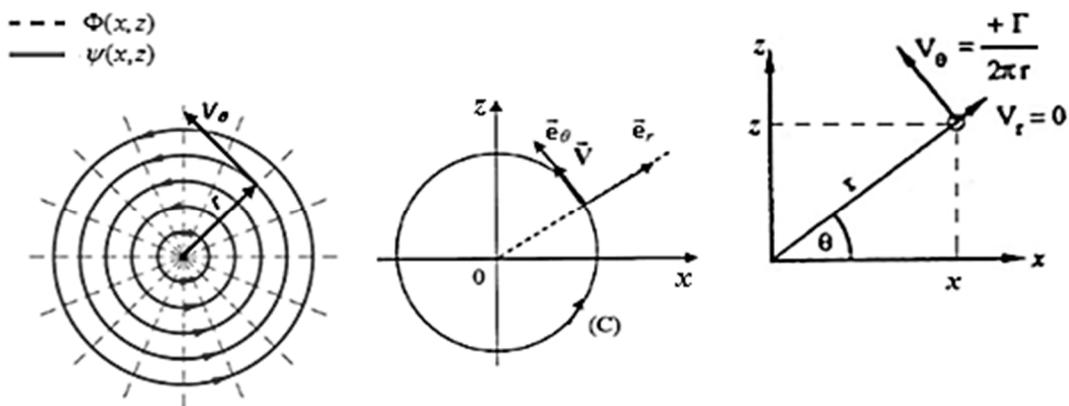


Figure 1.15 Vecteur vitesse en coordonnées polaires pour un écoulement à vortex

Où la constante Γ est l'**intensité du vortex**, en m^2/s .

La constante Γ représente la **circulation du champ de vitesses** le long de tout contour entourant l'axe Oz (axe orthogonal au plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$).

Les lignes de courant sont des **cercles autour de l'axe Oz**.

Le vecteur tourbillon est défini partout dans l'espace, sauf sur l'axe Oz où $r = 0$. On établit que :

$$\forall r \neq 0, \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0} \quad (1.95)$$

Compte tenu de la symétrie de la révolution, on utilise les coordonnées polaires (r, θ) . La circulation Γ de l'écoulement autour du cylindre pour un rayon quelconque r est :

$$\Gamma = \int_S \vec{V}_s d\vec{s} = \vec{V}_s \int_S d\vec{s} = (u dx + v dy + w dz) \int_S ds \quad (1.96)$$

Pour la majorité des écoulements, l'intégrale le long d'une courbe fermée à partir d'un point jusqu'au même point donne $\Gamma = 0$. Pourtant, pour un écoulement tourbillonnaire, $\Phi = K.\theta$, et l'intégration produit, $\Gamma = 2.\pi.r$.

Une circulation équivalente peut être conçue en définissant une trajectoire circulaire de rayon r au centre du tourbillon et nous pouvons obtenir :

$$\Gamma = \int_S V_\theta dS = -V_\theta (2\pi r) \quad (1.97)$$

(Le signe (-) exprime que V_θ est anti-horlogique).

D'après la figure 1.15, on a :

$$V_s = \frac{V_\theta}{r} \quad (1.98)$$

Et

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (1.99)$$

$$dS = 2\pi dr \quad (1.100)$$

Après intégration, on obtient :

$$\Gamma = 2\pi r V_s \quad (1.101)$$

Les lignes de courant, ψ sont des cercles concentriques (Fig. 1.15) et les équipotentielles Φ suivent le sens des rayons de ces cercles.

Pour écrire les vitesses V_r et V_θ , en coordonnées polaires, il est commode de remarquer d'abord que :

$$d\Gamma = \overrightarrow{grad} \Phi d\vec{l} \equiv d\Phi \quad (1.102)$$

Par intégration le long de la circulation Γ , on a :

$$\Gamma = \int_A^B d\Phi = \Phi_B - \Phi_A \quad (1.103)$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{rot}(\psi \vec{\theta}_z) = \overrightarrow{grad} \psi \wedge \vec{e}_z \quad (1.104)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{e}_z) = 0, \quad (1.105)$$

Alors,

$\overrightarrow{grad} \psi \wedge \vec{e}_z$ S'écrit en coordonnées polaires comme suit :

$$\overrightarrow{grad} \psi(r, \theta) \wedge \vec{e}_z = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{L}_r + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{L}_\theta \right) \wedge \vec{e}_z \quad (1.106)$$

En remarquant que :

$$ds = r.d\theta \quad \text{il vient que : } \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (1.107)$$

On écrit :

$$\overrightarrow{grad} \psi(r, \theta) \wedge \vec{e}_z = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{L}_r + \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \vec{L}_\theta \right) \wedge \vec{e}_z \quad (1.108)$$

$$\overrightarrow{grad} \psi(r, \theta) \wedge \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{L}_r - \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{L}_\theta = \vec{V} \quad (1.109)$$

Or, $\vec{V} = \overrightarrow{grad} \Phi$ (écoulement dérive d'un potentiel).

Il vient la même chose pour la fonction de potentiel de vitesses, Φ :

$$\overrightarrow{grad} \Phi(r, \theta) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{L}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{L}_\theta \quad (1.110)$$

Donc :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = V_r \quad (1.111)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = V_\theta \quad (1.112)$$

Par integration, on obtient :

$$\psi(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + C_1 \quad (1.113)$$

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta + C_2 \quad (1.114)$$

C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration dépendantes des conditions aux limites.

$$\text{Si on pose : } C = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (1.115)$$

Il vient :

$$\psi(r, \theta) = C \ln r + C_1 \quad (1.116)$$

$$\Phi(r, \theta) = -C \theta + C_2 \quad (1.117)$$

1.12.2. Écoulements superposés

L'équation de Laplace à laquelle doivent satisfaire les fonctions ψ et Φ est de forme linéaire. Donc la somme de plusieurs fonctions, $\Phi_1 + \Phi_2$ et $\psi_1 + \psi_2$, satisfait également l'équation de Laplace. Ainsi, à partir de deux ou plusieurs réseaux d'écoulements plans simples, on peut obtenir un autre réseau d'écoulement plan superposé.

Table 3.6.1: Summary of basic, plane potential flows

Type d'écoulement	Vitesse	Fonction potentiel	Fonction de courant
Écoulement uniforme, Ox	$u = U_\infty$ $v = 0$	$\Phi(x, y) = U_\infty \cdot x$	$\psi(x, y) = U_\infty \cdot y$
Écoulement autour d'une source	$v_r = \frac{q}{2\pi r}$ $v_\theta = 0$	$\Phi(r, \theta) = \frac{q_v}{2\pi} \ln r$	$\Psi(r, \theta) = \frac{q_v}{2\pi} \theta$
Écoulement autour d'un puit	$v_r = \frac{-q}{2\pi r}$ $v_\theta = 0$	$\Phi(r, \theta) = -\frac{q_v}{2\pi} \ln r$	$\Psi(r, \theta) = -\frac{q_v}{2\pi} \theta$
Écoulement avec circulation (vortex)	$v_r = 0$ $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$	$\Phi(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$	$\psi(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

Exemple : Une source superposée à un écoulement rectiligne uniforme

Pour un écoulement rectiligne uniforme (Fig. 1.6)

$$\Phi_1(x, z) = U_\infty \cdot x \quad (1.118)$$

$$\psi_1(x, z) = U_\infty \cdot z \quad (1.119)$$

Avec, $C_1 = C_2 = 0$

Pour un écoulement autour d'une source (Fig. 1.7)

$$\Phi_2(x, z) = \frac{q_v}{2\pi} \frac{1}{2} \ln(x^2 + z^2) \quad (1.120)$$

Et,

$$\psi_2(x, z) = \frac{q_v}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{z}{x}\right) \quad (1.121)$$

La superposition de ces deux écoulements donne un nouvel écoulement (superposé), dont les fonctions de courant et de potentiel sont comme suit (voir Fig. 1.16) :

$$\Phi_1 + \Phi_2 = U_\infty \cdot x + \frac{q_v}{4\pi} \ln(x^2 + z^2) \quad (1.122)$$

Et,

$$\psi_1 + \psi_2 = U_\infty + \frac{q_v}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{z}{x} \right) \quad (1.123)$$

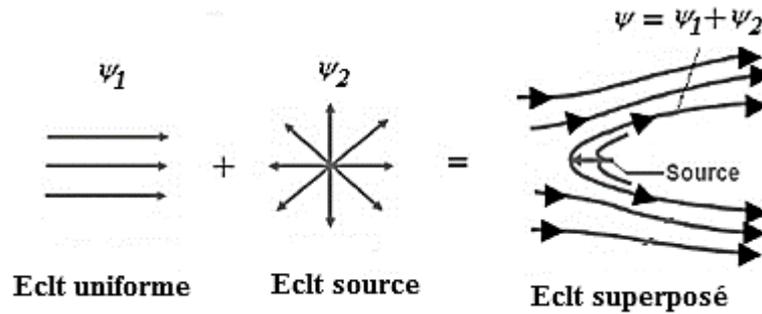


Figure 1.16 Superposition d'un écoulement uniforme avec un écoulement autour d'une source

1.13. Éléments de la théorie potentielle complexe

1.13.1. Définition et contexte

Lorsqu'un écoulement plan est conservatif et irrotationnel, il peut être complètement décrit au moyen d'une fonction analytique complexe appelée « **potentiel complexe des vitesses** ». Cette fonction complexe $f(z)$ comporte une partie réelle correspondant au potentiel des vitesses $\Phi(x, y)$ et une partie imaginaire correspondant à la fonction de courant $\Psi(x, y)$. On définit ainsi :

$$f(z) = \Phi + i\Psi \quad (1.147)$$

$$\text{Où : } z = x + iy = r e^{i\theta}$$

1.13.2. Vitesse complexe

On pose, $W = \frac{df}{dz} = u - iv$, appelée fonction vitesse complexe.

Avec les composantes u et v de la vitesse (Figure 1.17), \vec{V} , on peut former, $\bar{W} = u + iv$ image du vecteur vitesse dans le plan complexe. C'est un nombre complexe de module V et d'argument ω :

$$\bar{W} = V e^{i\omega} \quad (1.142)$$

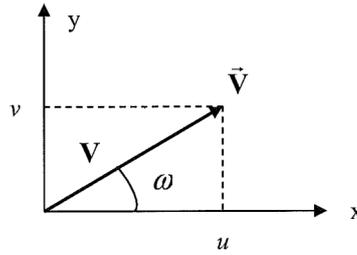


Figure 1.17 Vitesse complexe

La vitesse complexe a pour module V et pour argument $-\omega$ tel que :

$$W = Ve^{i\omega} \quad (1.143)$$

D'après les conditions d'incompressibilité, $\text{div}\vec{V} = 0$ et d'irrotationnalité, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.144)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.145)$$

Qui ne sont rien d'autre que les conditions de Cauchy-Riemann pour la partie réelle (u) et la partie imaginaire ($-v$) de la vitesse complexe, on déduit que :

$$\Delta u = \Delta v = 0 \quad (1.146)$$

Remarque

La définition d'une telle fonction analytique est légitime dans la mesure où le potentiel des vitesses et la fonction de courant vérifient les relations de *Cauchy-Riemann* :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et,} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

L'intérêt de l'utilisation du potentiel complexe des vitesses est double :

- il regroupe en une seule fonction les deux fonctions descriptives de l'écoulement ;
- il permet la construction d'écoulements évolués par simple superposition d'écoulements élémentaires :

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots \quad (1.148)$$

1.13.3. Ecoulements potentiels élémentaires exprimés sous forme complexe

1.13.3.1. Ecoulement uniforme rectiligne

Considérons l'écoulement uniforme rectiligne dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$$F(z) = U.z \quad (1.149)$$

Où : U : est une constante réelle positive.

$$z = x + iy$$

Ainsi,

$$f(z) = U(x + iy) = Ux + iUy = \Phi + i\Psi \quad (1.150)$$

Où l'on peut identifier le potentiel des vitesses (partie réelle) et la fonction de courant (partie imaginaire) :

$$\begin{cases} \Phi = Ux \\ \Psi = Uy \end{cases} \quad (1.151)$$

Les lignes de courant sont telles que,

$$\Psi = Uy = Cte$$

Il s'agit donc de droites horizontales parallèles à l'axe Ox .

Les équipotentiels sont telles que,

$$\Phi = Ux = Cte$$

Il s'agit alors de droites verticales parallèles à l'axe Oy .

Comme il se doit, on remarque que les lignes de courant sont de fait orthogonales aux équipotentiels.

On peut par ailleurs en déduire le champ de vecteurs vitesse en utilisant soit la fonction de courant, soit le potentiel des vitesses :

$$v_x = u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U$$

$$v_y = v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

D'où, $\vec{V} = U\vec{i}$ en tout point de l'écoulement, correspondant à un écoulement uniforme de vitesse U selon l'axe Ox , comme le montre la **Fig. 1.18**.

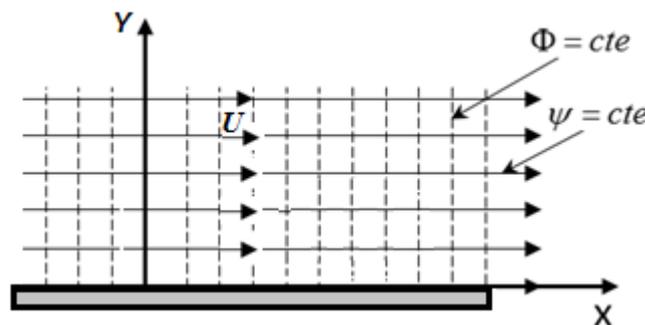


Figure 1.18 Écoulement uniforme

1.13.3.2. Écoulement plan autour d'une source ou autour d'un puits

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$$f(z) = C \ln z \quad (1.152)$$

Où : C est une constante réelle.

Pour faciliter le traitement mathématique, il conviendra de travailler préférentiellement en coordonnées cylindriques ; ainsi :

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

Et,

$$f(z) = C \ln z = C \ln(re^{i\theta}) = C \ln r + iC\theta = \Phi + i\Psi \quad (1.153)$$

Où l'on peut identifier le potentiel des vitesses (partie réelle) et la fonction de courant (partie imaginaire) :

$$\Phi(r, \theta) = C \ln r \quad (1.154)$$

$$\Psi(r, \theta) = C\theta \quad (1.155)$$

Les lignes de courant sont telles que,

$$\Psi(r, \theta) = C\theta = Cte \quad (1.156)$$

Ce qui fait $\theta = Cte$ quel que soit, r .

Autrement dit il s'agit de droites passant toutes par l'origine du repère. Les équipotentielles doivent vérifier que :

$$\Phi(r, \theta) = C \ln r = Cte \quad (1.157)$$

Ce qui fait $r = Cte$ quel que soit, θ .

Il s'agit de cercles tous centrés sur l'origine du repère. On vérifie bien ainsi qu'en tout point de l'écoulement les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de courant. Par ailleurs, le champ de vecteurs vitesse s'obtient en calculant :

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{C}{r} \quad (1.158)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (1.159)$$

Donc,

$$\vec{V} = \frac{C}{r} \vec{e}_r \quad (1.160)$$

Il s'agit donc d'un **écoulement radial**, centré sur l'origine du repère, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine (voir **Fig. 1.19**). On remarquera que selon le signe de la constante C , l'écoulement peut être divergent ou convergent selon le cas :

Si $C > 0$, alors l'écoulement est divergent et correspond à l'effet d'une **source à l'origine** ;

Si $C < 0$, alors l'écoulement est convergent et correspond à l'effet d'un **puits à l'origine**.

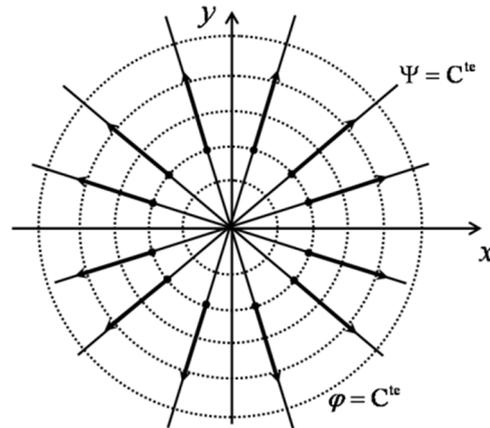


Figure 1.19 Écoulement plan autour d'une source ou autour d'un puits

La signification physique de la constante C est en rapport avec le débit généré par cette source ou ce puits. Pour s'en rendre compte, calculons le débit volumique de l'écoulement radial à travers un cylindre d'axe Oz (perpendiculaire au plan de l'écoulement), de rayon r , et de hauteur unité $\Delta z = 1$.

L'écoulement ayant lieu à travers la surface latérale du cylindre, on peut calculer :

$$q_v = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_0^{2\pi} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot r d\theta \Delta z \quad (1.161)$$

$$\text{Où, } \vec{n} = \vec{e}_r \quad \text{et, } \vec{V} = \frac{C}{r} \vec{e}_r$$

On obtient donc :

$$q_v = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r d\theta = 2\pi C \quad (1.162)$$

Ainsi, indépendamment du cylindre choisi, la constante C est égale, à 2π près, au débit généré par la source ou le puits. C'est la raison pour laquelle on formule communément l'écoulement généré par un puits ($q_v < 0$) ou une source ($q_v > 0$) par :

$$f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln z \quad (1.163)$$

Où, q_v est le débit volumique par unité de hauteur de l'écoulement plan en $\left(\frac{m^2}{s}\right)$.

Remarque

Cette formulation vaut pour un puits ou une source centré à l'origine du repère. On peut très bien envisager un écoulement centré en un point quelconque du plan, de coordonnées :

$$z_0 = x_0 + iy_0, \text{ en formulant simplement } f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln(z - z_0).$$

1.13.3.3. Écoulement à Vortex (tourbillon libre)

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$$f(z) = -iC \ln z \quad (1.164)$$

Où, C : est une constante réelle.

Une nouvelle fois, il est plus approprié de travailler dans un système de coordonnées cylindriques.

Développons cette fonction pour identifier le potentiel des vitesses et la fonction de courant :

$$f(z) = -iC \ln z = -iC \ln(re^{i\theta}) = C\theta - iC \ln r = \Phi + i\Psi \quad (1.165)$$

D'où :

$$\Phi(r, \theta) = C\theta \quad (1.166)$$

$$\Psi(r, \theta) = -C \ln r \quad (1.167)$$

Les lignes de courant sont telles que, $\Psi(r, \theta) = -C \ln r = Cte$

Il s'agit de cercles tous centrés sur l'origine du repère.

Les équipotentiels doivent vérifier que :

$$\Phi(r, \theta) = C\theta = Cte \rightarrow \theta = Cte$$

Il s'agit de droites passant toutes par l'origine du repère. On vérifie encore qu'en tout point de l'écoulement les équipotentiels sont orthogonales aux lignes de courant.

Par ailleurs, le champ de vecteurs vitesse s'obtient en calculant :

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0 \quad (1.168)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{C}{r} \quad (1.169)$$

Donc,

$$\vec{V} = \frac{C}{r} \vec{e}_\theta \quad (1.170)$$

On a donc un **écoulement orthoradial**, tournant autour de l'origine du repère, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine (voir **Fig. 1.20**). On notera la différence avec l'écoulement radial généré par un puits ou une source : les lignes de courant et les équipotentiels sont inter-changées. Par ailleurs, le signe de la constante C définit le sens de rotation :

- Si $C > 0$, le **vortex** tourne dans le sens trigonométrique ;
- Si $C < 0$, il tourne dans le sens horaire.

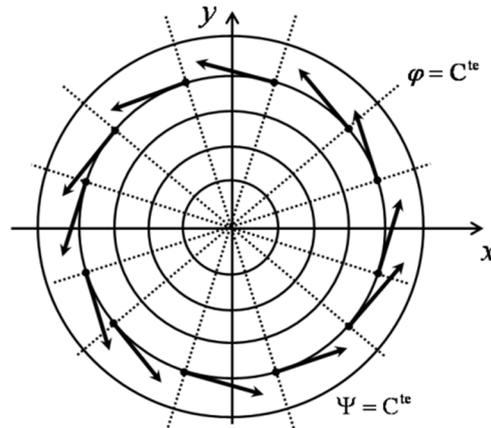


Figure 1.20 *Ecoulement vortex*

La signification physique de la constante C est en rapport avec la **circulation du vecteur vitesse** autour de l'origine du vortex. Pour le comprendre, calculons la circulation du vecteur vitesse le long d'une ligne de courant définie par un cercle de rayon r centré sur l'origine ; on a ainsi :

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \vec{V} r d\theta \vec{e}_\theta = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r d\theta = 2\pi C$$

On en déduit que la circulation est une propriété intrinsèque du vortex. En conséquence, on formulera plus communément le potentiel complexe des vitesses correspondant à un vortex en faisant apparaître sa circulation :

$$f(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

Où :

Si $\Gamma > 0$, le fait tourner dans le sens trigonométrique ;

Si $\Gamma < 0$, le fait tourner dans le sens horaire.

Remarque

Cette formulation vaut pour un vortex tournant autour de l'origine du repère. On peut très bien envisager un vortex tournant autour d'un point quelconque du plan, de coordonnées :

$$z_0 = x_0 + iy_0, \text{ en formulant simplement, } f(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0).$$

1.14. Utilisation des transformations conformes

L'utilisation des transformations conformes est un moyen puissant permettant l'étude des écoulements autour de profils quelconques. En effet, considérons un écoulement dans un plan et défini par le potentiel complexe $f(z)$ et de vitesse complexe, $u = \frac{df}{dz}$.

