

Résolution des équations différentielles ordinaires

On appelle *équation différentielle* une équation reliant une fonction et ses dérivées successives. Si l'équation ne fait intervenir que la fonction et sa dérivée, on parle d'équation du premier ordre. Nous prenons comme point de départ, une équation différentielle du premier ordre avec condition initiale.

Soient $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment différentiable et $y_0 \in \mathbb{R}$.

La tâche consiste à déterminer une fonction $y : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ solution du **problème de Cauchy** :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \text{ (condition initiale ou condition de Cauchy).} \end{cases} \quad (9.1)$$

9.2 Méthode d'Euler

Reprenons l'équation différentielle de (9.1) et la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Le but est d'obtenir une approximation de la solution en $t = t_1 = t_0 + h$. Avant d'effectuer la première itération, il faut déterminer dans quelle direction on doit avancer à partir du point (t_0, y_0) pour obtenir le point (t_1, y_1) , qui est une approximation du point $(t_1, y(t_1))$.

L'équation différentielle (9.1) assure que :

$$y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0).$$

On peut donc suivre la droite passant par (t_0, y_0) et de pente $f(t_0, y_0)$. L'équation de cette droite, notée $d_0(t)$, est :

$$d_0(t) = f(t_0, y_0)(t - t_0) + y_0$$

et est illustrée par la figure (A)

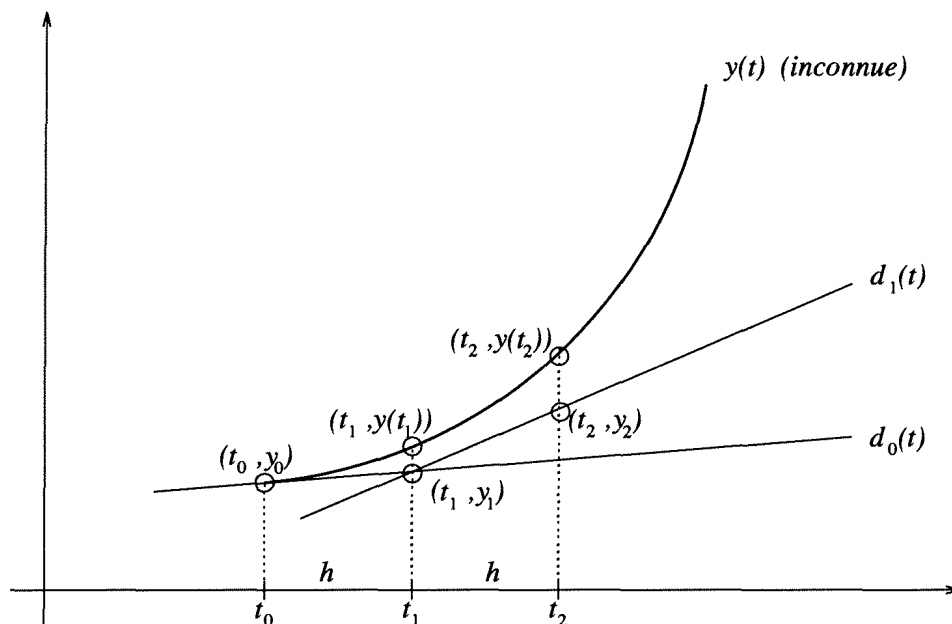


Figure 7.1: Méthode d'Euler

En $t = t_1$, on a :

$$d_0(t_1) = f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) + y_0 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_1.$$

En d'autres termes, $d_0(t_1)$ est proche de la solution analytique $y(t_1)$, c'est à dire

$$y(t_1) \simeq y_1 = d_0(t_1) = y_0 + hf(t_0, y_0).$$

Il est important de noter que, le plus souvent, $y_1 \neq y(t_1)$. Donc si on souhaite faire une deuxième itération et obtenir une approximation de $y(t_2)$, on peut refaire l'analyse précédente à partir du point (t_1, y_1) . on remarque cependant que la pente de la solution analytique en $t = t_1$ est :

$$y'(t_1) = f(t_1, y(t_1)).$$

On ne connaît pas exactement $y(t_1)$, mais nous possédons l'approximation y_1 de $y(t_1)$. On doit alors utiliser l'expression :

$$y'(t_1) = f(t_1, y(t_1)) \simeq f(t_1, y_1)$$

et construire la droite

$$d_1(t) = f(t_1, y_1)(t - t_1) + y_1,$$

qui permettra d'estimer $y(t_2)$. On a alors

$$y(t_2) \simeq y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1).$$

On remarque que l'erreur commise à la première itération est réintroduite dans les calculs de la deuxième itération.