Effectuons sur le plan des z une transformation biunivoque $z = h(Z)$ faisant correspondre aux points m d'affixe z des points M d'affixe Z et au domaine d , le domaine D du plan des Z .

La vitesse complexe U de l'écoulement dans D est alors donnée par $U = uh'(Z)$. On montre que les transformations conformes conservent les débits et les circulations ; elles transforment les sources et les tourbillons en sources et tourbillons de même intensité.

La détermination du mouvement autour d'un profil quelconque revient à trouver la transformation conforme permettant de transformer l'extérieur du profil en un cercle puisque l'écoulement autour de celui-ci est parfaitement connu. Cette technique est très précieuse pour la détermination des meilleurs profils d'ailes d'avions.



Exercices Corrigés

Exercice 01 :

On considère l'écoulement défini en variables de Lagrange par :

$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t^2 \\ z = c + \gamma t^3 + c\alpha t \end{cases}$$

Donner la vitesse \vec{V} de cet écoulement en variables d'Euler.

Solution :

On vérifie qu'en $t = 0$, on a : $\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$

Les variables (a, b, c, t) sont les variables de Lagrange. Exprimons la vitesse en variables de Lagrange :

$$u = \frac{dx}{dt} = \alpha \quad ; \quad v = \frac{dy}{dt} = 2\beta t \quad ; \quad w = \frac{dz}{dt} = 3\gamma t^2 + c\alpha$$

La vitesse $\vec{V}(u, v, w)$ est une variable d'Euler. Elle est exprimée en fonction de a, b et c .

Essayons de l'exprimer en fonction des variables (x, y, z) de Lagrange.

Sur la base des données de l'énoncé, on a :

$$a = x - \alpha t \quad ; \quad b = y - \beta t^2 \quad ; \quad c = \frac{z - \gamma t^3}{1 + \alpha t}$$

En portant ces expressions dans ceux de (u, v, w) , on obtient :

$$\begin{cases} u = \alpha \\ v = 2\beta t \\ w = 3\gamma t^2 + \frac{\alpha(z - \gamma t^3)}{1 + \alpha t} \end{cases}$$

Exercice 02 :

On considère l'écoulement défini en variables d'Euler par :

$$\begin{cases} u = \omega x \\ v = \omega y \\ w = -\omega x + \alpha t \end{cases} \quad \text{Où, } \omega \text{ est non nul.}$$

1. Cet écoulement est-il stationnaire (permanent), incompressible ?
2. Déterminer les trajectoires.
3. Déterminer les lignes de courant à l'instant t_1 .

Solution :

1. Si $\alpha \neq 0$, l'écoulement n'est pas stationnaire. Mais si, $\alpha = 0$, l'écoulement est stationnaire.

Un écoulement est incompressible si, $\text{div}\vec{V} = 0$.

Alors,

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2w \neq 0 ; \text{ Donc l'écoulement n'est pas incompressible.}$$

2. Les équations différentielles des trajectoires sont les suivantes :

$$\frac{dx}{\omega x} = \frac{dy}{\omega y} = \frac{dz}{-\omega x + \alpha t} = dt$$

$$\text{De, } \frac{dx}{\omega x} = dt \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \omega dt$$

Par intégration, on obtient : $x = x_0 e^{\omega t}$

De même, $y = y_0 e^{\omega t}$

Si $x = x_0$ et $y = y_0$ en $t = 0$.

On écrit pour z , $z = -x_0 e^{\omega t} + \alpha \frac{t^2}{2} + k$

Si $z = z_0$ en $t = 0$, alors, $k = x_0 + z_0$. On aura donc :

$$z = x_0(1 - e^{\omega t}) + \alpha \frac{t^2}{2} + z_0$$

Les trois trajectoires recherchées sont exprimés par les relations de x , y et z issues de l'intégration.

Exercice 03 :

Considérons le champ de vitesse d'un écoulement de fluide incompressible donnée par :

$$\vec{V} = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j}$$

1. Calculez l'accélération matérielle au point $(x, y) = (2, 3)$.
2. Esquissez également les vecteurs d'accélération du fluide.

Solution :

1°- Utilisons l'équation de l'accélération matérielle en coordonnées cartésiennes.

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Et,

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

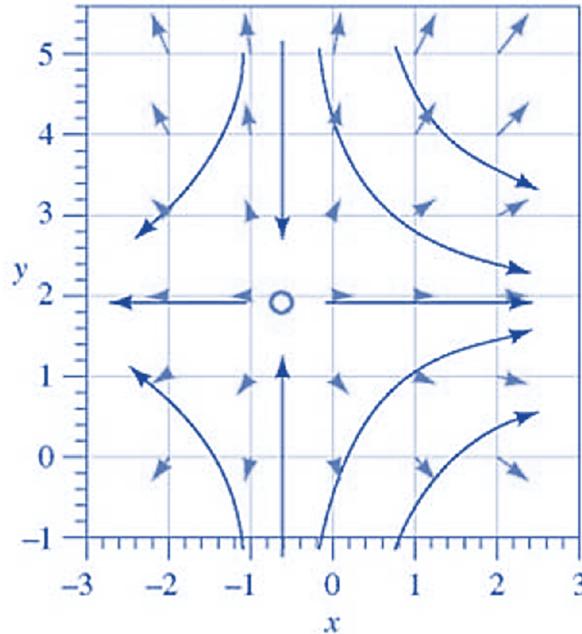
On obtient :

Au point : $(x, y) = (2, 3)$, l'accélération matérielle est :

$$a_x = 1.68 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = 0.72 \text{ m/s}^2.$$

2°- Esquisse des vecteurs d'accélération du fluide



Exercice 04 :

Le champ des vitesses d'un écoulement est donné par :

$$\vec{V} = (4 + xy + 2t)\vec{i} + 6x^3\vec{j} + (3xt^2 + z)\vec{k}$$

Déterminer :

- 1- l'accélération particulaire (matérielle) du fluide ;
- 2- l'accélération matérielle au point A (1, 1, 1) et à t = 1.

Solution:

1. L'accélération particulaire est donnée par les équations suivantes :

$$a_x = \frac{DU}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{DW}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

D'après le champ de vitesse donné, on a :

$$u = 4 + xy + 2t$$

$$v = 6x^3$$

$$w = 3xt^2 + z$$

Donc,

$$a_x = 2 + (4 + xy + 2t)(y) + 6x^3(x) + (3xt^2 + z)(0)$$

$$a_y = 0 + (4 + xy + 2t)(18x^2) + 6x^3(0) + (3xt^2 + z)(0)$$

$$a_z = 6xt + (4 + xy + 2t)(3t^2) + 6x^3(0) + (3xt^2 + z)(1)$$

Alors,

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = (2 + 4y + xy^2 + 2ty + 6x^4) \vec{i} + (72x^2 + 18x^3y + 36tx^2) \vec{j} + (6xt + 12t^2 + 3xyt^2 + 6t^3 + 2 + 3xt^2) \vec{k}$$

2. Le vecteur d'accélération au point A (1, 1, 1) et t = 1

$$\vec{a} = (2 + 4 + 1 + 2 + 6) \vec{i} + (72 + 18 + 36) \vec{j} + (6 + 12 + 3 + 6 + 2 + 3) \vec{k}$$

$$\vec{a} = 15 \vec{i} + 126 \vec{j} + 32 \vec{k}$$

Exercice 05 :

Le champ de vitesse d'un écoulement est donné par :

$$\vec{V} = Axy \vec{i} + By^2 \vec{j} \quad \text{On donne : } A = 1 [1/m.s] \text{ et } B = -0,5 [1/m.s]$$

1. Vérifier si cet écoulement est conservatif ?
2. Déterminer l'équation des lignes de courant de cet écoulement
3. Représenter la fonction de courant pour : x, y ≥ 0

Solution :

1. Nous devons montrer que, $div \vec{V} = 0$.

Pour cela, il nous suffit de vérifier que l'équation suivante est vraie :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

D'après le champ de vitesse donné, on a :

$$\frac{\partial Axy}{\partial x} + \frac{\partial By^2}{\partial y} = Ay + 2By = y - y = 0$$

L'équation de continuité est vérifiée, le fluide est bien conservatif.

2. Les lignes de courant sont tangentes aux vecteurs de vitesses, on écrit donc :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Pour $\vec{V} = Axy\vec{i} + By^2\vec{j}$ On a : $u = Axy$, $v = By^2$

Alors,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{By^2}{Axy} = \frac{By}{Ax}$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on fait une séparation de variables ensuite on intègre.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{B}{A} \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \frac{B}{A} \ln x + c$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{B}{A}} + \ln c \quad \text{Avec, } c = \ln c$$

Donc :

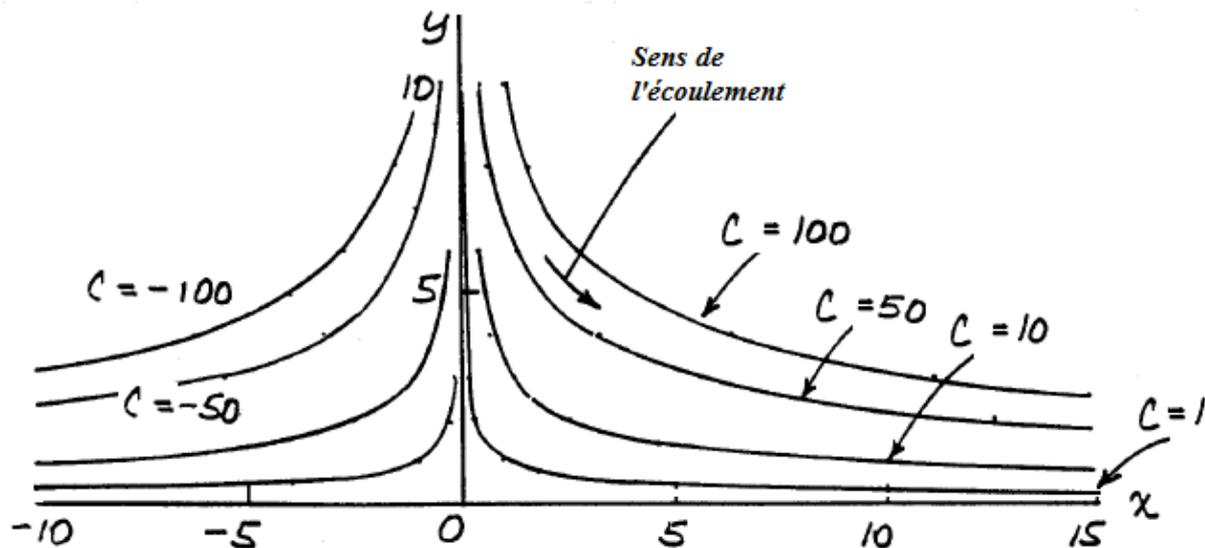
$$y = cx^{\frac{B}{A}}$$

3. Pour un champ de vitesse donné, les constantes A et B sont fixes. Différentes lignes de courant peuvent être obtenues en attribuant différentes valeurs à la constante d'intégration, c .

Puisque $A = 1 \text{ l/m.s}$, et $B = -0.5 \text{ l/m.s}$ alors $\frac{B}{A} = -\frac{0.5}{1.0} = -\frac{1}{2}$ et les lignes de courant sont données par l'équation.

$$y = cx^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{x^{\frac{1}{2}}} \quad \text{Il s'agit de lignes hyperboliques.}$$

Pour $c = 0$, $y = 0$ pour tout x et pour $x = 0$ pour tout y .



Exercice 06 :

On considère un écoulement permanent défini dans un repère $(0, x, y, z)$ par le champ des vitesses suivant, en variables d'Euler :

$$\vec{V} \begin{cases} u = 2x - 3z \\ v = 0 \\ w = 3x - 2z \end{cases}$$

1°/ Montrer que le fluide est conservatif (incompressible).

2°/ Calculer le champ du vecteur d'accélération, \vec{A} .

3°/ Déterminer l'équation des lignes de courant.

Solution :

1°- Nous devons montrer que, $\text{div}\vec{V} = 0$.

Pour cela, il nous suffit de vérifier que l'équation suivante est vraie :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

D'après le champ de vitesse donné, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2 + 0 - 2 = 0$$

L'équation de continuité est vérifiée, le fluide est bien conservatif (incompressible).

2°- L'accélération est définie par :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}$$

L'écoulement est permanent d'où, $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ et donc,

$$\vec{a} = (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V}$$

$$a_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = (2x - 3z) \frac{\partial}{\partial x} (2x - 3z) + (3x - 2z) \frac{\partial}{\partial z} (2x - 3z)$$

$$a_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$a_z = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = (2x - 3z) \frac{\partial}{\partial x} (3x - 2z) + (3x - 2z) \frac{\partial}{\partial z} (3x - 2z)$$

On obtient, donc :

$$\vec{a} = -5x\vec{i} + 0\vec{j} - 5z\vec{k}$$

3°- Les lignes de courant sont définies par :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Nous avons $v = 0$. L'écoulement se situe dans le plan Oxz .

Nous allons transformer cette équation,

$$\frac{dx}{2x - 3z} = \frac{dz}{3x - 2z}$$

Ce qui nous donne

$$(3x - 2z)dx = (2x - 3z)dz$$

Puis,

$$3xdx - 2d(xz) + 3zdz = 0$$

Par intégration, on obtient :

$$\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}z^2 - 2xz = Cte$$

Exercice 07 :

Le champ de vitesse d'un écoulement permanent, incompressible et plan en $X-Y$ est donné par :

$$\vec{V} = ax\vec{i} - by\vec{j} \quad \text{Avec, } a = b = 1 [1/s]$$

1. Trouver l'équation des lignes de courant de l'écoulement.
2. Représenter les lignes de courant pour : $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Solution :

La pente de la ligne de courant dans le plan $X-Y$ est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Pour $\vec{V} = ax\vec{i} - by\vec{j}$ On a : $u = ax$, $v = -by$

Alors,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{by}{ax}$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on fait une séparation de variables ensuite on intègre.

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{b dx}{a x}$$

$$\ln y = -\frac{b}{a} \ln x + c$$

$$\ln y = \ln x^{-\frac{b}{a}} + \ln c \quad \text{Avec, } c = \ln c$$

Donc :

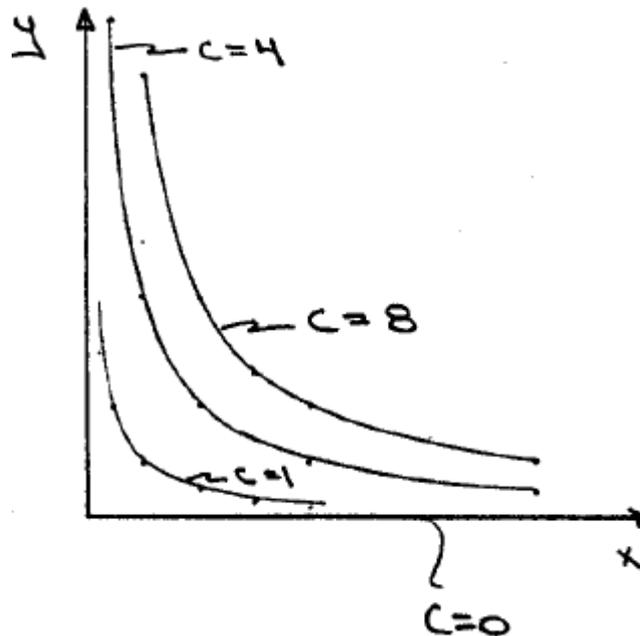
$$y = cx^{-\frac{b}{a}}$$

Pour un champ de vitesse donné, les constantes a et b sont fixes. Différentes lignes de courant peuvent être obtenues en attribuant différentes valeurs à la constante d'intégration, c .

Puisque $a = b = 1 \text{ sec}^{-1}$, alors $b/a = 1$ et les lignes de courant sont données par l'équation.

$$y = cx^{-1} = \frac{c}{x} \quad \text{Il s'agit de lignes hyperboliques.}$$

Pour $c = 0$, $y = 0$ pour tout x et pour $x = 0$ pour tout y .



Exercice 08 :

Le champ de vitesse d'un écoulement est donné par :

$$\vec{V} = ax^2\vec{i} + bxy\vec{j} \quad \text{Avec, } a = 2 [1/m.s] ; b = -4 [1/m.s].$$

1. Est-ce que cet écoulement est permanent ?
2. Quel est le type de l'écoulement ? pourquoi ?
3. Déterminer les composantes vitesses au point $(x, y, z) = (2, \frac{1}{2}, 0)$
4. Déterminer l'équation de lignes de courant $y = f(x)$ de l'écoulement à travers le point précédent.
5. Représenter les lignes de courant pour : $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Solution :

1. D'après le champ de vitesse donné, $\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$, donc l'écoulement est permanent.

2. D'après le champ de vitesse donnée : $\vec{V} = ax^2\vec{i} + bxy\vec{j}$ On peut dire que l'écoulement est bidimensionnel (plan), parce qu'on voit que le vecteur vitesse n'a que deux composantes,

$$u = ax^2 \text{ et } v = bxy, w = 0$$

3. La vitesse au point $(x, y, z) = (2, \frac{1}{2}, 0)$

$$\vec{V} = ax^2\vec{i} + bxy\vec{j} = 2(2^2)\vec{i} - 4(2)\left(\frac{1}{2}\right)\vec{j} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} u = 8 \text{ m/s} \\ v = -4 \text{ m/s} \end{cases}$$

4. La pente de la ligne de courant dans le plan X-Y est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

$$\text{Pour } \vec{V} = ax^2\vec{i} + bxy\vec{j} \quad \text{On a : } u = ax^2, \quad v = bxy$$

Alors,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{bxy}{ax^2} = \frac{by}{ax}$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on fait une séparation de variables ensuite on intègre.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{b}{a} \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \frac{b}{a} \ln x + c$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{b}{a}} + \ln c \quad \text{Avec, } c = \ln c$$

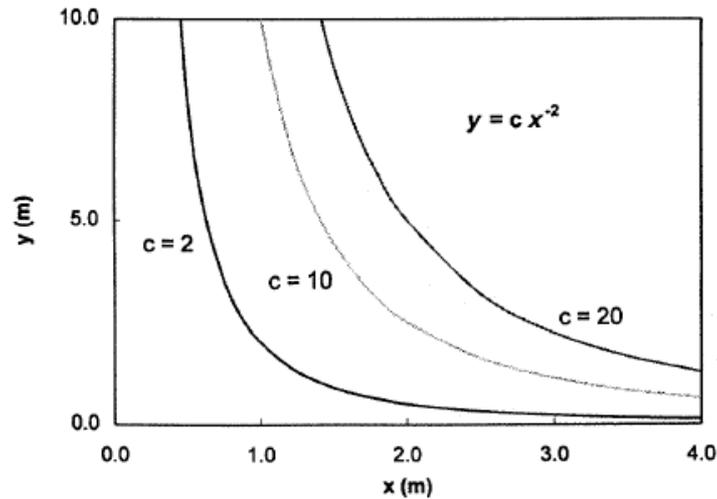
Donc :

$$y = cx^{\frac{b}{a}} \quad \text{Avec, } \frac{b}{a} = -2, \quad \text{il vient donc : } y = \frac{c}{x^2}$$

$$\text{Au point, } (x, y, z) = (2, \frac{1}{2}, 0), c = x^2y = (2)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ m}^3$$

$$\text{Alors, } y = \frac{2}{x^2}$$

5. Plusieurs lignes de courant peuvent être obtenues en attribuant différentes valeurs à la constante d'intégration, c .

**Exercice 09 :**

Dans un champ de vitesse d'un écoulement de fluide parfait incompressible. Le fluide s'écoule dans un tube d'axe vertical (Oz) de section non-uniforme. Le régime d'écoulement étant permanent. Le champ de vitesses en coordonnées cylindriques est de la forme :

$$\vec{V} = 2kr\vec{u}_r + k'z\vec{U}_z$$

1. a) Exprimer k' en fonction de k ;
b) Montrer que l'écoulement est irrotationnel
2. Déterminer le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ en chaque point $M(r, \theta, z)$
3. Déterminer la fonction potentiel de vitesse $\Phi(r, \theta, z)$ et calculer son Laplacien $\Delta\Phi$
4. Déterminer l'équation des lignes de courant ensuite procéder à sa représentation

On rappelle que : En coordonnées cylindriques, pour : $A(A_r, A_\theta, A_z)$,

$$\text{Div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} ; \quad \text{grad} A = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

$$\text{rot} A = \left(\frac{\partial A_z}{r \partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{U}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{U}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{U}_z$$

Solution :

1°) Fluide incompressible si, $\text{div} \vec{V} = 0$

En coordonnées cylindriques :

$$\text{Div } \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 4k + k' = 0$$

On obtient, $k' = -4k$

2°) On peut donc exprimer : $\vec{V}(r, z) = 2k(r\vec{u}_r - 2z\vec{u}_z)$

Alors :

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \left(\frac{\partial V_z}{r\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial\theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\text{Or, } V_\theta = 0, \quad V_r = 2kr, \quad V_z = -4kz$$

Il vient donc :

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = (0)\vec{u}_r + (0)\vec{u}_\theta + (0)\vec{u}_z$$

$$\text{Donc, } \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{0} \quad \text{l'écoulement est bien irrotationnel.}$$

3°) La fonction potentiel de vitesses, $\Phi(r, \theta, z)$

On vient de montrer que l'écoulement est irrotationnel, c'est donc un écoulement potentiel, c'est-à-dire que le champ de vitesses dérive d'un potentiel.

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\Phi = \begin{cases} V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \\ V_\theta = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \\ V_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{V} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \vec{u}_z = \overrightarrow{grad}\Phi, \quad \text{Avec, } V_\theta = 0.$$

$$\text{Soit : } d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz = V_r dr + V_z dz$$

$$d\Phi = 2krdr - 4kzdz$$

Par intégration, il vient :

$$\Phi(r, z) = \int d\Phi = 2k \int r dr - 2k \int z dz + c = k(r^2 - 2z^2) + c$$

$$\Phi(r, z) = k(r^2 - 2z^2) + c$$

Le Laplacien de : $\Phi(r, z) = k(r^2 - 2z^2) + c$

$$\Delta\Phi(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

Donc, $\Phi(r, z)$ obéit à l'équation de Laplace.

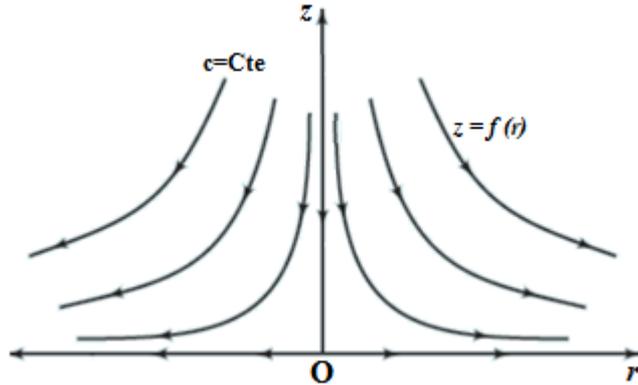
4°) L'équation des lignes de courant

Les lignes de courant sont définies par :

$$\frac{dr}{V_r} = \frac{d\theta}{V_\theta} = \frac{dz}{V_z} \Rightarrow \frac{dr}{2kr} = \frac{dz}{-4kz} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{dz}{-2z} \Rightarrow \frac{2dr}{r} + \frac{dz}{z} = 0 \Rightarrow r^2 z = c$$

Alors, on obtient : $z = \frac{c}{r^2}$ ce sont des hyperboles équilatères qui admettent les axes Oz et

Or comme asymptotes.



Exercice 10 :

Le champ de vitesse pour l'écoulement d'un fluide est donné par la relation suivante :

$$\vec{V} = \left(\frac{V_0}{l}\right) (-x\vec{i} + y\vec{j}) \quad \text{Où : } V_0 \text{ et } l \text{ sont des constantes.}$$

1. Déterminer si l'écoulement est incompressible ?
2. Déterminer la fonction du courant de l'écoulement
3. Représenter la fonction de courant dans un plan xOy .
4. A quel point de l'écoulement, la vitesse sera égale à V_0 ?

Solution :

1. L'écoulement est-il incompressible ?

Nous devons montrer que, $\text{div}\vec{V} = 0$

$$\text{div}\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \left(-\frac{V_0 x}{l}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{V_0 y}{l}\right)}{\partial y} = -\frac{V_0}{l} + \frac{V_0}{l} = 0$$

Donc, l'écoulement est incompressible (conservatif).

2. Détermination de la fonction de courant de l'écoulement

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{\frac{V_0}{l}y}{-\frac{V_0}{l}x} = -\frac{y}{x}$$

Par une séparation de variables, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Par intégration, on aura :

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x}$$

Or

$$\ln y = -\ln x + c$$

Ce qui donne :

$$xy = c, \quad \text{où, } c \text{ une constante.}$$

Enfin, on aura : $y = \frac{c}{x}$

3. En attribuant à c plusieurs valeurs, on peut tracer plusieurs lignes de courant dans le plan (xOy) .

4. Le point de l'écoulement ou la vitesse sera égale à V_0

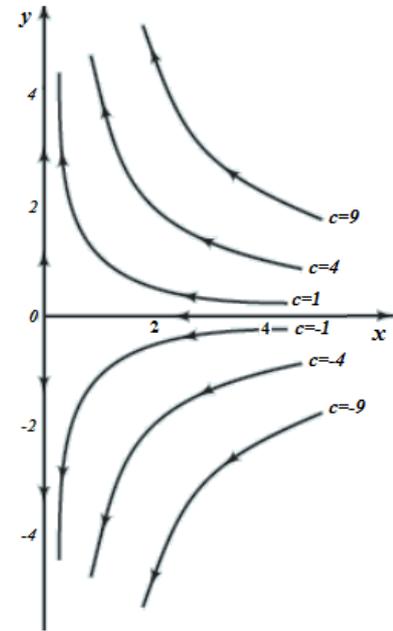
On a :

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{V_0}{l} \sqrt{x^2 + y^2}$$

La vitesse $V = V_0$ en tout point du cercle de rayon l centrée au point où :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = l$$

Cette situation nécessite une étude de plusieurs cas de figure.



Exercice 11 :

Pour les écoulements permanents, incompressibles et plans en XY suivants :

a. $\vec{v} \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = -2xy \end{cases}$

b. $\vec{v} \begin{cases} u = 9xy + y \\ v = 8xy + 2x \end{cases}$

Vérifier s'il y a conservation de masse pour ces écoulements.

Solution :

La conservation de masse est satisfaite si :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ (Eq. de continuité)}$$

a. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xy) = 0 \Rightarrow 2x - 2x = 0$

La masse est donc conservée. Un tel écoulement est possible. Le champ de vitesse est représenté ci-dessous.

b. $\frac{\partial}{\partial x}(9xy + y) + \frac{\partial}{\partial y}(8xy + 2x) = 9y + 8x \neq 0,$

Il n'y a pas de conservation de masse, un tel écoulement n'est donc pas possible.

Exercice 12 :

Le champ de vitesse d'un écoulement bidimensionnel est défini par :

$$\vec{V} = y\vec{i} - x\vec{j}$$

Déterminer l'équation de la ligne de courant passant par le point $(1, 0)$.

Solution :

L'équation de ligne de courant est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad \text{D'où,} \quad udy - vdx = 0$$

Alors,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \quad \rightarrow \quad ydy = -x dx$$

Par intégration, on aura :

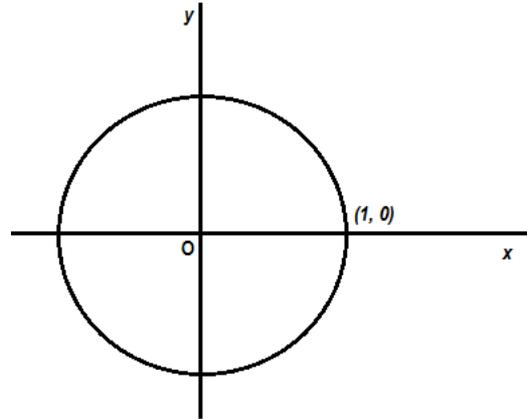
$$x^2 + y^2 = c \quad \text{Où, } c : \text{ est une constante}$$

d'intégration

Pour la ligne de courant passant par le point $(x, y) = (1, 0)$

On trouve que, $c = 1$

Donc, l'équation de ligne de courant est : $x^2 + y^2 = 1$.



Exercice 13 :

Vérifier si les fonctions suivantes, $\Phi(x, y)$, représentent des écoulements plans en XY , à potentiel de vitesses.

$$i) \quad \Phi_1 = Kx^3; \quad ii) \quad \Phi_2 = Ux; \quad iii) \quad \Phi_3 = Vy$$

Solution :

Pour des écoulements plans, il existe un potentiel des vitesses Φ , tel que :

$$\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$i) \quad \nabla^2\Phi_1 = \frac{\partial^2 Kx^3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Kx^3}{\partial y^2} = 6Kx \neq 0 \quad \text{Donc, } \Phi_1 \text{ n'est pas une fonction à potentiel de vitesses.}$$

$$ii) \quad \nabla^2\Phi_2 = \frac{\partial^2 Ux}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Ux}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Donc, } \Phi_2 \text{ est une fonction à potentiel de vitesses.}$$

$$iii) \quad \nabla^2\Phi_3 = \frac{\partial^2 Vy}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Vy}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Donc, } \Phi_3 \text{ est une fonction à potentiel de vitesses.}$$

Exercice 14 :

Chacune des fonctions suivantes, $\Phi_2 = Ux$ et $\Phi_3 = Vy$ est un potentiel des vitesses (voir exercice précédent).

1°) Montrer que la somme de ces deux fonctions donne aussi un potentiel des vitesses.

2°) Représenter ensuite les lignes équipotentielles ainsi que les lignes de courant.

Solution :

1°) La nouvelle fonction est alors : $\Phi = \Phi_2 + \Phi_3 = Ux + Vy$

Elle pourra représenter un potentiel de vitesse si l'équation de Laplace est satisfaite, donc :

$$\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{\partial^2(Ux + Vy)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(Ux + Vy)}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

Donc, $\Phi = Ux + Vy$ est un potentiel de vitesses.

2°) Les équipotentielles sont données par :

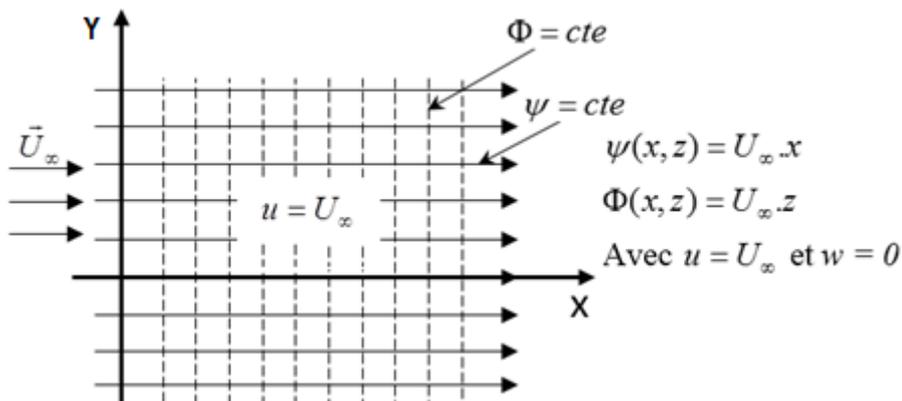
$$\Phi(x, y) = Cte$$

Alors, $\Phi = Ux + Vy = C_1 \Rightarrow y = \left(-\frac{U}{V}\right)x + C_1$ cette équation représente une famille de droites avec une pente de $-(U/V)$, voir figure ci-dessous.

Selon les conditions de Cauchy-Riemann, il y a orthogonalité entre les équipotentielles, Φ et les lignes de courant, Ψ . Ces dernières sont données par :

$$y = -\left(-\frac{U}{V}\right)^{-1}x + C_2 = \frac{V}{U}x + C_2$$

Cette équation représente une famille de droites avec une pente de (V/U) , comme on peut le constater sur la figure ci-dessous.

**Exercice 15 :**

Un écoulement plan de fluide incompressible peut être décrit avec la fonction de courant suivante :

$$\Psi = Axy \quad \text{Où, } A : \text{ est une constante.}$$

Déterminer :

- les composantes de vitesse de l'écoulement ;
- représenter les lignes de courant de l'écoulement.

Solution :

a) Les composantes de vitesse de l'écoulement sont :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial(Axy)}{\partial x} = Ay \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial(Axy)}{\partial y} = Ax$$

b) L'équation de ligne de courant est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Alors,

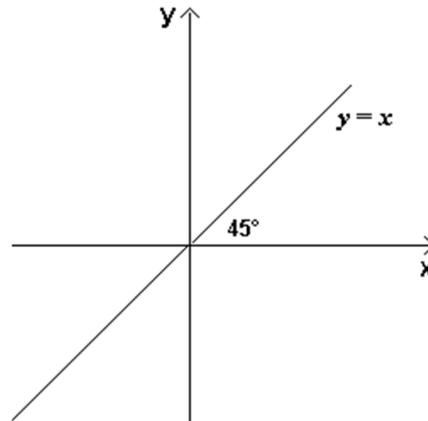
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax}{Ay} = \frac{x}{y} \rightarrow ydy = xdx$$

Par intégration, on aura :

$$y^2 - x^2 = c \quad \text{Où, } c : \text{ est une constante d'intégration}$$

$$y^2 = x^2 + c \rightarrow y = \sqrt{x^2 + c}$$

Pour, $c = 0$, on aura : $y = x$ la ligne de courant est donc la bissectrice.



Exercice 16 :

Trouver et représenter les lignes de courant et les équipotentielles dans le cas suivant :

Le potentiel complexe est : $f(z) = Vz$

Où : V est une constante réelle et $z = x + iy$

Solution :

Le potentiel complexe est : $f(z) = Vz$ où V est une constante réelle et $z = x + iy$.

On a donc, $f(z) = V(x + iy)$

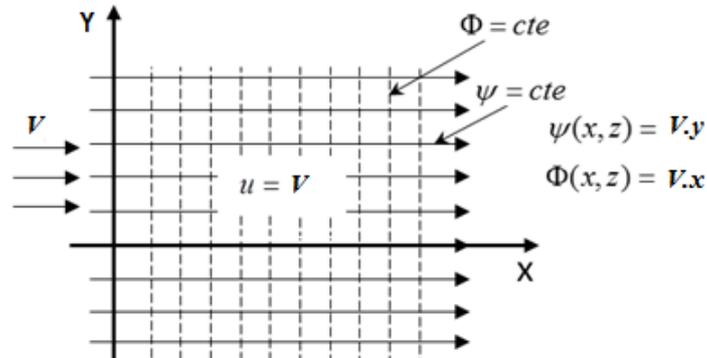
On a de plus $f(z) = \Phi + i\Psi$ avec Φ la fonction potentiel et Ψ la fonction courant.

On obtient donc : $\Phi = Vx$ et $\Psi = Vy$

Les lignes de courant sont données par $\Psi = Vy = Cte$

Les équipotentielles sont données pour $\Phi = Vx = Cte$

Un tel écoulement peut être représenté comme suit :



Exercice 17 :

Trouver et tracer les lignes de courant et les équipotentielles dans le cas suivant :

Le potentiel complexe est : $f(z) = k \cdot \ln(z)$ Avec, k : est une constante réelle.

Solution :

Le potentiel complexe est : $f(z) = k \cdot \ln(z)$ où : k est une constante réelle.

En passant aux coordonnées polaires on aura :

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

$$D'où : f(z) = k \cdot \ln(z) = k \cdot \ln(x + iy) = k \cdot \ln(re^{i\theta})$$

$$f(z) = k \cdot \ln r + ki\theta$$

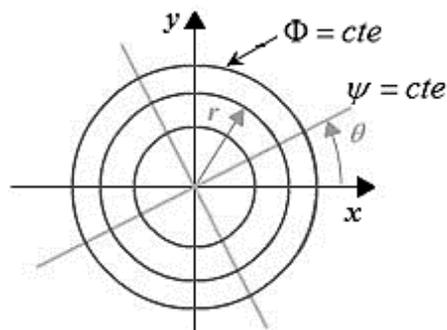
Et comme : $f(z) = \Phi + i\Psi$ Avec : Φ la fonction potentiel et Ψ la fonction courant.

On obtient donc :

$$\Phi(r, \theta) = k \cdot \ln r$$

$$\Psi(r, \theta) = k \cdot \theta$$

Les lignes de courant sont données pour $\Psi = k \cdot \theta = Cte$ et les équipotentielles sont données pour $\Phi = k \cdot \ln r = Cte$, leurs représentations est donnée dans la figure suivante :



Chapitre 2

Théorie de la couche limite

2.1 Introduction

Le concept de couche limite a été introduit pour la première fois par un ingénieur allemand, Prandtl, en 1904. Selon la théorie de Prandtl, lorsqu'un fluide réel s'écoule sur une paroi solide fixe, l'écoulement est divisé en deux régions.

i) Une couche mince au voisinage de la paroi solide où les forces visqueuses et la rotation ne peuvent être négligées.

ii) Une région externe où les forces visqueuses sont très petites et peuvent être négligées. Le comportement de l'écoulement est similaire à l'écoulement libre en amont.

2.2 Définitions et caractéristiques de la couche limite

L'écoulement d'un fluide visqueux sur une paroi solide représente une région dans laquelle la vitesse augmente de zéro à la paroi et s'approche de la vitesse de l'écoulement libre. Cette région s'appelle la couche limite.

La **figure 2.1** montre le développement d'une couche limite sur un côté d'une longue plaque plane parallèle au sens de l'écoulement.

Le gradient de vitesse provoque une contrainte de cisaillement importante au niveau de la paroi τ_0 (ou τ_w). Comme le montre la **figure 2.1** :

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} \quad (2.1)$$

Le gradient de vitesse dans la couche limite turbulente est plus grand que celui dans la couche limite laminaire.

* Une région d'entrée où la couche limite se développe et $\frac{dp}{dx} \neq Cte$, la pression est constante,

* Une région où l'écoulement est complètement établi où :

- La couche limite remplit toute la zone d'écoulement.
- Les profils de vitesse, le gradient de pression, et la contrainte de cisaillement sont constants ; c'est-à-dire qu'ils ne sont pas en fonction de (x),
- L'écoulement est soit laminaire, soit turbulent sur toute la longueur de l'écoulement, c'est-à-dire que la phase de transition n'est pas prise en compte.

Cependant, les caractéristiques de la couche limite d'écoulement visqueux pour les écoulements externes sont comme indiqué ci-dessous pour l'écoulement sur une plaque plane :

Considérons un écoulement sur une plaque plane, comme illustré à la **figure 2.1**.

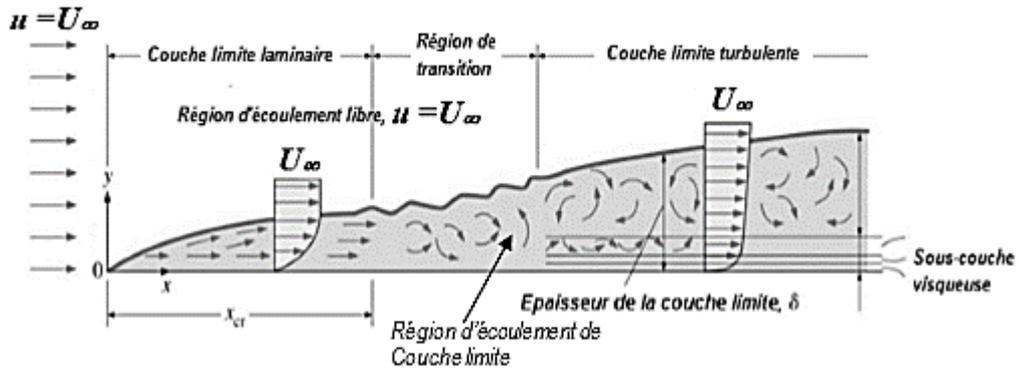


Figure 2.1 Schéma d'écoulement de couche limite sur une plaque plane

L'écoulement sur la plaque peut être divisé en deux domaines.

i) $0 \leq y \leq \delta$ écoulement de couche limite dans laquelle l'effet de force visqueuse est important. En raison de la condition de non-glissement à la paroi, la première couche de fluide subit un retardement. Cette couche retardée provoque un retard supplémentaire pour la couche adjacente, développant ainsi une région mince dans laquelle la vitesse d'écoulement augmente de zéro à la paroi solide et se rapproche de la vitesse de l'écoulement libre.

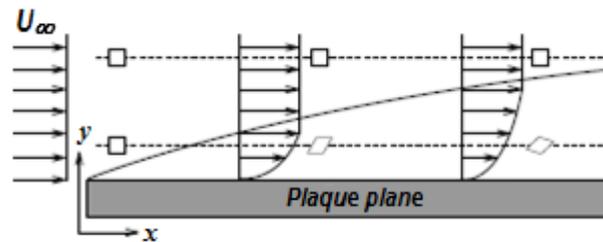


Figure 2.2 Rotation des particules fluides dans la zone de couche limite

En raison de la présence d'un gradient de vitesse à l'intérieur de la région de la couche limite, les particules fluides au sommet commencent à se déformer, lesquelles ont une vitesse supérieure à celle se trouvant en bas. Cette force provoque la rotation de la particule fluide lorsqu'elle pénètre dans la région de la couche limite (voir la **figure 2.2**). Par conséquent, cette couche de fluide est appelée également écoulement rotationnel.

ii) $y > \delta$: Zone d'écoulement externe à la couche limite où la force visqueuse est très faible et peut être négligée. Il n'y a pas de gradient de vitesse dans cette zone et la particule fluide ne fait pas de rotation lorsqu'elle entrera dans la région extérieure à la couche limite. Par conséquent, l'écoulement est également appelé écoulement irrotationnel.

Comme le montre la figure, les conditions de la couche limite sont que le fluide adhère à la paroi solide.

$$u = v = 0 \quad \text{à} \quad y = 0 \quad (2.1)$$

Et à l'extérieur de la couche limite, la vitesse du fluide est égale à la vitesse de l'écoulement libre, c'est-à-dire :

$$u = U_\infty \quad \text{à} \quad y = \delta \quad (2.2)$$

La condition à la limite suivante est également valable pour l'écoulement de couche limite,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{Lorsque} \quad y \geq \delta \quad (2.3)$$

Ceci indique que la distribution de la vitesse est uniforme dans la direction y à l'extérieur de la zone de couche limite.