Algorithme d'Euler²

(1) Etant donné un pas h , une condition initiale (t_0, y_0) , et un nombre maximal d'itérations N .

(2)

Pour $0 \leq n \leq N$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

et

$$t_{n+1} = t_n + h$$

écrire

$$t_{n+1} \text{ et } y_{n+1}.$$

(3) Arrêt.

Remarque 9.4. La méthode d'Euler est de loin la méthode la plus simple de résolution numérique d'équations différentielles ordinaires. Elle possède une belle interprétation géométrique et son emploi est facile. Toutefois, elle est relativement peu utilisée en raison de sa précision.

Exemple 9.4. Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t + 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On prend $h = 0,1$ et $f(t, y) = -y + t + 1$. Le tableau suivant rassemble les résultats des dix premières itérations. On peut montrer que la solution analytique de cette équation est :

$$y(t) = e^{-t} + t,$$

ce qui permet de comparer les solutions numérique et analytique et de constater la croissance de l'erreur

t_i	$y(t_i)$	y_i	$ y(t_i) - y_i $
0,0	1,000000	1,000000	0,000000
0,1	1,004837	1,000000	0,004837
0,2	1,018731	1,010000	0,008731
0,3	1,040818	1,029000	0,011818
0,4	1,070302	1,056100	0,014220
0,5	1,106531	1,090490	0,016041
0,6	1,148812	1,131441	0,017371
0,7	1,196580	1,178297	0,018288
0,8	1,249329	1,230467	0,018862
0,9	1,306570	1,287420	0,019150
1,0	1,367879	1,348678	0,019201

9.3 Méthodes de Taylor

Le développement de Taylor autorise une généralisation immédiate de la méthode d'Euler, qui permet de diminuer l'erreur d'approximation. Nous nous limitons cependant à la méthode de Taylor du second ordre. On cherche, au temps $t = t_n$, une approximation de la solution en $t = t_{n+1}$. On a immédiatement :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) \\ &= y(t_n) + y'(t_n)h + \frac{y''(t_n)}{2}h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

²Leonhard Euler, 1707-1783

En se servant de l'équation différentielle (9.1), on trouve :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + f(t_n, y(t_n))h + f'(t_n, y(t_n))h^2 + o(h^2)$$

et on a :

$$f'(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} y'(t),$$

donc

$$f'(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} f(t, y(t)).$$

Ainsi, on obtient

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right) + o(h^2), \quad (9.2)$$

en négligeant les termes d'ordres supérieurs ou égaux à 3. D'où

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right). \quad (9.3)$$

Cette relation sera la base de la méthode de Taylor.

Commentaire

En fait, la méthode de Taylor consiste à approcher la solution de l'équation (9.1) par des arcs de paraboles au lieu des segments de droites (des tangentes) utilisés dans la méthode d'Euler.

Algorithme de Taylor d'ordre 2

(1) Etant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) , et un nombre maximal d'itérations N .

(2)

Pour $0 \leq n \leq N$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n) \right)$$

et

$$t_{n+1} = t_n + h$$

écrire

$$t_{n+1} \quad \text{et} \quad y_{n+1}.$$

(3) Arrêt.

Remarque 9.5.

Dans cet algorithme, on a remplacé la solution analytique $y(t_n)$ par son approximation y_n dans la relation (9.3). On en conclut que les erreurs se propagent d'une itération à une autre.

Exemple 9.5. Soit l'équation différentielle déjà résolue par la méthode d'Euler

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t + 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On prend $h = 0,1$. Dans ce cas $f(t, y) = -y + t + 1$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = -1$. Le tableau suivant rassemble les résultats des dix premières itérations ce qui permet de comparer les

solutions numérique et analytique et de constater la croissance de l'erreur et la comparer avec la méthode d'Euler

t_i	$y(t_i)$	y_i	$ y(t_i) - y_i $
0,0	1,000000	1,000000	0,000000
0,1	1,004837	1,005000	0,000163
0,2	1,018731	1,019025	0,000400
0,3	1,040818	1,041218	0,000482
0,4	1,070302	1,070802	0,000482
0,5	1,106531	1,107075	0,000544
0,6	1,148812	1,149404	0,000592
0,7	1,196580	1,197210	0,000625
0,8	1,249329	1,249975	0,000646
0,9	1,306570	1,307228	0,000658
1,0	1,367879	1,368541	0,000662

Remarque 9.6. On remarque que l'erreur est plus petite avec la méthode de Taylor d'ordre 2 qu'avec la méthode d'Euler.