2.2.1 Épaisseur de couche limite

On distingue trois types d'épaisseur de couche limite, à savoir :

- ✓ Épaisseur conventionnelle de la couche limite, δ
- ✓ Épaisseur de déplacement de la couche limite, δ^*
- ✓ Épaisseur du moment de la couche limite, θ

2.2.2 Épaisseur conventionnelle de couche limite, δ

L'épaisseur de la couche limite est définie comme la distance verticale entre la paroi solide et le point où la vitesse de l'écoulement atteint 99% ($u=0.99 U_\infty$) de la vitesse de l'écoulement libre (Fig.2.3).

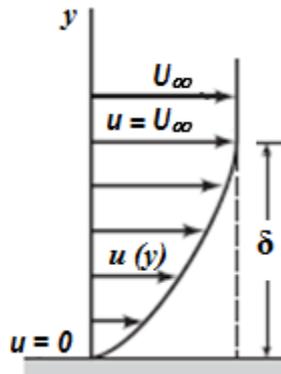


Figure 2.3 Épaisseur conventionnelle de la couche limite

2.2.3 Épaisseur de déplacement de la couche limite, δ^*

L'épaisseur de déplacement représente la distance verticale dans laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut de sorte que le fluide réel ait le même débit massique que le fluide idéal. Considérons deux types d'écoulement de fluide sur une plaque plane horizontale fixe avec une vitesse d'écoulement U_∞ , comme illustré à la **figure 2.4**.

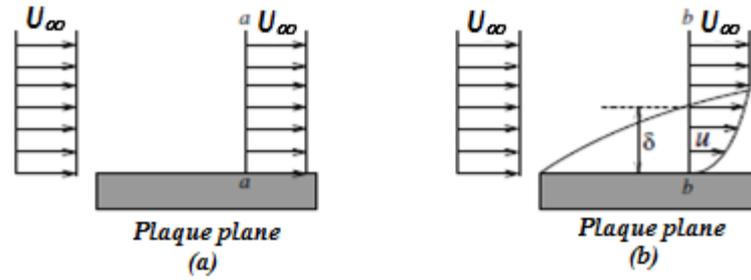


Figure 2.4 Ecoulement sur une plaque plane (a) pour un fluide parfait (b) pour un fluide réel.

En l'absence de viscosité dans le cas d'un fluide parfait (**Figure 2.4 (a)**), un profil de vitesse uniforme est développé au-dessus de la paroi solide. Cependant, dans le cas de fluide visqueux (fluide réel) et pas de glissement sur la paroi, un gradient de vitesse est développé dans la région de la couche limite, comme le montre la **figure 2.4 (b)**.

Le déficit de vitesse à travers la bande d'élément de section transversale b - b (**Fig. 2.5**) est $(U_\infty - u)$. Cependant, le déficit en débit massique est obtenu comme suit :

$$(U_\infty - u)b dy \quad (2.4)$$

Avec, b est la largeur de la plaque.

Le déficit en masse totale due à la présence de viscosité par rapport au cas du fluide parfait.

$$\int_0^\delta \rho(U_\infty - u)b dy \quad (2.5)$$

Cependant, si nous déplaçons la plaque d'une distance δ^* vers le haut dans la section a - a (**Fig. 2.5**) pour donner une réduction de masse de $\rho U_\infty b \delta^*$, le déficit de débits dans les deux cas sera identique si,

$$\int_0^\delta \rho(U_\infty - u)b dy = \rho U_\infty b \delta^* \quad (2.6)$$

Et,

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (2.7)$$

Avec, δ^* est l'épaisseur de déplacement de la couche limite.

L'épaisseur de déplacement représente la distance verticale dans laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut de sorte que le fluide parfait ait le même débit massique que le fluide réel.

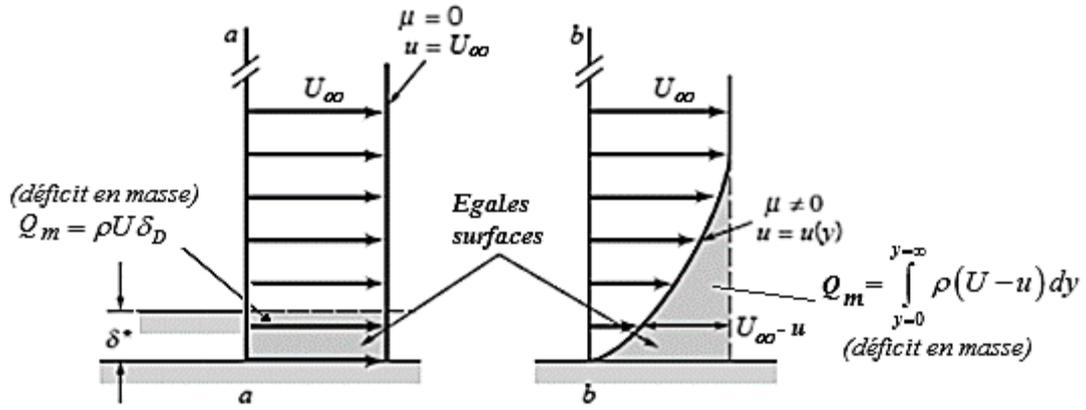


Figure 2.5 Epaisseur de déplacement de couche limite

2.2.4 Epaisseur de quantité de mouvement de la couche limite, θ

Une autre épaisseur de la couche limite, il s'agit de l'épaisseur de quantité de mouvement, elle sert à prédire la force de traînée sur la surface de l'objet (Fig.2.6).

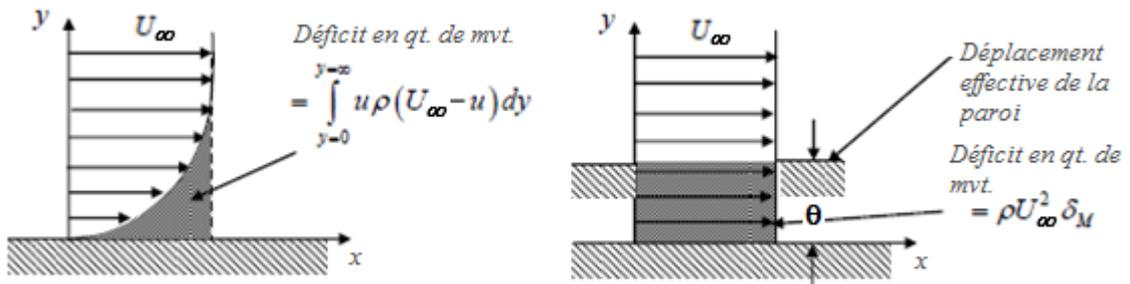


Figure 2.6 Epaisseur de déplacement de quantité de mouvement de couche limite

En référence à la figure 2.6, le déficit de vitesse à travers la bande d'élément de section $b-b$ contribue au déficit de flux de quantité de mouvement comme suit :

$$\rho u(U_\infty - u)b dy \tag{2.8}$$

Ainsi, le déficit total de la quantité de mouvement

$$\int_0^\delta \rho u(U_\infty - u)b dy \tag{2.9}$$

Cependant, si nous déplaçons la plaque d'une distance θ vers le haut à la section $a-a$ pour donner un déficit de quantité de mouvement de $\rho U_\infty^2 b \theta$, le déficit de quantité de mouvement dans les deux cas sera identique si,

$$\int_0^\delta \rho(U_\infty - u)b dy = \rho U_\infty^2 b \theta \tag{2.10}$$

Et,

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (2.11)$$

Ici, θ est l'épaisseur de déplacement de la couche limite.

L'épaisseur de quantité de mouvement représente la distance verticale à laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut, de sorte que le fluide parfait ait la même quantité de mouvement que le fluide réel.

Les trois différentes épaisseurs de la couche limite sont représentées et comparées dans la **figure 2.7** suivante.

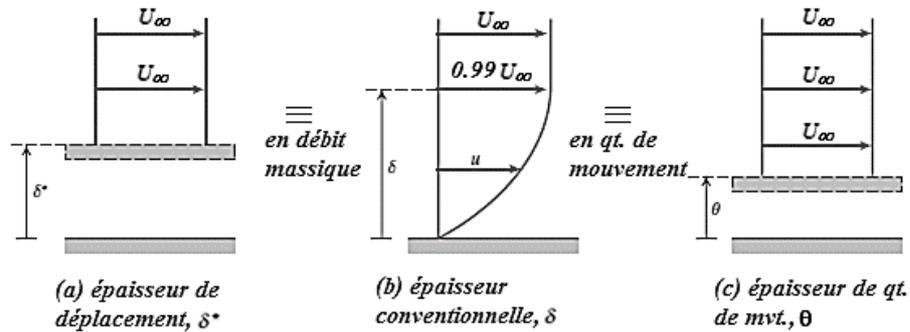


Figure 2.7 Epaisseurs de couche limite

2.3 Equations de la couche limite

Tout d'abord, on résume les principales hypothèses que nous nous sommes déjà fixées sur l'écoulement considéré.

- écoulement laminaire, permanent, bidimensionnel dans le plan (Oxy).
- fluide incompressible ($\rho = Cte$)

L'écoulement est donc décrit par les équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation de continuité, comme suit :

Suivant x,

$$\frac{du}{dt} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

Suivant y,

$$\frac{dv}{dt} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.13)$$

Suivant z,

$$\frac{dw}{dt} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.14)$$

Sous forme vectorielle, elles peuvent être réécrites sous la forme :

$$\rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.15)$$

L'équation de continuité est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial \rho}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (2.16)$$

Compte tenu des hypothèses fixées ci-dessus, pour l'écoulement dans la couche limite. Par conséquent, les équations de Navier-Stokes et celle de continuité de l'écoulement du fluide sont réduites à :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Le système d'équations 2. 19 s'appelle les **équations de couche limite** où (**équations de Prandtl**), elles sont valables seulement dans le domaine de couche limite.

2.3.1 Solution de Blasius de la couche limite sur une plaque plane

En général, la résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires telles que les équations de couche limite, **Eqs. 2.19** est extrêmement difficile à obtenir. Cependant, en 1908 et en appliquant une transformation intelligente des coordonnées et un changement de variables, Blasius, un étudiant de Prandtl, proposa des équations simplifiées pour l'écoulement dans la couche limite en supposant que :

$$v \ll u \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.21)$$

Par conséquent, les équations d'écoulement de fluide sont réduites à :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.22)$$

De l'équation de Bernoulli, on sait que :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \quad (2.23)$$

Ensuite, l'équation dans la couche limite devient

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.24)$$

Pour l'écoulement spécifique sur une plaque plane, on peut supposer une vitesse horizontale uniforme et donc $\frac{\partial U_{\infty}}{\partial x} = 0$, il vient alors,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.25)$$

Ici, nous introduisons l'équation de la fonction de courant comme suit :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.26)$$

En substituant u et v dans l'équation précédente, donne :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (2.27)$$

Blasius a ensuite introduit la variable adimensionnelle $\eta = y \left(\frac{U_{\infty}}{\nu x} \right)^{1/2}$ et la fonction de courant

$\psi = (\nu x U_{\infty})^{1/2} f(\eta)$, où $f(\eta)$ est une fonction inconnue.

En utilisant les lois de dérivation, on obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu U_{\infty}}{x} \right)^{1/2} [f - \eta f'] \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_{\infty} f' \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2x} U_{\infty} \eta f'' \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U_{\infty} \left(\frac{U_{\infty}}{\nu x} \right)^{1/2} f'' \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{U_{\infty}^2}{\nu x} f''' \quad (2.32)$$

$$\text{Où, } f' = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, \quad f''' = \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}$$

En substituant tous les termes de dérivation dans **Eq. (1.19)**, on aboutit à :

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (2.33)$$

Les conditions aux limites de la couche limite décrit précédemment peuvent être exprimées comme suit :

$$f(0)=0; \quad \frac{\partial f(0)}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 1 \text{ Lorsque } \eta \rightarrow \infty$$

La solution de Blasius est tabulée comme suit,

Tableau 2.1 Solution de Blasius

$\eta = y \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2}$	$f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty}$	η	f'
0	0	3.6	0.9233
0.4	0.1328	4.0	0.9555
0.8	0.2647	4.4	0.9759
1.2	0.3938	4.8	0.9878
1.6	0.5168	5.0	0.9916
2.0	0.6298	5.2	0.9943
2.4	0.7290	5.6	0.9975
2.8	0.8115	6.0	0.9990
3.2	0.8767	∞	1.0000

De la solution, on trouve que, $\frac{u}{U_\infty} \cong 0.99$, lorsque $\eta = 5$, donc, à partir des variables de similitude,

$$5 = \delta \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} \quad (2.34)$$

Où,

$$\delta = \frac{5x}{Re_x^{1/2}}, \quad \text{Avec, } Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (2.35)$$

En utilisant certaines manipulations mathématiques, l'épaisseur de déplacement ainsi que celle de quantité de mouvement peuvent être exprimés comme suit :

$$\delta^* = \frac{1.721x}{Re_x^{1/2}} \quad (2.36)$$

Et,

$$\theta = \frac{0.664x}{Re_x^{1/2}} \quad (2.37)$$

La contrainte de cisaillement à la paroi est ensuite déterminée en prenant, $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$, on trouve :

$$\tau_w = 0.332U_\infty^2 \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}} \quad (2.38)$$

2.3.2 Equation intégrale de Von-Karman

L'un des principaux inconvénients de la solution de Blasius est sa limite à l'écoulement laminaire de couche limite sur une plaque plane uniquement. En réalité, la plupart des écoulements sont turbulents. Par conséquent, la demande de remplacer la solution de Blasius par une autre

permettant de prédire l'écoulement turbulent de la couche limite à conduit à un grand travail effectué par Von-Karman en 1921. Von-Karman a formulé une équation générale à partir de la théorie de la conservation de quantité de mouvement qui permet de prédire les écoulements de la couche limite de la région laminaire jusqu'aux régions turbulentes. Son équation contribue à la prédiction de la traînée causée par des forces de cisaillement sur un corps.

Pour voir l'énoncé, considérons un écoulement uniforme sur une plaque plane et le volume de contrôle fixe, comme illustré à la **figure 2.8**.

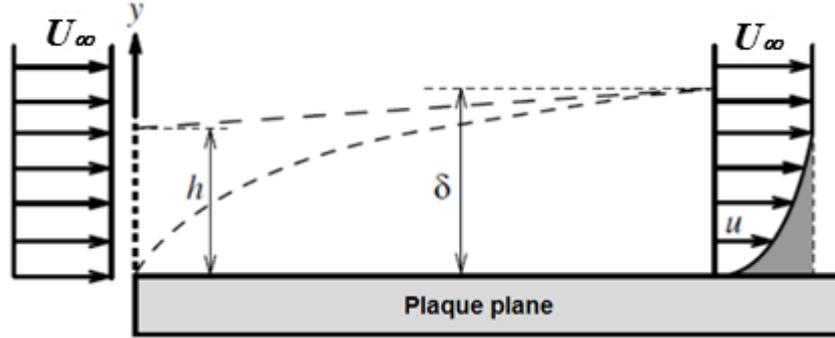


Figure 2.8 Volume de contrôle pour la dérivation de l'équation intégrale de Von-Karman

Nous appliquons la composante horizontale de l'équation de quantité de mouvement. Il donne :

$$\Sigma F_x = \rho \int_1 u \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA + \rho \int_2 u \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.39)$$

Où,

$$\Sigma F_x = \rho \int_1 U_\infty (-U_\infty) dA + \rho \int_2 u^2 dA \quad (2.40)$$

$$\Sigma F_x = -\rho U_\infty^2 b h + \rho b \int_0^\delta u^2 dy \quad (2.41)$$

Comme il n'y a pas d'écoulement transversal dans la ligne de courant, le débit massique doit être égal aux sections (1) et (2).

$$U_\infty b h = \int_0^\delta u b dy \quad (2.42)$$

Qui peut être réécrite comme :

$$\rho U_\infty^2 b h = \rho b \int_0^\delta U_\infty u dy \quad (2.43)$$

Par substitution dans l'équation (2.41), on aura :

$$\Sigma F_x = -\rho b \int_0^\delta U_\infty u dy + \rho b \int_0^\delta u^2 dy \quad (2.44)$$

Donc,

$$\Sigma F_x = -\rho b \int_0^\delta u (U_\infty - u) dy \quad (2.45)$$

Nous pouvons voir que l'éq. (2.45) peut être réécrite en termes d'épaisseur de quantité de mouvement comme suit :

$$\Sigma F_x = -\rho b U_\infty^2 \theta \quad (2.46)$$

Cependant, nous savons que la variation de quantité de mouvement contribue au développement de la force de traînée sur la paroi solide telle que :

$$\Sigma F_x = -D = -\int_{surface} \tau_w dA = -b \int_{surface} \tau_w dx \quad (2.47)$$

Ceci donne :

$$b \int_{surface} \tau_w dx = \rho b U^2 \theta \quad (2.48)$$

Dérivons les deux membres, on obtient :

$$b \tau_w = \rho b U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (2.49)$$

Maintenant, nous avons obtenu l'équation intégrale de Von-Karman (Eq. 2.50) pour l'écoulement de la couche limite sur une plaque plane.

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (2.50)$$

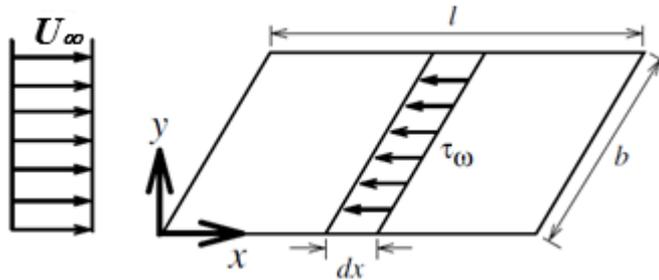


Figure 1.6 Contrainte de cisaillement à la paroi

En se référant à la **Figure 1.6**, la force de traînée sur la surface solide peut être déterminée en considérant la force de traînée sur la petite zone dA comme :

$$dF_D = \tau_w b dx \quad (2.51)$$

Ensuite, la force de trainée totale sur une face de la plaque de longueur L .

$$F_D = \int dF_D = \int_0^L \tau_w b dx \quad (2.52)$$

Il est pratique d'utiliser le coefficient de frottement local c_f et le coefficient de frottement total (de traînée) c_D qui sont :

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (2.53)$$

Et,

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \quad \text{Où, } A : \text{ est la surface totale de la plaque plane (pour ce cas, } A=bl)$$

(2.54)

Respectivement, la solution de Blasius pour ces deux coefficients est :

$$c_f = \frac{0.664}{Re_x^{\frac{1}{2}}} \quad (2.55)$$

$$c_D = \frac{1.328}{Re_L^{\frac{1}{2}}} \quad (2.56)$$

$$\text{Où, } Re = \frac{UL}{\gamma}$$

Ensuite, nous démontrons la dérivation des équations d'épaisseur de couche limite, d'épaisseur de déplacement de couche limite, d'épaisseur d'impulsion de couche limite, de coefficient de frottement local et de coefficient de traînée en fonction de différentes distributions de vitesse en utilisant l'équation intégrale de quantité de mouvement de Von-Karman;

- i) Distribution linéaire de la vitesse
- ii) Distribution polynôme du second ordre de la vitesse
- iii) Distribution polynôme du troisième ordre de la vitesse
- iv) Distribution sin-cos de la vitesse

2.3.2.1 Profil de vitesse linéaire, $\frac{u}{U} = \frac{y}{\delta}$

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (2.57)$$

Et,

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.58)$$

A partir de, $\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{U}{\delta}$, il vient donc :

$$\rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \mu \frac{U}{\delta} \quad (2.59)$$

D'après le calcul précédent, nous savons que : $\theta = \frac{\delta}{6}$, alors,

$$\frac{\rho U^2}{6} \frac{d\delta}{dx} = \mu \frac{U}{\delta} \quad (2.60)$$

Où par séparation de variable, il vient :

$$\delta d\delta = \frac{6\mu}{\rho U} dx \quad (2.61)$$

Par intégration, on obtient :

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{6\mu}{\rho U} x + C \quad (2.62)$$

A $x=0$, $\delta=0$ et par conséquent $C=0$

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{6\mu}{\rho U} x \quad (2.63)$$

$$\delta^2 = \frac{12\mu}{\rho U} x \quad (2.64)$$

Multipliant par x et divisant par x ,

$$\delta^2 = \frac{12\gamma x}{Ux} x = \frac{12x^2}{\frac{Ux}{\gamma}} = \frac{12x^2}{Re_x} \quad (2.65)$$

Donc, on aura ce qui suit :

$$\delta = \frac{3.464x}{\sqrt{Re_x}} \quad (2.66)$$

L'épaisseur de déplacement de la couche limite et l'épaisseur de quantité de mouvement sont calculés comme suit :

$$\delta^* = \frac{\delta}{2} = \frac{1.732x}{\sqrt{Re_x}} \quad (2.67)$$

$$\theta = \frac{\delta}{6} = \frac{0.5773x}{\sqrt{Re_x}} \quad (2.68)$$

La contrainte de cisaillement à la paroi est ensuite calculée comme suit :

$$\tau_w = \mu \frac{U}{\delta} = 0.2887 \frac{\mu U}{x} \sqrt{Re_x} \quad (2.69)$$

Le coefficient de frottement local c_f est calculé comme suit :

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.2887 \frac{\mu U}{x} \sqrt{Re_x}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 0.5774 \frac{\gamma}{Ux} \sqrt{Re_x} \quad (2.70)$$

$$c_f = \frac{0.5774}{\sqrt{Re_x}} \quad (2.71)$$

Le coefficient de frottement total de la paroi est calculé comme suit :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \quad (2.72)$$

Avec,

$$F_D = \int_0^L \tau_w b dx = \int_0^L 0.2887 \frac{\mu U}{x} \sqrt{Re_x} b dx = \int_0^L 0.2887 \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu}} x^{\frac{1}{2}} b dx \quad (2.73)$$

$$F_D = b \left(0.2887 \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu}} \right) \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^L = b (0.5774 \mu U \sqrt{Re_L}) \quad (2.74)$$

Donc,

$$c_D = \frac{b(0.5774 \mu U \sqrt{Re_L})}{\frac{1}{2} \rho U^2 b L} = 1.1548 \frac{\nu}{UL} \sqrt{Re_L} = 1.1548 \frac{\sqrt{Re_L}}{Re_L} \quad (2.75)$$

$$c_D = \frac{1.1548}{\sqrt{Re_L}} \quad (2.76)$$

2.3.2.2 Profil de vitesse parabolique, $\frac{u}{U} = -\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)$

Le **tableau 1.3** résume les principaux résultats de la couche limite laminaire sur une plaque plane avec différents profils de vitesse.

Tableau 1.3 Les principaux résultats de la couche limite laminaire sur une plaque plane avec différents profils de vitesse.

<i>Profils de vitesse</i>	δ	c_f	c_D
<i>Solution de Blasius</i>	$\frac{5x}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{0.664}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{1.328}{Re_L^{1/2}}$
<i>Profil linéaire</i> $\frac{u}{U} = \frac{y}{\delta}$	$\frac{3.46x}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{0.58}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{1.15}{Re_L^{1/2}}$
<i>Profil parabolique</i> $\frac{u}{U} = -\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{\delta}\right)$	$\frac{5.48x}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{0.730}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{1.46}{Re_L^{1/2}}$
<i>Profil cubique</i> $\frac{u}{U} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$	$\frac{4.64x}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{0.647}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{1.292}{Re_L^{1/2}}$
<i>Profil Sin-Cos</i> $\frac{u}{U} = \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$	$\frac{4.795x}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{0.655}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{1.312}{Re_L^{1/2}}$

2.4. Transition vers la turbulence

Les résultats analytiques donnés dans le tableau 9.2 sont limités aux écoulements de la couche limite laminaire le long d'une plaque plane avec un gradient de pression nul. Ils sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux jusqu'au point où l'écoulement de la couche limite devient turbulent, qui se produira pour toute vitesse d'écoulement libre et tout fluide pourvu que la plaque soit assez longue. Cela est vrai car le paramètre qui régit la transition vers un écoulement turbulent est le nombre de Reynolds - dans ce cas, le nombre de Reynolds est basé sur la distance depuis le bord d'attaque de la plaque, $Re = \frac{U_\infty x}{\nu}$.

La valeur du nombre de Reynolds au point de transition est une fonction assez complexe de divers paramètres impliqués, notamment la rugosité de la surface, la courbure de la surface, (par exemple une plaque plane ou une sphère), et des perturbations de la surface en dehors de la couche limite. Sur une plaque plane avec un bord d'attaque tranchant et dans un écoulement d'air typique, la transition a lieu à une distance x du bord d'attaque donnée par : $Re = 5.10^5$.

La transition réelle entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent dans la couche limite peut se produire sur une région de la plaque, et non à un emplacement spécifique en particulier. Cela se produit, en partie, à cause de l'inégalité de la transition. En règle générale, la transition commence à des emplacements aléatoires de la plaque au voisinage de $Re_x = Re_{xcr}$. Ces signes se développent rapidement lorsqu'ils sont transportés en aval jusqu'à ce que toute la largeur de la plaque soit recouverte d'un écoulement turbulent.

Le processus complexe de transition d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent implique l'instabilité du champ d'écoulement. Les petites perturbations imposées à l'écoulement de couche limite, (à cause de vibrations de la plaque, d'une rugosité de la surface ou d'une "ondulation" dans l'écoulement sur la plaque) vont soit, accroître l'instabilité ou décroître l'instabilité, selon l'endroit où la perturbation est introduit dans l'écoulement. Si ces perturbations se produisent à un endroit où $Re_x < Re_{xcr}$ elles disparaîtront, la couche limite redeviendra laminaire. Les perturbations imposées à un endroit $Re_x > Re_{xcr}$ augmenteront et transformeront l'écoulement de la couche limite en aval de cet endroit en turbulence.

2.5 La couche limite turbulente sur une plaque plane (sans gradient de pression)

Pour analyser la couche limite turbulente, nous sommes obligés d'utiliser l'approche d'intégral de quantité de mouvement couplée avec les données de l'expérience du moment qu'il n'y a pas de solution exacte connue. Pour l'approximation du profil de vitesse dans le cas de l'écoulement turbulent, on rappelle la loi de la paroi.

Nous allons maintenant déterminer δ , c_f et c_D pour la région de la couche limite turbulente.

D'après le calcul précédent, nous savons que, $\theta = \frac{7\delta}{72}$, donc, on aura ce qui suit :

$$\delta = \frac{0.372x}{Re_x^{1/5}} \quad (2.77)$$

L'épaisseur de déplacement de la couche limite est donnée par :

$$\delta^* = \frac{\delta}{8} = \frac{0.047x}{Re_x^{1/5}} \quad (2.78)$$

L'épaisseur de quantité de mouvement est calculée comme suit :

$$\theta = \frac{7\delta}{72} = \frac{0.036x}{Re_x^{1/5}} \quad (2.79)$$

La contrainte de cisaillement à la paroi est ensuite calculée comme suit :

$$\tau_w = \frac{0.0289\rho U^2}{Re_x^{1/5}} \quad (2.80)$$

Le coefficient de frottement local c_f est calculé comme suit :

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.0289\rho U^2 \left(\frac{1}{Re_x^{4/5}}\right)^{1/4}}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (2.81)$$

$$c_f = \frac{0.579}{Re_x^{1/5}} \quad (2.82)$$

Le coefficient de frottement total de la paroi est calculé comme suit :

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \quad (2.83)$$

Avec,

$$\begin{aligned} F_D &= \int_0^L \tau_w b dx = \int_0^L \frac{0.0289\rho U^2}{Re_x^{1/5}} b dx = \int_0^L 0.0289\rho U^2 \left(\frac{\gamma}{Ux}\right)^{1/5} b dx \\ &= \int_0^L 0.0289\rho U^2 b \left(\frac{\gamma}{U}\right)^{1/5} x^{-1/5} dx \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$F_D = 0.0289\rho U^2 b \left(\frac{\gamma}{U}\right)^{1/5} \left[\frac{x^{4/5}}{4/5} \right]_0^L \quad (2.85)$$

$$F_D = 0.036\rho U^2 b \left(\frac{\gamma}{U}\right)^{1/5} L^{4/5} \quad (2.86)$$

Donc,

$$c_D = \frac{0.036\rho U^2 b \left(\frac{y}{U}\right)^{1/5} L^{4/5}}{\frac{1}{2}\rho U^2 b L} \quad (2.87)$$

$$c_D = 0.072 \left(\frac{y}{U}\right)^{1/5} \frac{1}{L^{1/5}} = 0.072 \left(\frac{1}{\frac{UL}{y}}\right)^{1/5} \quad (2.88)$$

$$c_D = \frac{0.072}{Re_L^{1/5}} \quad (2.89)$$

En résumé, les expressions déterminées pour δ , c_f et c_D pour le profil de vitesse, $\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$ dans la région turbulente de la couche limite est présentée dans le **tableau 1.4**.

Tableau 1.4 Les résultats de la couche limite turbulente sur une plaque plane

<i>Profils de vitesse</i>	δ	c_f	c_D
<i>Profil turbulent</i> $\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$	$\frac{0.372x}{Re_x^{1/5}}$	$\frac{0.058}{Re_x^{1/5}}$	$\frac{0.072}{Re_L^{1/5}}$



Exercices Corrigés

Exercice 01 :

1. Si la distribution des vitesses dans la couche limite laminaire sur une plaque plate est supposée être donnée par le polynôme de premier ordre $u = a + by$, où a et b sont constants, déterminer
- Le rapport entre l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de la couche limite
 - Le rapport entre l'épaisseur du moment et l'épaisseur de la couche limite

Solution :

La distribution de vitesse est : $u = a + by$

Les conditions aux limites suivantes doivent être remplies :

$$\text{i) } A : y = 0, u = 0$$

$$\text{Alors, } 0 = a + b(0) = a$$

$$\text{ii) } A : y = \delta, u = U_\infty$$

$$D'où : U_\infty = b\delta$$

$$\text{Donc, } b = \frac{U_\infty}{\delta}$$

Par conséquent, la forme de la distribution de vitesse est :

$$u = \frac{U_\infty}{\delta} y$$

Ensuite, dérivons l'expression ci-dessus pour obtenir les rapports : $\frac{\delta^*}{\delta}$ et $\frac{\theta}{\delta}$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

$$\delta^* = \left[y - \frac{1}{2} \frac{y^2}{\delta} \right]_0^\delta = \left[\delta - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta} \right] = \frac{1}{2} \delta$$

Donc,

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

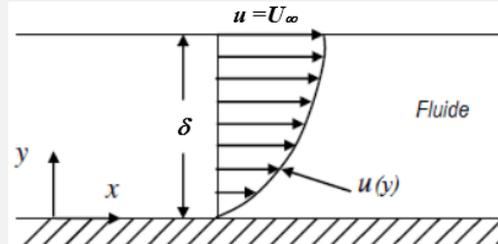
On trouve que :

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{1}{6}$$

Exercice 02 :

Montrer que, si la distribution de vitesse dans la couche limite laminaire sur une plaque plane est supposée être un polynôme de second ordre ($u=a+by+cy^2$), la distribution de vitesse peut être exprimée comme suit.

$$\frac{u}{U_\infty} = 2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2$$

**Solution :**

La distribution parabolique de la vitesse est exprimée par :

$$u = a + by + cy^2$$

Les conditions aux limites de la couche limites suivantes doivent être satisfaites

$$i) \quad A : y = 0 \quad u = 0$$

$$0 = a + b(0) + c(0)^2, \text{ donc, } a=0$$

$$ii) \quad A : y = \delta, \quad u = U_\infty$$

$$U_\infty = b\delta + c\delta^2 \quad (*)$$

$$iii) \quad A : y = \delta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=\delta} = b + 2c\delta = 0, \text{ donc : } b = -2c\delta$$

Substituant $b = -2c\delta$ dans l'équation (*), on obtient :

$$U_\infty = (-2c\delta)\delta + c\delta^2 = -c\delta^2$$

$$\text{Alors, } c = \frac{U_\infty}{\delta^2}$$

$$\text{Donc, } b = 2c\delta = 2\delta \left(\frac{U_\infty}{\delta^2} \right)$$

Donc la distribution de la vitesse est de la forme :

$$u = \frac{2U_\infty}{\delta} y - \frac{U_\infty}{\delta^2} y^2$$

Donc,

$$\frac{u}{U_\infty} = 2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2$$

Exercice 03 :

En supposant que le gradient de vitesse dans la couche limite laminaire sur une plaque plate se présente sous la forme d'un polynôme de second ordre, calculez :

- L'épaisseur du déplacement de la couche limite
- l'épaisseur de la quantité de mouvement de la couche limite

Solution :

L'épaisseur de déplacement de la couche limite est calculée par :

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - 2\frac{y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy$$

$$\delta^* = \left[y - \frac{2y^2}{2\delta} + \frac{1y^3}{3\delta^2} \right]_0^\delta = \left(\delta - \delta + \frac{1}{3}\delta \right) = \frac{1}{3}\delta$$

$$\delta^* = \frac{1}{3}\delta$$

L'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite est calculée par :

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \int_0^\delta \left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) \left(1 - \left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\right) dy$$

$$\theta = \int_0^\delta \left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) \left(1 - 2\frac{y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy = \int_0^\delta \left(2\frac{y}{\delta} - 4\frac{y^2}{\delta^2} + 2\frac{y^3}{\delta^3} - \frac{y^2}{\delta^2} + 2\frac{y^3}{\delta^3} - \frac{y^4}{\delta^4}\right) dy$$

$$\theta = \left[\frac{2y^2}{2\delta} - \frac{5y^2}{3\delta^2} + \frac{4y^4}{4\delta^3} - \frac{1y^5}{5\delta^4} \right]_0^\delta = \frac{2}{15}\delta$$

$$\theta = \frac{2}{15}\delta$$

Exercice 04 :

Considérons un écoulement sur une plaque plane horizontale (1,25m x 2,5m) avec une vitesse de 3,0 m/s. Calculer :

- L'épaisseur de la couche limite au bord à la limite longitudinale de la plaque,
- La contrainte de cisaillement au milieu de la plaque plane,
- La force de traînée résultante sur les deux faces de la plaque plane.

On donne : $\rho=850 \text{ kg/m}^3$, $\gamma=10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Solution :

- a. Pour calculer l'épaisseur de la couche limite au bord de la plaque, il nous faut savoir de quel type d'écoulement s'agit-il ? Pour cela, on commence par le calcul du nombre de Reynolds :

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{3.0 \times 2.5}{10^{-5}} = 7.5 \times 10^5$$

Du moment que, $Re_L > 5.10^5$, donc la couche limite au bord de la plaque est turbulente.

L'équation de Von-Karman donne :

$$\delta_x = \frac{0.372x}{Re_x^{1/5}}$$

Au bord de la plaque, $x=L$, il vient donc :

$$\delta_L = \frac{0.372 \times 2.5}{(7.5 \times 10^5)^{1/5}} = 0.06215 \text{ m} = 62.15 \text{ mm}.$$

- b. Calcul de la contrainte de cisaillement au milieu de la plaque plane

Au milieu de la plaque, $x = \frac{L}{2} = 1.25 \text{ m}$

Le nombre de Reynolds correspondant est :

$$Re_L = \frac{U_\infty \frac{L}{2}}{\nu} = \frac{3.0 \times 1.25}{10^{-5}} = 3.75 \times 10^5$$

En ce point ($x = L/2$), la couche limite est laminaire et la solution de Blasius donne le coefficient de frottement local par la relation suivante :

$$c_f = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}} = \frac{0.664}{(3.75 \times 10^5)^{1/2}} = 0.00108$$

Par définition, la contrainte de cisaillement est exprimée par :

$$\tau_w = c_f \frac{\rho U_\infty^2}{2} = 0.00108 \frac{850 \times 3.0^2}{2}$$

$$\tau_w = 4.147 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

- c. La force de traînée résultante sur les deux faces de la plaque plane.

$$F_D = c_D \frac{1}{2} \rho A U_\infty^2 \quad (\text{La force de traînée sur une seule face de la plaque plane.})$$

Le coefficient de traînée c_D , est donné par :

$$c_D = \frac{0.072}{Re_L^{1/5}} \quad \text{\AA} : x = L \text{ sur toute la plaque, la couche limite est turbulente.}$$

$$c_D = \frac{0.072}{(7.5 \times 10^5)^{1/5}} = 0.00481$$

La surface A de la plaque est :

$$A = b \times L = 1.25 \times 2.5 = 3.125 \text{ m}^2.$$

Donc,

$$F_D = 0.00481 \left(\frac{1}{2}\right) 850 \times 3.125 \times 3.0^2 = 57.494 \text{ N}$$

La force résultante sur les faces de la plaque plane est donc,

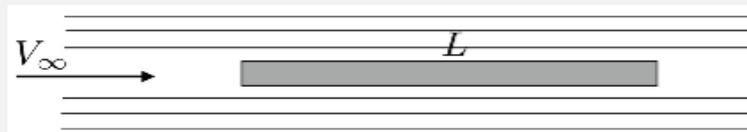
$$F_{D_{\text{Résultante}}} = 2 \times F_D = 114.988 \text{ N}.$$

Exercice 05 :

Une plaque plane de 3 m de large et 30 m de long est remorquée parallèlement à elle-même dans le sens de sa longueur dans l'eau à la vitesse de 6 m/s.

- 1- Déterminer la force de frottement s'exerçant sur l'une des faces de la plaque.
- 2- Déterminer la force s'exerçant sur les 3 premiers mètres de la plaque.
- 3- Déterminer les contraintes de cisaillement correspondantes aux questions 1 et 2.

On donne la viscosité cinématique de l'eau : $\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\gamma = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.



Solution :

1°- La force de traînée s'exerçant sur une face de la plaque plane.

Tout d'abord, il faut déterminer le type de la couche limite,

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\gamma} = \frac{6 \times 30}{10^{-6}} = 180 \times 10^6$$

La couche limite au bord de la plaque est donc turbulente.

$$F_D = c_D \frac{1}{2} \rho A U_\infty^2$$

Le coefficient de traînée c_D , pour une couche limite turbulente est donné par :

$$c_D = \frac{0.072}{Re_L^{1/5}} \quad \text{À } x = L \text{ sur toute la plaque, la couche limite est turbulente.}$$

$$c_D = \frac{0.072}{Re_L^{1/5}} = \frac{0.072}{(180 \times 10^6)^{1/5}} = 0.0016$$

La surface A de la plaque est :

$$A = b \times L = 3.0 \times 30.0 = 90.0 \text{ m}^2.$$

Donc,

$$F_D = 0.0016 \left(\frac{1}{2}\right) 1000 \times 90.0 \times 6.0^2 = 2592 \text{ N} = 2.592 \text{ kN}.$$

2° - La force de frottement s'exerçant sur les 3 premiers mètres de la plaque

$$Re_{x=3 \text{ m}} = \frac{U_\infty x}{\nu} = \frac{6 \times 3.0}{10^{-6}} = 18 \times 10^6$$

A $x = 3 \text{ m}$, la couche limite reste toujours turbulente, d'où :

$$c_D|_{x=3 \text{ m}} = \frac{0.072}{Re_{x=3}^{1/5}} = \frac{0.072}{(18 \times 10^6)^{1/5}} = 0.00254$$

$$F_D|_{x=3 \text{ m}} = c_D \frac{1}{2} \rho A U_\infty^2 = 0.00254 \left(\frac{1}{2}\right) 1000 \times 9.0 \times 6.0^2 = 411.48 \text{ N}$$

3° - Les contraintes de cisaillement correspondantes aux questions 1 et 2

On a :

$$\tau_w = c_f \frac{1}{2} \rho U_\infty^2$$

Pour, $x = 3 \text{ m}$ et $x = L$, la couche limite est toujours turbulente et c_f est donné par :

Pour, $x = L$:

$$c_f = \frac{0.0592}{Re_L^{1/5}} = \frac{0.0592}{(180 \times 10^6)^{0.2}} = 0.0013$$

D'où,

$$\tau_w = c_f \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = 0.0013 * 0.5 * 1000 * 6.0^2 = 23,4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Pour, $x = 3 \text{ m}$, la couche limite est laminaire et c_f est donné par :

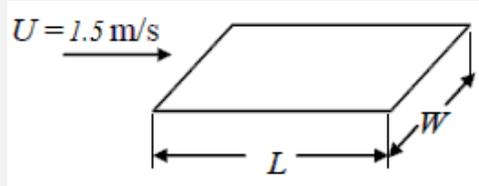
$$c_f = \frac{0.0592}{Re_x^{1/2}} = \frac{0.0592}{(18 \times 10^6)^{0.2}} = 0.0020$$

D'où,

$$\tau_w = c_f \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = 0.002 * 0.5 * 1000 * 6.0^2 = 36,0 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Exercice 06 :

Une plaque plane de longueur 3 m et de largeur 1 m se déplace dans l'eau à 20 °C ($\mu=10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\rho=10^3\text{ kg/m}^3$) à une vitesse de $1,25\text{ m/s}$ parallèle à sa longueur (voir Figure). On admet que le nombre de Reynolds critique pour la transition laminaire/turbulente soit $Re=5\cdot 10^5$.



- 1° Localiser le point (x_{cr}) de transition entre écoulement laminaire et écoulement turbulent.
- 2° Evaluer l'épaisseur δ de la couche limite en ce point.
- 3° Calculer le nombre de Reynolds rapporté à toute la longueur de la plaque.
- 4° Calculer la force de frottement sur une face de la plaque.
- 5° Calculer ensuite la force de frottement totale sur la plaque

Solution :

1°- Le point x_c de transition de l'écoulement correspond à :

$$Re_x = \frac{U_\infty x_{cr}}{\gamma} = Re_{cr} = 5 \times 10^5$$

Ce qui donne :

$$x_{cr} = \frac{Re_{cr} \gamma}{U_\infty} = \frac{5 \times 10^5 \times 10^{-6}}{1.25} = 4 \times 10^{-1} = 0.4\text{ m}$$

2°- L'épaisseur δ de la couche limite en le point x_{cr}

$$\delta = \frac{5x_{cr}}{Re_{cr}^{1/2}} = \frac{5 \times 0.4}{(5 \times 10^5)^{1/2}} = 0.002828\text{ m}$$

$$\delta = 2.828\text{ mm.}$$

3°- Le nombre de Reynolds rapporté à toute la longueur de la plaque

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\gamma} = \frac{3.0 \times 1.25}{10^{-6}} = 3.75 \times 10^6.$$

4°- La force de frottement sur une face de la plaque

$$F_D = c_D \frac{1}{2} \rho A U_\infty^2 \quad (\text{La force de traînée sur une seule face de la plaque plane.})$$

Le coefficient de traînée, c_D , est donné par :

$$c_D = \frac{0.072}{Re_L^{1/5}} \quad \text{À : } x = L \text{ sur toute la plaque, la couche limite est turbulente.}$$

$$c_D = \frac{0.072}{Re_L^{1/5}} = \frac{0.072}{(3.75 \times 10^6)^{1/5}} = 0.003487$$

La surface A de la plaque est :

$$A = b \times L = 1.0 \times 3.0 = 3.0 \text{ m}^2.$$

Donc,

$$F_D = 0.003584 \left(\frac{1}{2}\right) 1000 \times 3.0 \times 1.25^2 = 8.4 \text{ N}$$

5°- La force de frottement totale sur les deux faces de la plaque

$$F_{D_{tot}} = F_D \times 2 = 16.8 \text{ N}$$

Exercice 07 :

L'eau s'écoule sur une plaque plane à bord vif avec une longueur $L = 2.55 \text{ m}$, 1 m de large, avec une vitesse débitante de $U_\infty = 2 \text{ m/s}$. On donne pour l'eau : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1.02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Trouver :

1° Quel est le type de la couche limite à la limite de la plaque ? Déterminer son épaisseur

2° Pour quelle distance x_{cr} du bord d'attaque, la couche limite reste laminaire ? Quelle est donc son épaisseur en ce point ?