Remarque 9.7. Si l'on veut encore réduire la marge d'erreur, on poursuit le développement de Taylor dans (9.2) jusqu'à des termes d'ordre élevé. On doit alors évaluer les dérivées de la fonction $f(t, y(t))$ d'ordre de plus en plus élevé, ce qui nécessite le calcul supplémentaire de :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}, \dots, \frac{\partial^{i+j} f}{\partial t^i \partial y^j}.$$

Pour cette raison, les méthodes obtenues sont difficiles à utiliser. pour contourner cette difficulté on développe les méthodes de Runge-Kutta.

9.4 Méthodes de Runge-Kutta

Il serait avantageux de disposer de méthodes d'ordres de plus en plus élevées tout en évitant les inconvénients des méthodes de Taylor, qui nécessitent l'évaluation des dérivées partielles de la fonction $f(t, y(t))$. Une voie est tracée par les méthodes de Runge³-Kutta⁴, qui sont calquées sur les méthodes de Taylor du même ordre.

9.4.1 Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2

On a vu que le développement de la méthode de Taylor passe par la relation :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right) + o(h^2) \quad (9.4)$$

Le but est de remplacer cette dernière relation par une expression équivalente possédant le même ordre de précision ($o(h^2)$). On propose la forme :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + a_1 h f(t_n, y(t_n)) + a_2 h f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) \quad (9.5)$$

³Carle Runge, 1856-1927

⁴Martin Kutta, 1867-1944

où on doit déterminer les paramètres a_1, a_2, a_3 et a_4 de telle sorte que les expressions (9.4) et (9.5) aient toutes les deux une erreur en $o(h^2)$. Pour y arriver, on doit utiliser le développement de Taylor en deux variables autour du point $(t_n, y(t_n))$. On a ainsi :

$$f(t_n + a_3h, y(t_n) + a_4h) = f(t_n, y(t_n)) + a_3h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_4h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + o(h)$$

La relation (9.5) devient alors :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + (a_1 + a_2)hf(t_n, y(t_n)) + a_2a_3h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} \\ &+ a_2a_4h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + o(h^2) \end{aligned} \quad (9.6)$$

On voit immédiatement que les expressions (9.4) et (9.6) sont de même ordre. Pour déterminer les coefficients a_i , $i = 1, 2, 3, 4$, il suffit de comparer ces deux expressions terme à terme. On obtient un système non linéaire de 3 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2a_3 = \frac{1}{2} \\ a_2a_4 = \frac{f(t_n, y(t_n))}{2} \end{cases} \quad (9.7)$$

Le système (9.7) a moins d'équations que d'inconnues et donc n'a pas de solution unique. Cela offre une marge de manoeuvre qui favorise la mise au point de plusieurs variantes de la méthode de Runge-Kutta. Voici le choix le plus couramment utilisé.

9.4.2 Méthode d'Euler modifiée

Cette méthode correspond au choix suivant des coefficients a_i :

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 1, \text{ et } a_4 = f(t_n, y(t_n))$$

Il suffit ensuite de remplacer ces valeurs dans l'équation (9.5). Pour ce faire, on néglige le terme en $o(h^2)$ et on remplace $y(t_n)$ par son approximation y_n . On obtient alors l'algorithme suivant :

Algorithme d'Euler modifié

(1) Etant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) , et un nombre maximal d'itérations N .

(2)

Pour $0 \leq n \leq N$

$$\widehat{y} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \widehat{y})]$$

$$\text{et} \quad t_{n+1} = t_n + h$$

$$\text{écrire} \quad t_{n+1} \quad \text{et} \quad y_{n+1}.$$

(3) Arrêt.

Remarque 9.8.

Pour faciliter les calculs, l'évaluation de y_{n+1} est faite en deux étapes. La variable temporaire $\hat{y}$ correspond tout simplement à une itération de la méthode d'Euler. On fait ainsi une prédiction $\hat{y}$ de la solution en t_{n+1} qui est corrigée (et améliorée) à la deuxième étape de l'algorithme.

Exemple 9.6.

Soit le problème de cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) &= -y(t) + t + 1 \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

On choisit le pas de temps $h = 0,1$.

Itération 1 : $\hat{y} = hf(t_0, y_0) = 1$

qui est le résultat obtenu à l'aide de la méthode d'Euler. La deuxième étape donne :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(t_0, y_0) + f(t_1, \hat{y})] = 1,005.$$

Itération 2 : $\hat{y} = hf(t_1, y_1) = 1,0145$

La correction conduit à son tour à :

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}[f(t_1, y_1) + f(t_2, \hat{y})] = 1,019025.$$

9.4.3 Méthode du point milieu

Une autre méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 qui est très utilisée est la méthode du point milieu, qui correspond au choix suivant des coefficients a_i .