3° Considérant que l'écoulement est turbulent sur toute la plaque, évaluer le coefficient de de la force de traînée c_D puis déduire la force de frottement F_D .

4° Calculer les tensions de frottement.

Solution :

1°- Le type de la couche limite

Pour savoir de quel type s'agit-il, il faut calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement à la limite de la plaque,

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{2 \times 2.55}{1.02 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^6 \quad \text{Il s'agit de couche limite turbulente.}$$

Il s'ensuit que, son épaisseur peut être évaluée par :

$$\delta = \frac{0.37xL}{Re_L^{1/5}} = \frac{0.37 \times 2.55}{(5 \times 10^6)^{0.2}} = 0.043 \text{ m} = 43.0 \text{ mm.}$$

2°- Le point x_c de transition de l'écoulement correspond à :

$$Re_x = \frac{U_\infty x_{cr}}{\nu} = Re_{cr} = 5 \times 10^5$$

Ce qui donne :

$$x_{cr} = \frac{Re_{cr} \nu}{U_\infty} = \frac{5 \times 10^5 \times 1.02 \times 10^{-6}}{2.0} = 0.255 \text{ m}$$

2°- L'épaisseur δ de la couche limite en le point x_{cr}

$$\delta = \frac{5x_{cr}}{Re_{cr}^{1/2}} = \frac{5x0.4}{(5x10^5)^{1/2}} = 0.002828 \text{ m}$$

$$\delta = 2.828 \text{ mm.}$$

3°- Le coefficient de la force de trainée

L'écoulement est supposé turbulent sur toute la plaque, alors :

$$c_D = \frac{0.072}{Re_L^{1/5}} = \frac{0.072}{5x10^6^{0.2}} = 0.0033$$

Par conséquent, la force de trainée F_D vaut :

$$F_D = c_D \frac{1}{2} \rho A U_\infty^2 = 0.0033 * 0.5 * 1000 * 2.55 * 1.0 * 2.0^2 = 16.83 \text{ N}$$

Chapitre 03

Analyse dimensionnelle et similitude

3.1. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle a pour rôle de souligner l'importance des unités en sciences physiques qui donnent un arrangement précis à toutes les formules littérales. Elle fournit des méthodes pour choisir les grandeurs appropriées et leur bonne présentation. L'analyse dimensionnelle est un outil théorique servant à interpréter les problèmes à partir des dimensions des grandeurs physiques mises en jeu. Lors de l'établissement d'une expression, l'analyse dimensionnelle permet de vérifier son homogénéité et la corriger le cas échéant, sachant qu'une expression non homogène ne peut être que fautive. C'est une technique très utile dans tous les domaines expérimentaux de l'ingénierie. S'il est possible d'identifier les grandeurs impliquées dans un phénomène physique, l'analyse dimensionnelle peut fournir une équation (une loi) reliant toutes les grandeurs physiques impliquées les unes aux autres, c'est ce qu'on appelle la modélisation.

3.2. Dimensions, unités et système international

Les grandeurs physiques qui décrivent un phénomène physique sont caractérisées par leurs dimensions. Une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une énergie, d'une masse, d'une vitesse, etc... La notion de dimension est très générale et ne suppose aucun choix particulier d'unité. Le système international noté SI ou MKSA pour Mètre Kilogramme Seconde Ampère, compte sept unités de base (voir **Table 3.1**) censées quantifier des grandeurs physiques indépendantes. Chaque unité a un symbole.

La dimension est la grandeur physique associée à une grandeur physique indépendamment de l'unité utilisée pour la mesure de la grandeur. Ainsi :

- la dimension, longueur sera notée (L) et son unité (m) ;
- la dimension, masse sera notée (M) et son unité (kg) ;
- la dimension, temps sera notée (T) et son unité (s).

On dit que deux grandeurs physiques sont homogènes si elles ont la même dimension. Il ne faut pas confondre dimension et unité. En effet, une grandeur physique a une et une seule dimension, en revanche elle peut être exprimée dans plusieurs systèmes d'unités différentes.

Table 3.1 Les unités de base du système SI

Grandeur physique	Dimension	Unité SI
Longueur	L	M
Masse	M	Kg
Temps	T	S
Courant électrique	I	A
Température	θ	K
Quantité de matière	N	mol
Intensité lumineuse	J	La candela (cd)

3.3. Les dimensions de référence

Il est important de savoir combien de dimensions de référence sont nécessaires pour décrire les variables. Comme nous l'avons vu dans le §3.2, F, L et T semblent constituer un ensemble commode de dimensions de base pour la caractérisation de grandeurs mécaniques. Cependant, il n'y a vraiment rien de "fondamental" à propos de cet ensemble, et comme mentionné précédemment, M, L et T conviendraient également. En réalité, tout ensemble de quantités mesurables peut être utilisé comme dimensions de base à condition que la combinaison sélectionnée puisse être utilisée pour décrire toutes les quantités secondaires. Cependant, l'utilisation de FLT ou MLT comme dimensions de base est la plus simple, et ces dimensions peuvent être utilisées pour décrire des phénomènes de mécanique des fluides. Dans la **table 3.2** ci-dessous, on présente les dimensions (en MLT et en FLT) et les unités SI de certaines grandeurs physiques courantes en mécanique des fluides :

Table 3.2 Les dimensions (en MLT et en FLT) et les unités SI de certaines grandeurs physiques courantes en mécanique des fluides

Grandeur physique	Dimension		Unité SI
	MLT	FLT	
Vitesse	LT^{-1}	LT^{-1}	m/s
Accélération	LT^{-2}	LT^{-2}	m/s^2
Force	MLT^{-2}	MLT^{-2}	N où $kg.m/s^2$
Energie/Travail	ML^2T^{-2}	ML^2T^{-2}	N.m où J où $kg.m^2/s^2$
Puissance	ML^2T^{-2}	ML^2T^{-2}	W, J/s, N.m/s, kgm^2/s^3
Pression (contrainte)	$ML^{-1}T^{-2}$	$ML^{-1}T^{-2}$	Pascal, P, N/m^2 , $kg/m.s^2$
Masse volumique	ML^{-3}	ML^{-3}	kg/m^3
Poids spécifique	$ML^{-2}T^{-2}$	$ML^{-2}T^{-2}$	N/m^3 , $kg/m^2.s^2$
Tension de surface	MT^{-2}	MT^{-2}	N/m , kg/s^2
Viscosité dynamique	$ML^{-1}T^{-1}$	$ML^{-1}T^{-1}$	$N.s/m^2$
Débit volumique	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}	m^3/s

3.4. Systèmes d'unités

En plus de la description qualitative des différentes grandeurs d'intérêt, il est généralement nécessaire de disposer d'une mesure quantitative d'une grandeur donnée. Par exemple, si nous mesurons la largeur d'une classe de cours et disons que sa largeur est de 6 unités, l'énoncé n'a aucun sens jusqu'à ce que l'unité de longueur soit bien définie. Si nous indiquons que l'unité de longueur est un mètre et définissons le mètre comme une longueur standard, un système d'unités de longueur est bien établi et une valeur numérique peut être donnée à la largeur de la classe. En plus de la longueur, une unité doit être établie pour chacune des grandeurs de base restantes (force, masse, température, ...). Plusieurs systèmes d'unités sont utilisés, nous considérerons trois principaux systèmes couramment utilisés en ingénierie.

3.4.1. Système gravitationnel britannique (BG)

Dans le système BG, l'unité de longueur est le pied (ft), l'unité de temps est la seconde (s), l'unité de force est la livre (lb) et l'unité de température est le degré Fahrenheit ($^{\circ}F$) ou l'unité de température absolue est le degré Rankine ($^{\circ}R$), où :

$$^{\circ}R = ^{\circ}F + 459.67 \quad (3.1)$$

L'unité de masse, appelée slug (geepound), est définie à partir de la deuxième loi de Newton ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$) comme :

$$1 \text{ lb} = (1 \text{ slug}) \left(\frac{1 \text{ ft}}{s^2} \right) \quad (3.2)$$

Cette relation indique qu'une force de (1 lb) agissant sur une masse de (1 slug) donnera à la masse une accélération de ($1 \text{ ft}/s^2$).

Le poids, (W) qui est la force due à la gravité, (g) d'une masse, (m), est donné par l'équation :

$$W = mg \quad (3.3)$$

Et en unités BG, on a :

$$W(\text{lb}) = m(\text{slugs})g \left(\frac{\text{ft}}{s^2} \right) \quad (3.4)$$

Étant donné que la gravité standard de la terre est prise comme étant de $g = 32.2 \text{ ft}/s^2$, il s'ensuit que la masse d'une balise pèse 32.2 lb sous une gravité standard.

3.4.2. Système international (SI)

En 1960, le Système international d'unités (SI) a été adopté en tant que norme internationale. Ce système SI, a été largement adopté et utilisé dans le monde entier. En SI, l'unité de longueur est le mètre (m), l'unité de temps est la seconde (s), l'unité de masse est le kilogramme (kg) et

l'unité de température est le Kelvin (K). L'échelle de température Kelvin est une échelle absolue et est liée à l'échelle Celsius (centigrade, $^{\circ}C$) à travers la relation :

$$K = ^{\circ}C + 273,15. \quad (3.5)$$

L'unité de force, appelée Newton (N), est définie dans la deuxième loi de Newton comme :

$$1 N = (1 kg) (1 m/s^2) \quad (3.6)$$

3.4.3. Système anglais d'ingénierie (EE)

Dans le système EE , les unités de force et de masse sont définies indépendamment ; il faut donc faire très attention lorsque ce système est utilisé avec la deuxième loi de Newton. L'unité de base de la masse est la livre de masse (lbm), l'unité de force est la livre (lb). L'unité de longueur est le pied (ft), l'unité de temps est la seconde (s), et l'échelle de température absolue est le degré Rankine ($^{\circ}R$). Pour rendre l'équation exprimant la deuxième loi de Newton homogène, nous l'écrivons comme suit :

$$F = \frac{m \cdot a}{g_c} \quad (3.7)$$

Où g_c est une constante de proportionnalité qui nous permet de définir des unités de force et de masse. Pour le système de BG , seule l'unité de force a été prescrite et l'unité de masse définie de manière cohérente telle que, $g_c = 1$. De même, pour l'unité SI , l'unité de masse a été prescrite et l'unité de force définie de manière cohérente telle que, $g_c = 1$. Pour le système EE , une force de $1 lb$ est définie comme étant la force qui donne à $1 lbm$ une accélération standard de la gravité qui est prise comme $32.174 ft/s^2$.

Avec le système EE , le poids et la masse sont liés par l'équation :

$$W = \frac{m \cdot g}{g_c} \quad (3.8)$$

Où g est l'accélération locale de la gravité. Dans des conditions de gravité standard ($g = g_c$), le poids en livres et la masse en livres sont numériquement égaux.

3.5. Théorème de Vachy-Buckingham

L'analyse dimensionnelle des résultats expérimentaux des problèmes de mécanique des fluides peu connus, conduit à certaines grandeurs adimensionnelles (nombres) souvent appelées, π . Sur la base de la notion d'homogénéité dimensionnelle, ces paramètres sans dimension, peuvent être groupés et exprimés sous des formes fonctionnelles. Cette idée a été présentée par Buckingham (1867-1940) dont le théorème porte son nom.

Le théorème de *Vachy et Buckingham*, appelé aussi « **théorème π** », s'énonce comme que :

Soit un problème physique comportant n grandeurs différentes (variables) ($A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$), comme la vitesse, la pression, la viscosité, etc., dont les dimensions fondamentales desquelles interviennent sont au nombre de m . Il existe une relation qui relie toutes ces quantités entre elles. On écrit :

$$\phi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0 \quad (3.9)$$

Si $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$, représentent les nombres adimensionnelles parmi les quantités physiques $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, on peut alors exprimer la relation précédente sous la forme d'une équation à $(n-m)$ nombres sans dimensions par **la méthode π** , de la forme :

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad (3.10)$$

Où

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad (3.11)$$

3.6. Les étapes de l'analyse dimensionnelle

Pour réaliser une analyse dimensionnelle, on doit considérer les neuf étapes suivantes :

1. Dresser la liste de toutes les grandeurs physiques (A_i) et leurs dimensions respectives. Omettre toute grandeur physique dépendante d'une ou d'autres grandeurs.
2. Écrire la fonction

$$\phi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0 \quad (3.12)$$

3. Choisir les variables répétitives, qui doivent contenir toutes les m dimensions du problème. Souvent, on retient une variable parce qu'elle détermine l'échelle, une autre, parce qu'elle détermine les conditions cinématiques ; il faut une variable liée à la masse ou aux forces du système.
4. Écrire les paramètres π en fonction des exposants inconnus :

$$\pi_1 = V^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \mu = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_1} L^{y_1} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_1} \left(\frac{M}{LT}\right) = M^0 L^0 T^0 \quad (3.13)$$

S'assurer que toutes les quantités A_i sont incluses dans les groupes π_i .

5. Écrire les équations des paramètres π pour les exposants ; on doit obtenir une somme algébrique nulle pour chaque dimension (homogénéité).
6. Résoudre les équations simultanément.
7. Remplacer les exposants trouvés (x_1, y_1, z_1, \dots) dans les expressions de π (formulées en étape 4) pour obtenir les grandeurs π sans dimension.

8. Déterminer la fonction :

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad (3.14)$$

S'assurer que tous les paramètres π_i sont indépendants les uns des autres.

9. Mettre les résultats sous la forme de nombres sans dimensions connus (*Re*, *Ma*, *Fr*, etc.).

3.7. La sélection des variables

L'une des étapes les plus importantes et les plus difficiles de l'application de l'analyse dimensionnelle à un problème donné est la sélection des variables impliquées. Comme indiqué précédemment, nous utiliserons le terme variable pour indiquer toute grandeur mise en jeu, y que ce soit dimensionnelle ou adimensionnelle.

Il n'existe pas de procédure simple permettant d'identifier facilement les variables. En règle générale, il faut s'appuyer sur une bonne compréhension du phénomène et des lois physiques en vigueur. Si des variables étrangères sont incluses, alors la résolution finale contient trop de termes en π et il peut être difficile, long et coûteux de les éliminer expérimentalement. Si des variables importantes sont omises, un résultat incorrect sera obtenu. Il est donc essentiel de consacrer suffisamment d'attention à la sélection des variables.

La plupart des problèmes d'ingénierie impliquent certaines hypothèses simplificatrices qui ont une influence sur les variables à prendre en considération. Généralement, nous souhaitons que le problème soit aussi simple que possible, peut-être même si une précision est sacrifiée. Un équilibre approprié entre simplicité et précision est un objectif souhaitable.

Le degré de précision de la solution dépend de l'objectif de l'étude. C'est-à-dire que nous ne sommes peut-être préoccupés que par les tendances générales et que, par conséquent, certaines variables considérées n'ayant qu'une influence mineure sur le problème peuvent être négligées pour des raisons de simplicité.

Pour la plupart des problèmes de mécanique des fluides, les variables pertinentes peuvent être classées en trois groupes généraux : la géométrie, les propriétés physiques du fluide et les effets externes.

Géométrie : Les caractéristiques géométriques peuvent généralement être décrites par une série de longueurs et d'angles. La géométrie du système joue un rôle important et un nombre suffisant de variables géométriques doit être inclus pour décrire le système. Ces variables peuvent être facilement identifiées.

Propriétés physiques : Étant donné que la réponse d'un système aux effets externes appliqués tels que les forces, les pressions et les changements de température dépend de la nature des

matériaux impliqués dans le système, les propriétés physiques des matériaux qui associent les effets externes et les réponses doivent être incluses.

Effets externes : Cette terminologie est utilisée pour désigner toute variable qui produit ou tend à produire un changement dans le système. Par exemple, en mécanique des fluides, les variables de cette classe seraient liées aux pressions, aux vitesses ou à la gravité.

Puisque nous souhaitons limiter le nombre de variables au minimum, il est important que toutes les variables soient indépendantes.

3.8. Exemple d'analyse dimensionnelle dans la mécanique des fluides

La Fig. 4.1 montre l'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique rugueuse.

Les pertes de charge par unité de longueur $\frac{\Delta p}{L}$ entre les points ① et ② sont fonction des grandeurs suivantes : $D, \rho, \mu, U, \varepsilon$.

En utilisant le théorème de Vachy-Buckingham, proposer une relation pour présenter les résultats expérimentaux en fonction des paramètres adimensionnels.

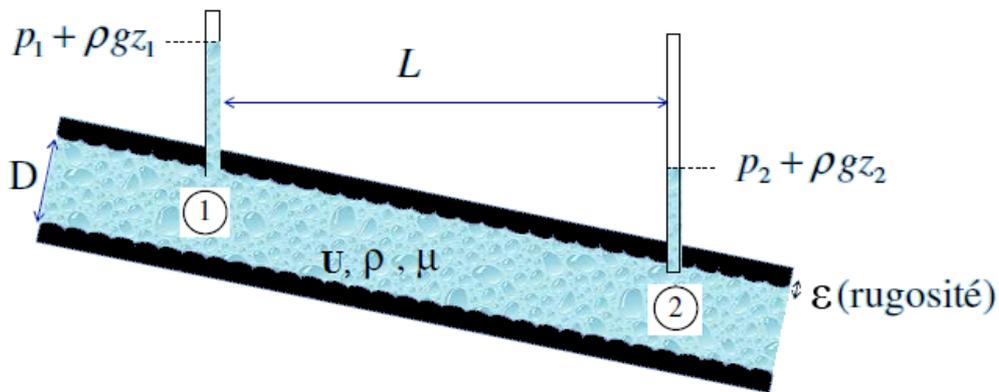


Figure 4.1 Les pertes de charge linéaires dans une conduite cylindrique rugueuse

Solution :

1) Inventaire des variables et de leurs dimensions

Variable	Symbole	Dimension
Perte de charge par unité de longueur	$\Delta p/L$ (Pa/m)	$ML^{-2}T^{-2}$
Diamètre de la conduite	D (m)	L
Masse volumique du fluide	ρ (kg/m ³)	ML^{-3}
Viscosité dynamique	μ (Pa.s)	$ML^{-1}T^{-1}$
Vitesse moyenne de l'écoulement	U (m/s)	LT^{-1}
Rugosité absolue de surface de la conduite	ε (m)	L

2) **Formulation de la fonction algébrique** : $\frac{\Delta p}{L} = f(D, \rho, \mu, U, \varepsilon)$

3) **Détermination du nombre des grandeurs adimensionnelles**

On a 7 grandeurs avec trois dimensions (MLT). On déduit donc ($7 - 3 = 4$) paramètres, π , soient : π_1, π_2, π_3 et π_4

Si on prend U, D et ρ comme variables qui se répètent (car les trois contiennent les dimensions fondamentales MLT).

4) **Écriture des paramètres π en fonction des exposants inconnus** :

Les nombres π qu'on peut former sont les suivants :

$$\pi_1 = U^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \Delta p = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_2 = U^{x_2} D^{y_2} \rho^{z_2} l = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_3 = U^{x_3} D^{y_3} \rho^{z_3} \varepsilon = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_4 = U^{x_4} D^{y_4} \rho^{z_4} \mu = M^0 L^0 T^0$$

5) **Écriture d'équations des paramètres π pour les exposants**

Les nombres π exprimés en termes de dimensions sont les suivants :

$$\pi_1 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_1} L^{y_1} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_1} \left(\frac{M}{LT^2}\right) = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_2 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_2} L^{y_2} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_2} L = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_3 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_3} L^{y_3} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_3} L = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_4 = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_4} L^{y_4} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_4} \left(\frac{M}{LT}\right) = M^0 L^0 T^0$$

6, 7) **Résolution des équations et remplacement des exposants (x_i, y_i, z_i, \dots) dans les expressions de π**

$$\pi_1 = M^{(z_1+1)} L^{(x_1+y_1-3z_1-1)} T^{(-x_1-2)} = M^0 L^0 T^0$$

On obtient, $z_1 = -1, y_1 = 0, x_1 = -2$ Donc, $\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$

$$\pi_2 = M^{(z_2)} L^{(x_2+y_2-3z_2+1)} T^{(-x_2)} = M^0 L^0 T^0$$

On obtient, $z_2 = 0, y_2 = -1, x_2 = 0$ Donc, $\pi_2 = \frac{L}{D}$

De la même manière, on détermine : x_2, y_3, z_3 et x_4, y_4, z_4

On obtient : $\pi_3 = \frac{\varepsilon}{D}$ et $\pi_4 = \frac{\mu}{\rho U D} = \frac{1}{Re}$

8) L'écriture de la relation finale :

La relation finale est : $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$

Où :

$$\frac{\Delta p}{\rho U^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{1}{Re}\right)$$

3.9. Quelques groupes adimensionnels communs en mécanique des fluides

Groupe adimensionnel	Nom	Interprétation physique	Applications
$Re = \frac{\rho V l}{\mu}$	Nombre de Reynolds, Re	$\frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces visqueuses}}$	Problèmes de dynamique des fluides
$Fr = \frac{V}{\sqrt{g l}}$	Nombre de Froude, Fr	$\frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de gravité}}$	Problèmes d'écoulement à surface libre
$Eu = \frac{p}{\rho V^2}$	Nombre d'Euler, Eu	$\frac{\text{forces de pression}}{\text{forces d'inertie}}$	Pb. où les forces de pression sont importantes
$Ca = \frac{\rho V^2}{E_v}$	Nombre de Cauchy, Ca	$\frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de compressibilité}}$	Pb. où la compressibilité du fluide est importante
$Ma = \frac{V}{c}$	Nombre de Mach, Ma	$\frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de compressibilité}}$	Pb. où la compressibilité du fluide est importante
$St = \frac{\omega l}{V}$	Nombre de Strouhal, St	$\frac{\text{forces d'inertie (locale)}}{\text{forces d'inertie (convective)}}$	Écoulements transitoires avec fréquence d'oscillation
$We = \frac{\rho V^2 l}{\sigma}$	Nombre de Weber, We	$\frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de tension de surface}}$	Pb. Où la tension de surface est importante

3.10. Similitude et modèles

Tout problème de mécanique des fluides est régi par des équations qui sont dans plusieurs cas difficiles à résoudre. Il devient donc impératif d'avoir recours à l'expérience, que ce soit par l'utilisation de modèles numériques ou des modèles physiques. Il est possible alors de faire converger les différentes approches, mais les essais sur *maquettes* sont plus intéressants dans un premier temps, car ils permettent de trouver des solutions, d'acquérir des données ou de vérifier des calculs. La technique des *modèles réduits* est basée sur les règles de *similitude*, donc sur *l'analyse dimensionnelle*. Ces règles permettent d'une part de concevoir et d'exploiter *le modèle*, mais aussi de transposer les résultats obtenus à la réalité.

3.10.1. Définitions

3.10.1. a) Le prototype

Le prototype est le modèle en grandeur réelle (Fig.3.1).

3.10.1. b) La maquette

La maquette est un modèle réduit (parfois plus grand) du prototype (Fig.3.1). Elle est beaucoup moins coûteuse que le prototype. Elle se prête à une étude plus facile et à des modifications moins onéreuses.

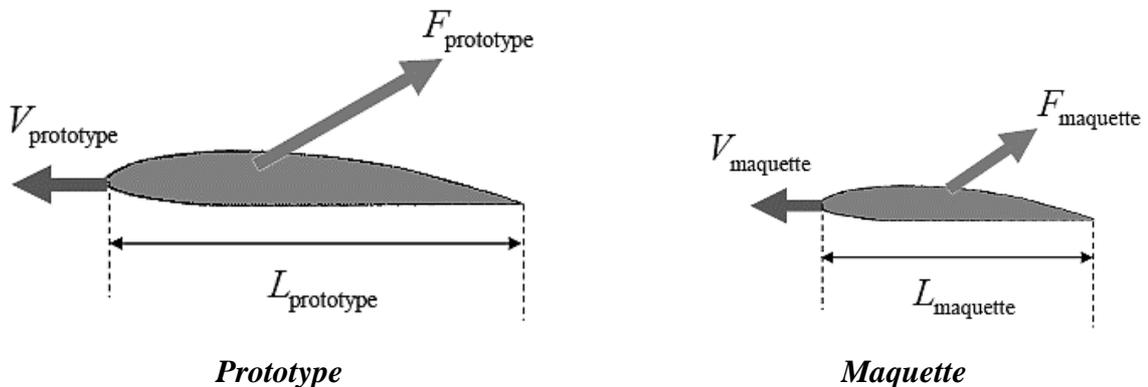


Figure 3.1 Prototype et maquette

Les essais sur une maquette : Permettent :

- de vérifier les calculs.
- de trouver des solutions que les théories actuelles sont incapables de fournir.

Pour tout système, les résultats des mesures expérimentales sur le *modèle* ne sont transposables au *prototype* que si les données définissant les problèmes posés satisfont à un certain nombre de relations. Ce sont les conditions de *similitude mécanique* :

On distinguera les similitudes :

- *géométrique*
- *cinématique*
- *dynamique*

3.11. Similitude géométrique

Le rapport de toutes les dimensions du prototype et de la maquette doit être constant : La maquette doit être à l'échelle exacte du prototype et les différentes dimensions doivent être reliées par le même *facteur géométrique* K_G .

$$K_G = \frac{D_{Prototype}}{D_{Modèle}} = \frac{L_{Prototype}}{L_{Modèle}} \quad (3.15)$$

K_G : est la constante de proportionnalité géométrique.

3.12. Similitude cinématique

Lorsqu'on a ainsi caractérisé les parois solides, il faut caractériser le mouvement relatif du fluide par rapport à ces parois.

- ✓ La similitude cinématique est satisfaite si une modification dans le temps des vitesses sur le prototype est accompagnée d'une modification correspondante sur la maquette.
- ✓ La similitude cinématique traduit seulement le fait que le facteur de proportionnalité géométrique (d'échelle), K_G , est égal au produit des facteurs d'échelle de temps, K_t , et de vitesse, K_V .

$$K_G = \frac{L_{Prototype}}{L_{Modèle}} = \frac{V * t_{Prototype}}{V * t_{Modèle}} = K_V * K_t \quad (3.16)$$

Avec : $K_t = \frac{t_{Prototype}}{t_{Modèle}}$ et, $K_V = \frac{V_{Prototype}}{V_{Modèle}}$

Pour la grandeur accélération :

$$a_M = \frac{K_G}{K_t^2} a_P \quad (3.17)$$

Les relations précédentes peuvent être réarrangées davantage :

$$\frac{V_P}{V_M} = \frac{L_M/t_M}{L_P/t_P} = \frac{K_G}{K_t} = K_V \quad (3.18)$$

$$\frac{a_P}{a_M} = \frac{L_M/t_M^2}{L_P/t_P^2} = \frac{K_G}{K_t^2} = K_a \quad (3.19)$$

$$\frac{Q_P}{Q_M} = \frac{L_P^3/t_P}{L_M^3/t_M} = \frac{K_G^3}{K_t} = K_Q \quad (3.20)$$

3.13. Similitude dynamique (forces, inertie, pesanteur, pression, viscosité, ...)

On parle de *similitude dynamique* lorsque les forces en deux points homologues du prototype et de la maquette sont dans un rapport constant :

$$K_F = \frac{F_M}{F_P} \quad (3.21)$$

Pour qu'il y ait similitude dynamique, il est obligatoire qu'il y ait également similitudes géométrique et cinématique.

La masse volumique :

$$\rho_M = \frac{K_M}{K_G^3} \rho_P ; \quad K_M = \frac{m_M}{m_P} \quad (3.22)$$

La pression :

$$\rho_M = \frac{K_M}{K_G^3} \rho_P ; \quad K_m = \frac{m_M}{m_P} \quad (3.23)$$

La loi fondamentale de la dynamique (La deuxième Loi de Newton) s'applique, lorsqu'on travaille sur le prototype ou sur la maquette :

$$F_P = m_P \cdot a_P \quad (3.24)$$

$$F_M = m_M \cdot a_M \quad (3.25)$$

$$\frac{F_M}{F_P} = \frac{m_M a_M}{m_P a_P} = \frac{\rho_M L_M^3}{\rho_P L_P^3} \times \frac{K_G}{K_t^2} \quad (3.26)$$

$$= K_\rho K_G^2 \left(\frac{K_G}{K_t} \right)^2 = K_\rho K_G^2 K_V^2 \quad (3.27)$$

En remplaçant F_M , m_M et a_M , des équations précédentes, on obtient :

$$K_F \cdot F_P = (K_M \cdot m_P) \left(\frac{K_G}{K_t^2} \right) a_P \quad (3.28)$$

On divise ensuite par F_P le membre de gauche et par $(m_P a_P)$ le membre de droite (on a $F = ma$) :

$$K_F = \frac{K_M \cdot K_G}{K_t^2} \quad (3.29)$$

Où :

$$1 = \frac{K_M \cdot K_G}{K_t^2 K_F} \quad (3.30)$$

Multiplions et divisons l'équation précédente par K_G^3 , on obtient :

$$1 = \frac{K_M \cdot K_G^4}{K_t^2 K_F K_G^3} \quad (3.31)$$

$$1 = \left(\frac{K_M}{K_G^3} \right) \left(\frac{K_G}{K_t} \right)^2 \left(\frac{K_G^2}{K_F} \right) \quad (3.32)$$

$$1 = \frac{(\rho_M / \rho_P) \cdot (V_M^2 / V_P^2) (L_M^2 / L_P^2)}{F_M / F_P} \quad (3.33)$$

$$\frac{F_P}{\rho_P V_P^2 L_P^2} = \frac{F_M}{\rho_M V_M^2 L_M^2} \quad (3.34)$$

L'équation ci-dessus donne la condition pour avoir une **similitude dynamique** entre le modèle et la maquette. Le paramètre adimensionnel $(\frac{F_P}{\rho_P V_P^2 L_P^2})$ doit être le même à des positions sur le prototype et sur la maquette géométriquement similaires.

Exemple : Rapport des pressions dynamiques :

$$\frac{\rho_M V_M^2}{\rho_P V_P^2} = Cte \quad (3.35)$$

b) La similitude de Froude, d'Euler et celle de Reynolds

Par ailleurs, deux lois de similitudes sont très importantes, **la similitude de Reynolds et celle de Froude :**

3.13.1. Similitude de Froude : Cas où les forces de gravité sont importantes

Elle exprime le rapport des **forces d'inertie** aux **forces de pesanteur**. On suppose alors que celles-ci sont importantes.

La force de gravité $F = mg$ est proportionnelle à $\rho L^3 g$.

Si, on remplace dans l'équation de similitude dynamique (Eq. 3.34), on aura :

$$\frac{\rho_P L_P^3 g}{\rho_P V_P^2 L_P^2} = \frac{\rho_M L_M^3 g}{\rho_M V_M^2 L_M^2} \quad (3.36)$$

En inversant et après simplification, on obtient :

$$\frac{V_P^2}{gL_P} = \frac{V_M^2}{gL_M} \quad \text{Nombre de Froude (Fr)}. \quad (3.37)$$

Donc, pour des problèmes où les forces de gravité sont importantes, le nombre de Froude doit être le même à des positions géométriquement similaires sur le prototype et sur la maquette.

3.13.2. Similitude d'Euler : Cas où les forces de pression sont importantes

La force de pression est $F = \Delta p L^2$. Si on remplace dans l'équation de similitude dynamique (3.34), on aura :

$$\frac{\Delta p_P L_P^2}{\rho_P V_P^2 L_P^2} = \frac{\Delta p_M L_M^2}{\rho_M V_M^2 L_M^2} \quad (3.38)$$

En inversant et après simplification, on obtient :

$$\frac{\Delta p_P L_P^2}{\frac{1}{2} \rho_P V_P^2} = \frac{\Delta p_M L_M^2}{\frac{1}{2} \rho_M V_M^2} \quad \text{Nombre d'Euler (Eu)} \quad (3.39)$$

Donc, pour des problèmes où les forces de pression sont importantes, le nombre d'Euler doit être le même à des positions géométriquement similaires sur le prototype et sur la maquette.

3.13.3. Similitude de Reynolds : Cas où les forces de viscosité sont importantes

Elle exprime le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité. On suppose alors que celles-ci sont prépondérantes. Pour les fluides Newtoniens :

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \quad (3.40)$$

La force de cisaillement est donnée par l'expression suivante :

$$F = \tau L^2 = \mu \frac{dV}{dy} L^2 = \mu \frac{\Delta V}{\Delta y} L^2 \quad (3.41)$$

Donc F est proportionnel à μVL .

En remplaçant F par μVL dans l'équation de similitude dynamique de base (Eq.3.34), on aura :

$$\frac{\mu_P V_P L_P}{\rho_P V_P^2 L_P^2} = \frac{\mu_M V_M L_M}{\rho_M V_M^2 L_M^2} \quad (3.42)$$

En inversant et après simplification on obtient :

$$\frac{\rho_P V_P L_P}{\mu_P} = \frac{\rho_M V_M L_M}{\mu_M} \quad \text{Nombre de Reynolds (Re)} \quad (3.43)$$

3.14. Variables réduites

Soit L une dimension linéaire caractéristique de l'écoulement étudié (largeur d'un obstacle, diamètre d'une canalisation...). Au lieu de travailler avec les variables classiques dimensionnelles x , y et z , on prend les variables sans dimensions :

$$x^+ = \frac{x}{L} \quad (3.44)$$

$$y^+ = \frac{y}{L} \quad (3.45)$$

$$z^+ = \frac{z}{L} \quad (3.46)$$

Soit V une vitesse caractéristique de l'écoulement étudié (vitesse moyenne, maximale...). Au lieu de travailler avec les variables classiques dimensionnelles u , v et w , on prend les variables sans dimensions :

$$u^+ = \frac{u}{V} \quad (3.47)$$

$$v^+ = \frac{v}{V} \quad (3.48)$$

$$w^+ = \frac{w}{V} \quad (3.49)$$

A partir de L et V , on peut encore définir un temps caractéristique $T = L/V$ et une pression Caractéristique $p = \rho V^2$ et les variables sans dimension correspondantes :

$$t^+ = \frac{t}{L/V} \quad (3.50)$$

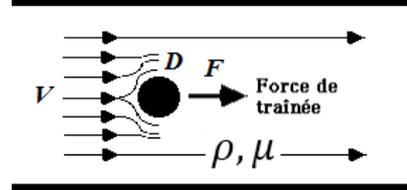
$$\text{Et, } p^+ = \frac{p}{\rho V^2} \quad (3.51)$$



Exercices Corrigés

Exercice 01 :

Une expérience est prévue pour déterminer la force (F_T) résultant de l'écoulement à faible vitesse (V) autour d'une sphère lisse de diamètre (d). Supposons que la sphère est immergée dans un fluide visqueux (μ) de masse volumique (ρ) de sorte que les effets de surface libres sont absents. Réaliser une analyse dimensionnelle du problème.



1°/- Quelles sont les variables mises en jeu dans ce problème ?

2°/- Exprimer toutes les variables énoncées par leurs dimensions (MLT)

3°/- Appliquer le théorème de π pour déterminer les grandeurs adimensionnelles du problème.

4°/- Exprimez la forme finale comme une relation entre les termes de pi, que peut-on conclure ?

Solution :

1°/ D'après l'énoncé de l'exercice, on a : $F_T = f(\rho, V, d, \mu)$

Cette equation exprime la relation générale entre la grandeur force de trainée F_T et les différents variables (ρ, V, d, μ) qui affectent cette grandeur. Donc, les variables du problème sont : $n = 6$.

2°/ Les dimensions des variables en fonction du système MLT sont :

F_T	ρ	V	d	μ
MLT^{-2}	ML^{-3}	LT^{-1}	L	$ML^{-1}T^{-1}$

3°/ On voit que trois dimensions de base (m) sont suffisantes pour définir les six variables.

Selon la méthode de Vachy-Buckingham (π), le nombre de grandeurs adimensionnelles sont :

$$r = m - n = 5 - 3 = 2$$

On va sélectionner trois variables répétitives constituant les groupes adimensionnels. De préférence ces variables représentent la géométrie, les propriétés physiques et les effets externes du problème étudié en plus, elles doivent être indépendantes entre elles. Par conséquent, ρ, d et V sont sélectionnées, elles sont indépendantes et représentatives.

Commençons la formulation des groupes adimensionnels par la variable F_D , le groupe Π_1 peut être formé par la combinaison de F_D et les variables répétitives comme :

$$\Pi_1 = F_D \rho^a V^b d^c$$

En termes de dimensions :

$$(MLT^{-2})(ML^{-3})^a(LT^{-1})^b(L)^c = M^0L^0T^0$$

Pour que Π_1 soit adimensionnel, il faut que :

$$a + 1 = 0 \quad (\text{pour } M)$$

$$-3a + b + c + 1 = 0 \quad (\text{pour } L)$$

$$-b - 2 = 0 \quad (\text{pour } T)$$

La résolution du système d'équation donne :

$$a = -1, c = -2 \text{ et } b = -2$$

Donc, on aura :

$$\Pi_1 = F_D \rho^{-1} V^{-2} d^{-2} = \frac{F_D}{\rho V^2 d^2}$$

Procédons de la même manière avec la variable non répétitive μ restante, on aura :

$$\Pi_2 = \mu \rho^a V^b d^c$$

On aura :

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V d} = \frac{1}{Re}$$

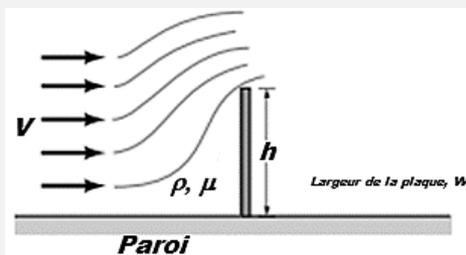
4°/ Finalement, on a eu les deux termes adimensionnels recherchés (Π_1 et Π_2).

On peut exprimer le résultat trouvé sous la forme :

$$\frac{F_D}{\rho V^2 d^2} = f\left(\frac{1}{Re}\right)$$

Exercice 02 :

Une plaque rectangulaire mince de hauteur h et de largeur w est placée de façon normale au courant d'un fluide en écoulement. Considérons la force de trainée, F_T que le fluide exerce sur la plaque est une fonction de h , w , la viscosité du fluide, μ et ρ sa masse volumique respectivement ainsi que la vitesse d'approche V du fluide, tel que : $F_T = f(h, w, \mu, \rho, V)$. Déterminer les grandeurs adimensionnelles appropriées (π_1, π_2, \dots) qui permettent d'étudier ce problème expérimentalement.



Solution :

D'après l'énoncé de l'exercice, on a : $F_T = f(h, w, \mu, \rho, V)$

Cette équation exprime la relation générale entre la grandeur force de trainée F_T et les différents variables (h, w, μ, ρ, V) qui affectent cette grandeur.

Les dimensions des variables en fonction du système MLT sont :

F_D	w	h	μ	ρ	V
MLT^{-2}	L	L	$ML^{-1}T^{-1}$	ML^{-3}	LT^{-1}

On voit que trois dimensions de base sont suffisantes pour définir les six variables.

Selon la méthode de Vachy-Buckingham (pi), le nombre de grandeurs adimensionnelles sont :

$$r = m - n = 6 - 3 = 3$$

On va sélectionner trois variables répétitives constituant les groupes adimensionnels. De préférence ces variables représentent la géométrie, les propriétés physiques et les effets externes du problème étudié en plus, elles doivent être indépendantes entre elles. Par conséquent, w , V et ρ sont sélectionnées, elles sont indépendantes et représentatives.

Commençons la formulation des groupes adimensionnels par la variable F_D , le groupe Π_1 peut être formé par la combinaison de F_D et les variables répétitives comme :

$$\Pi_1 = F_D w^a V^b \rho^c$$

En termes de dimensions :

$$(MLT^{-2})(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c = M^0L^0T^0$$

Pour que Π_1 soit adimensionnel, il faut que :

$$1 + c = 0 \quad (\text{pour } M)$$

$$1 + a + b - 3c = 0 \quad (\text{pour } L)$$

$$-2 - b = 0 \quad (\text{pour } T)$$

La résolution du système d'équation donne :

$$a = -2, b = -2 \text{ et } c = -1$$

Donc, on aura :

$$\Pi_1 = F_D w^{-2} V^{-2} \rho^{-1} = \frac{F_D}{w^2 V^2 \rho}$$

Par la même procédure avec la variable non répétitive h , on aura :

$$\Pi_2 = h w^a V^b \rho^c$$

On aura :

$$\Pi_2 = \frac{h}{w}$$

De la même manière avec la variable non répétitive μ restante, on aura :

$$\Pi_3 = \mu w^a V^b \rho^c$$

On aura :

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{w V \rho} = \frac{1}{Re}$$

Finalement, on a eu les trois termes adimensionnels recherchés (Π_1 , Π_2 et Π_3).

On peut exprimer le résultat trouvé sous la forme :

$$\frac{F_D}{w^2 V^2 \rho} = g \left(\frac{h}{w}, \frac{1}{Re} \right)$$

Exercice 03 :

Un navire, de taille caractérisée par une longueur L , est en mouvement à la vitesse V . L'eau dans laquelle le navire avance exerce une force de résistance (force de traînée), $F_{Trainée}$, au mouvement qui dépend, à part de L et V , de la masse volumique, ρ , de la viscosité dynamique μ et de la tension superficielle σ , de l'eau ainsi que de la pesanteur g , par la fonction suivante :

$$F_{Trainée} = g(L, V, \rho, \mu, \sigma, g)$$

Déterminer les groupes (nombres) adimensionnels qui peuvent être utilisés pour relier les grandeurs du problème par l'application de la méthode de Vachy-Buckingham.

Solution :

Choix des variables fondamentales : ρ , U et L tel que les variables restant, μ , g et σ soit de dimensions indépendantes.

D'après la méthode de Vachy-Buckingham, on a : $r = n - m = 7 - 3 = 4$

Commençons la formulation des groupes adimensionnels par la variable $F_{Trainée}$, le groupe Π_1 peut être formé par la combinaison de $F_{Trainée}$ et les variables répétitives comme :

$$\Pi_1 = F_{Trainée} \rho^a V^b l^c$$

En termes de dimensions :

$$(MLT^{-2})(ML^{-3})^a (LT^{-1})^b (L)^c = M^0 L^0 T^0$$

Pour que Π_1 soit adimensionnel, il faut que :

$$1 + a = 0 \quad (\text{pour } M)$$

$$1 - 3a + b + c = 0 \quad (\text{pour } L)$$

$$-2 - b = 0 \quad (\text{pour } T)$$

La résolution du système d'équation donne :

$$a = -1, b = -2 \text{ et } c = -2$$

Donc, on aura :

$$\Pi_1 = F_{Trainée} \rho^{-1} V^{-2} l^{-2} = \frac{F_{Trainée}}{\rho V^2 l^2}$$

On procède de la même manière avec les autres variables non répétitives, μ , g et σ , on trouve :

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V l} ; \quad \Pi_3 = \frac{g l}{V^2} ; \quad \Pi_4 = \frac{\sigma}{\rho V^2 l}$$

Finalement, la force de traînée peut être exprimée :

$$\frac{F_{Trainée}}{\rho V^2 l^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho V l}, \frac{g l}{V^2}, \frac{\sigma}{\rho V^2 l}\right)$$

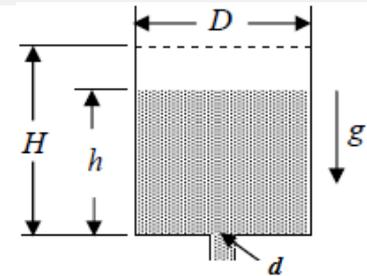
Où,

$$F_{Trainée} = \rho V^2 l^2 f\left(\frac{\mu}{\rho V l}, \frac{g l}{V^2}, \frac{\sigma}{\rho V^2 l}\right) = \rho V^2 l^2 f(Re, Fr, We)$$

Exercice 04 :

Dans ce problème, on discute le vidange d'un réservoir. C'est-à-dire que le fluide s'écoule sous l'effet de la gravité (g) par un petit orifice de diamètre (d) au fond du réservoir. La hauteur de la surface libre du fluide est, (h), le réservoir à une hauteur (H) et un diamètre (D). Lors du vidange, la hauteur (h) du fluide diminue avec le temps, (t). Cette variation de la hauteur de la surface libre est fonction des variables sous la forme :

$$h = f(H, D, d, g, t).$$



1°/- Exprimer toutes les variables énoncées par leurs dimensions (MLT)

2°/- Appliquer le théorème de π pour déterminer les grandeurs adimensionnelles du problème.

Solution :

1°/ Les dimensions des variables mise en jeu en fonction du système MLT sont :

h	H	D	d	g	t
L	L	L	L	LT^{-2}	T

2°/ On voit clairement que deux dimensions de base sont suffisantes pour définir les six variables.

Selon la méthode de Vachy-Buckingham (π), le nombre de grandeurs adimensionnelles sont :

$$r = m - n = 6 - 2 = 4$$

On va sélectionner deux variables répétitives constituant les groupes adimensionnels. De préférence ces variables représentent la géométrie, les propriétés physiques et les effets externes du problème étudié en plus, elles doivent être indépendantes entre elles. Dans notre problème, les propriétés du fluide ne sont pas considérées. Par conséquent, H , et g sont sélectionnés, elles sont indépendantes et représentatives.

Commençons la formulation des groupes adimensionnels par la variable h , le groupe Π_1 peut être formé par la combinaison de h et les variables répétitives comme :

$$\Pi_1 = h H^a g^b$$

En termes de dimensions :

$$(L)(L)^a (LT^{-2})^b = L^0 T^0$$

Pour que Π_1 soit adimensionnel, il faut que :

$$1 + a + b = 0 \text{ (pour } L\text{)}$$

$$-2b = 0 \text{ (pour } T\text{)}$$

La résolution du système d'équation donne :

$$b = 0, \text{ et } a = -1$$

Donc, on aura :

$$\Pi_1 = hH^{-1}g^0 = \frac{h}{H}$$

Procédons de la même manière avec les autres variables non répétitives, D , d et t , on trouve :

$$\Pi_2 = \frac{D}{H}; \quad \Pi_3 = \frac{d}{H}; \quad \Pi_4 = t\sqrt{\frac{g}{H}}$$

Il est facile de vérifier que tous les groupes adimensionnels sont homogènes en termes de dimensions.

Finalement, la relation de base $h = f(H, D, d, g, t)$, peut être réécrite comme suit :

$$\frac{h}{H} = g\left(\frac{D}{H}, \frac{d}{H}, t\sqrt{\frac{g}{H}}\right)$$

Exercice 05 :

On doit réaliser une maquette d'avion au $1/20$, (voir figure) à essayer dans une soufflerie à densité variable à la même vitesse que le vrai modèle d'avion (prototype). Avec l'hypothèse que la température et viscosité dynamique de l'air ne changent pas.

A quelle pression doit fonctionner la soufflerie ?



a) Une maquette d'avion



b) Avion prototype

Solution :

Pour satisfaire à la similitude dynamique, on doit égaliser les nombres de Reynolds :

$$\frac{\rho_p V_p D_p}{\mu_p} = \frac{\rho_M V_M D_M}{\mu_M}$$

D'après les hypothèses du problème, $\mu_p = \mu_M$ et $T_p = T_M$ il vient donc :

$$\rho_p D_p = \rho_M D_M \quad \text{Avec, la condition de fonctionnement, } V_p = V_M$$

$$\text{Alors, } \frac{\rho_p}{\rho_M} = \frac{D_M}{D_p} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad \rho_M = 20\rho_p$$

Le fluide de travail est de l'air qui est un gaz parfait ($pv = mrT$).

$$\text{Donc, } p = \frac{mrT}{v} = \rho rT \quad \text{Avec : } rT = Cte$$

La pression est proportionnelle à la masse volumique, donc la soufflerie doit être à 20 atm.

Exercice 06 :

Les caractéristiques d'un dirigeable (ballon) de 5 m de diamètre et de 60 m de long doivent être étudiées en soufflerie. Si la vitesse du dirigeable dans l'air immobile est de 10 m/s et si un modèle réduit (maquette) à l'échelle 1/10 doit être testée, quelle vitesse dans la soufflerie est-elle nécessaire pour assurer la similitude dynamique ? On suppose que les températures et les pressions de l'air restent les mêmes pour le prototype et pour la maquette.

Solution :

Pour une similitude dynamique dont les forces visqueuses sont importantes, on opte pour :

$$Re_p = Re_M$$

$$\left(\frac{VD}{\gamma}\right)_p = \left(\frac{VD}{\gamma}\right)_M$$

Puisque le modèle et le prototype utilisent tous deux de l'air à la même température et à la même pression, on a : $\gamma_p = \gamma_M$

Il vient :

$$V_M = V_p \left(\frac{D_p}{D_M}\right) = 10 \frac{10}{1} = 100 \text{ m/s}$$

Exercice 07 :

Un dirigeable (un ballon) a une longueur L_p , une vitesse $V_p = 6 \text{ m/s}$ dans l'air. On utilise un modèle réduit de longueur $L_M = L_p/30$ et on fait des essais dans l'eau.

a- Déterminer la vitesse V_M

b- On mesure le frottement sur le modèle, soit $F_{DM} = 2700 \text{ N}$. Calculer le frottement sur le prototype F_D .

c- Calculer la puissance mécanique nécessaire en kW pour motoriser le prototype.

$$\text{On donne : } \rho_{\text{air}} = 1.205 \text{ kg/m}^3 ; \quad \mu_{\text{air}} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ Poiseuille}$$

$$\rho_{\text{eau}} = 998 \text{ kg/m}^3 ; \quad \mu_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Poiseuille}$$

Solution :

a) Détermination de la vitesse du modèle, V_M

A partir de la similitude de Reynolds, on écrit :

$$Re_M = Re_P \Rightarrow \frac{\rho_M V_M L_M}{\mu_M} = \frac{\rho_P V_P L_P}{\mu_P}, \quad \text{avec : } \frac{L_P}{L_M} = 30$$

$$\frac{(998)V_M \left(\frac{L_P}{30}\right)}{10^{-3}} = \frac{(1.205)(6.0)(L_P)}{18.10^{-6}} \Rightarrow V_M = \frac{401.666}{33.26} = 12.07 \text{ m/s}$$

b) Détermination de la force de frottement sur le prototype, F_D

Pour trouver la force de frottement sur le prototype, on utilise la relation de similitude dynamique :

$$\frac{F_D}{\rho V^2 L^2} \Big|_P = \frac{F_D}{\rho V^2 L^2} \Big|_M$$

$$F_{D_P} = F_{D_M} \frac{\rho_P V_P^2 l_P^2}{\rho_M V_M^2 l_M^2} = 2700 \frac{1.205(6^2)}{998(12.07^2)} (30^2) = 725.021 \text{ N}$$

c) Calcul de la puissance mécanique nécessaire en kW pour motoriser le prototype

$$P_P = F_{D_P} \cdot V_P = (725.021)(12.07) = 8751 \text{ W}$$

Exercice 08 :

La similitude des pompes est basée sur la comparaison de nombres adimensionnels : nombre de Reynolds, nombre d'Euler, nombre de Rossby, etc. Supposons que les seuls nombres qui affectent l'écoulement sont les nombres de Reynolds et d'Euler. Le débit de la pompe imaginaire est de $0,25 \text{ m}^3/\text{s}$ et l'augmentation de la pression pour ce débit est de 2 Bars à 2500 kW . En raison de la demande croissante, il est suggéré de remplacer la pompe par une pompe 4 fois plus grande. Quel est le nouveau débit estimé (Q_P), l'augmentation de pression (Δp_P) et la puissance de cette pompe (P_P) ?

Solution :

Il prévoyait que le nombre de Reynolds contrôlait la situation. La densité et la viscosité restent les mêmes et par conséquent :

$$Re_m = Re_P \Rightarrow \frac{U_m D_m}{\gamma_m} = \frac{U_P D_P}{\gamma_P} \quad (\text{Le fluide de travail est le même, d'où : } \gamma_m = \gamma_P)$$

$$\text{Donc, } U_P = \frac{D_m}{D_P} U_m$$

On peut remarquer que la situation initiale est considérée comme le modèle et que la nouvelle pompe est le prototype. Le nouveau débit, Q , dépend du rapport entre la surface et la vitesse,

$$\frac{Q_P}{Q_m} = \frac{A_P U_P}{A_m U_m} \Rightarrow Q_P = Q_m \frac{A_P U_P}{A_m U_m} = Q_m \frac{D_P^2 U_P}{D_m^2 U_m}$$

Ainsi, le débit prototype est :

$$Q_P = Q_m \left(\frac{D_P}{D_m} \right)^3 = 0.25 \times 4^3 = 16 \left[\frac{m^3}{sec} \right]$$

La nouvelle pression est obtenue en comparant le nombre d'Euler à :

$$Eu_P = Eu_m$$

$$\left(\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2} \right)_P = \left(\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2} \right)_m$$

Un réarrangement de l'équation précédente donne :

$$\frac{(\Delta p)_P}{(\Delta p)_m} = \frac{(\rho U^2)_P}{(\rho U^2)_m} = \frac{U_P^2}{U_m^2}$$

Utilisant la première relation (ci-dessus), on obtient :

$$\Delta p_P = \Delta p_m \left(\frac{D_P}{D_m} \right)^2$$

La puissance peut être obtenue de la relation suivante :

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot l}{t} = FU = pAU$$

Dans cette analyse, on suppose que la pression est uniforme dans la section transversale. Cette hypothèse est appropriée car seuls les flux secondaires dans la direction radiale. Par conséquent, le rapport de puissance entre les deux pompes peut être écrit comme suit :

$$\frac{P_P}{P_m} = \frac{(pAU)_P}{(pAU)_m}$$

En substituant les rapports (P_P/P_m) , (A_P/A_m) et (U_P/U_m) du membre droit de l'éq. ci-dessus en fonction de (D_P/D_m) conduit à :

$$\frac{P_P}{P_m} = \frac{p_P A_P U_P}{p_m A_m U_m} = \left(\frac{D_P}{D_m} \right)^2 \left(\frac{D_P}{D_m} \right)^2 \left(\frac{D_P}{D_m} \right) = \left(\frac{D_P}{D_m} \right)^5$$

$$\text{Avec,} \quad \frac{p_P}{p_m} = \left(\frac{D_P}{D_m} \right)^2 ; \quad \frac{A_P}{A_m} = \left(\frac{D_P}{D_m} \right)^2 ; \quad \frac{U_P}{U_m} = \frac{D_P}{D_m}$$

Exercice 09 :

Une maquette d'hydravion est réalisée à l'échelle, $K_G = 1/10$. Elle décolle à la vitesse, $V_M = 50 \text{ km/h}$. En négligeant l'influence de la variation du nombre de Reynolds sur le coefficient de portance, C_z , calculer la vitesse V_P du prototype taille réelle.

**Solution :**

Le décollage se produit lorsque la portance est égale au poids de l'appareil, d'où :

$$W = F_z = \frac{1}{2} C_z \rho A V^2$$

Comme dans les mêmes conditions, le coefficient C_z ne varie pas et la masse volumique ρ de l'air reste constante, on a :

$$\frac{F_{z_M}}{F_{z_P}} = \frac{W_M}{W_P} = \frac{A_M V_M^2}{A_P V_P^2}$$

Le poids (W) de l'hydravion est proportionnel à sa masse volumique et au cube de ses dimensions linéaires, d'où :

$$W = \rho l^3$$

En considérant que la maquette et le prototype sont construits dans le même matériau, on peut écrire :

$$\frac{W_M}{W_P} = \frac{l_M^3}{l_P^3}$$

De la même façon les surfaces sont proportionnelles au carré des dimensions linéaires, d'où :

$$\frac{A_M}{A_P} = \frac{l_M^2}{l_P^2}$$

On a donc :

$$\frac{V_M^2 \frac{l_M^3}{l_P^3}}{V_P^2 \frac{l_P^3}{l_P^3}} = \frac{l_M^3}{l_P^3}$$

D'où :

$$V_P = V_M \sqrt{\frac{l_M}{l_P}}$$

Avec,

$$K_G = \frac{L_M}{L_P} = \frac{1}{10}$$

D'où :

$$V_P = 50\sqrt{10} = 158 \text{ km/h.}$$

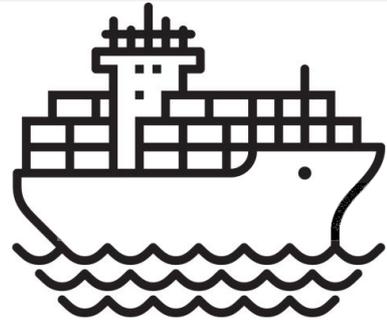
Exercice 10 :

Une conception intelligente de l'avant d'un navire doit être testé dans un bassin d'eau. Une force de traînée de $12,2 \text{ N}$ est mesurée sur le modèle à échelle de $1:20$ lorsqu'il est remorqué à une vitesse de $3,6 \text{ m/s}$. Il faut noter que dans un tel problème, les forces de gravité sont importantes.

Déterminer :

1°/ La vitesse correspondante du navire prototype ;

2°/ La force de traînée à prévoir sur le prototype.



Solution :

1°/ Sur la base de la nature de l'écoulement, on voit que le navire dans son mouvement dans l'eau subit les effets de forces de gravité plus que ceux de la viscosité. Par conséquent, on utilise dans ce cas la similitude de Froude pour les caractéristiques cinématiques. Alors, on écrit :

$$Fr_P = Fr_M \quad \text{Or,} \quad \frac{v}{\sqrt{lg}} \Big|_P = \frac{v}{\sqrt{lg}} \Big|_M$$

Puisque la gravité au niveau de la terre ne varie pas de manière nette, il vient donc :

$$\frac{V}{\sqrt{l}} \Big|_P = \frac{V}{\sqrt{l}} \Big|_M \quad \Rightarrow \quad V_P = V_M \sqrt{\frac{l_P}{l_M}} = 3.6\sqrt{20} = 16.1 \text{ m/s}$$

2°/ Pour trouver la force de traînée sur le prototype, on utilise la relation de similitude dynamique :

$$\frac{F_D}{\rho V^2 l^2} \Big|_P = \frac{F_D}{\rho V^2 l^2} \Big|_M \quad \text{Avec : } F = mg = \rho l^3 g$$

Il vient donc :

$$\frac{F_{DP}}{F_{DM}} = \frac{\rho_P V_P^2 l_P^2}{\rho_M V_M^2 l_M^2} \Rightarrow F_{DP} = F_{DM} \frac{\rho_P V_P^2 l_P^2}{\rho_M V_M^2 l_M^2} = 12.2 \frac{16.1^2}{3.6^2} 20^2 = 41000 \text{ N}$$

$$F_{DP} = 41000 \text{ N.}$$

Références bibliographiques

1. C. Wassgren. Notes on fluid mechanics and gas dynamics, School of Mechanical Engineering, Purdue University, 2010.
2. Walter H. Graf, M.S. Altinakar. Hydrodynamique, Eyrolles, 1991.
3. A. Bettahar, Mécanique des fluides et technologie des conduites, Polycopié du module TEC 371, Centre universitaire de Chlef, 2001.
4. Jack B. Evett, Cheng Liu, 2500 solved problems in fluid mechanics and hydraulics, Mc-Graw-hill, Inc. 1988.
5. P.J. Pritchard, J.C. Leylegian, Introduction to fluid mechanics, 8th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2011.
6. Frank M. White, Fluid mechanics, 7th ed., Mc-Graw-hill, Inc. 2011.
7. J.M. McDonough Lectures in elementary fluid dynamics: physics, mathematics and applications, University of Kentucky, Lexington, KY 40506-0503, 2009.
8. Yunus A. Çengel, John M. Cimbala. Fluid mechanics: fundamentals and applications. 1st. ed. McGraw-Hill, 2006.
9. Bruce R. Munson, Donald F. Young, Theodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch. Fundamentals of fluid mechanics, 6th. Ed. John Wiley & Sons, Inc. 2009.
10. Bruce R. Munson, Donald F. Young, Theodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch. Solution Manual and Study Guide for fundamentals of fluid mechanics, 4th. Eds. John Wiley & Sons, Inc. 2013.
11. Robert W. Fox. Solution manual for introduction to fluid mechanics. 3th. Ed. Wiley, 1985.
12. Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen, David R. Dowling. Fluid mechanics, 5th. Ed. Elsevier Inc. 2012.
13. Bernard Massey, John Ward-Smith. Mechanics of fluids, 8th. Ed. Taylor & Francis, 2006.

Annexe

Unités et conversions

Nom	Symbole	Dimensions	Unité SI	Autres unités	
				Nom, symbole	Valeur en SI
Longueur	L	L	mètre (m)	pouce (in) pied (ft)	2.54x10 ⁻² m 30.48x10 ⁻² m
Surface	S ou A	L ²	mètre carré (m ²)	pouce carré (in ²) pied carré (ft ²)	6.451x10 ⁻⁴ m ² 9.29x10 ⁻² m ²
Volume	V	L ³	mètre cube (m ³)	litre (l)	10 ⁻³ m ³
Masse	m	M	kilogramme (kg)	tonne (t) livre (lb)	10 ³ kg 0.4536 kg
Masse volumique	ρ	ML ⁻³	kilogramme par mètre cube (kg/m ³)	gramme par centimètre cube (g/cm ³)	10 ⁻³ kg/m ³
Temps	t	T	seconde (s)	minute (min) heure (h) jour (d) année (a)	60 s 3600 s 8.64x10 ⁴ s 3.165x10 ⁷ s
Vitesse	v	LT ⁻¹	mètre par seconde (m/s)	kilomètre par heure (km/h)	0.2778 m/s
Force	F	MLT ⁻²	newton (N)	kilogramme-force	9.80665 N
Energie, travail, quantité de chaleur	W	L ² MT ⁻²	Joule (J)	calorie (cal) watt-heure (w.h) British thermal unit (Btu)	4.185 J 3600 J 1.056x10 ³ J
Puissance	P	L ² MT ⁻³	watt (w)	1 cheval vapeur (ch din)	736 w
Contrainte, pression	σ, p	ML ⁻¹ T ⁻²	pascal (pa)	bar livre par pouce carré (psi)	10 ⁵ pa 6.895x10 ³ pa
Viscosité dynamique	μ	LM ⁻¹ T ⁻¹	pascal-seconde (pa.s)	Poise (P)	10 ⁻¹ pa.s
Fréquence	f	T ⁻¹	hertz (hz)	cycle par seconde	1 hz
Angle plan	α	A	Radian (rad)	degré (°) tour (tr) minute (′) seconde (″)	π/180 rad 2π rad π/10800 rad π/64800 rad