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, \text{ et } a_4 = \frac{f(t_n, y(t_n))}{2}.$$

En remplaçant ces valeurs des coefficients a_i dans l'équation (9.6), on obtient alors l'algorithme suivant :

Algorithme du point milieu

(1) Etant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) , et un nombre maximal d'itérations N .

(2)

Pour $0 \leq n \leq N$

$$K = hf(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h[f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K}{2})]$$

$$\text{et} \quad t_{n+1} = t_n + h$$

$$\text{écrire} \quad t_{n+1} \quad \text{et} \quad y_{n+1}.$$

(3) Arrêt.

Remarque 9.9. La méthode est dite du point milieu car la fonction $f(t, y)$ est évaluée au point milieu de l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$.

Remarque 9.10. Les méthodes d'Euler modifiée et du point milieu étant du même ordre de troncature locale, leur précision est semblable. D'autres choix sont possibles pour les coefficients a_i , mais nous nous limitons aux deux méthodes précédentes.

9.4.4 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

En reprenant le développement de Taylor de la fonction f , mais cette fois à l'ordre 5, un raisonnement similaire à celui qui a mené aux méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 aboutit à un système de 8 équations non linéaires comprenant 10 inconnues. Le résultat final est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, qui représente un outil d'une grande utilité.

Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4

(1) Etant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) , et un nombre maximal d'itération N

(2)

Pour $0 \leq n \leq N$

$$K_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2})$$

$$K_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2})$$

$$K_4 = hf(t_n + h, y_n + K_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

et $t_{n+1} = t_n + h$

écrire t_{n+1} et y_{n+1} .

(3) Arrêt.

Remarque 9.11. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est très fréquemment utilisée en raison de sa grande précision qui est mise en évidence dans l'exemple suivant :

Exemple 9.7. Soit l'équation différentielle déjà résolue par la méthode d'Euler

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t + 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On prend $h = 0,1$ et $f(t, y) = -y + t + 1$.

Itération 1 :

$$K_1 = hf(t_0, y_0) = 0$$

$$K_2 = hf(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}) = 0,005$$

$$K_3 = hf(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}) = 0,00475$$

$$K_4 = hf(t_0 + h, y_0 + K_3) = 0,009525$$

ce qui entraîne que : $y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] = 1,0048375$.

Itération 2 :

$$K_1 = hf(t_1, y_1) = 0,00951625$$

$$K_2 = hf(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1}{2}) = 0,014040438$$

$$K_3 = hf(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_2}{2}) = 0,0138142281$$

$$K_4 = hf(t_1 + h, y_1 + K_3) = 0,0187309014$$

ce qui entraîne que : $y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] = 1,0187309014$.

Le tableau suivant rassemble les résultats des dix premières itérations ce qui permet de comparer les solutions numérique et analytique et de constater la croissance de l'erreur, et la comparer avec les méthodes (Euler, Taylor).

t_i	$y(t_i)$	y_i	$ y(t_i) - y_i $
0,0	1,0000000000	1,000000	0
0,1	1,0048374180	1,0048375000	$0,819 \times 10^{-7}$
0,2	1,0187307798	1,0187309014	$0,148 \times 10^{-6}$
0,3	1,0408182207	1,0408184220	$0,210 \times 10^{-6}$
0,4	1,0703200460	1,0703202889	$0,242 \times 10^{-6}$
0,5	1,1065306597	1,1065309344	$0,274 \times 10^{-6}$
0,6	1,1488116361	1,1488119343	$0,298 \times 10^{-6}$
0,7	1,1965853034	1,1965856186	$0,314 \times 10^{-6}$
0,8	1,2493289641	1,2493292897	$0,325 \times 10^{-6}$
0,9	1,3065696598	1,3065799912	$0,331 \times 10^{-6}$
1,0	1,3678794412	1,3678797744	$0,333 \times 10^{-6}$

Remarque 9.12.

On constate que l'erreur se situe autour de 10^{-6} , ce qui se compare avantageusement avec les erreurs obtenues à l'aide de méthodes d'ordre moins élevé (Euler, Taylor, Runge-Kutta d'ordre 2).

9.5 Méthodes à un pas générique

Une méthode de résolution numérique d'équations différentielles est dite à un pas si elle est de la forme :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_i, h), \\ t_{i+1} = t_i + h, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ y_0 = y(0), \end{cases} \quad (9.8)$$

où n est le nombre de subdivisions de l'intervalle $[t_0, T]$, $\phi : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction que l'on supposera continue par rapport aux trois variables.

Choisir une méthode revient à choisir la fonction ϕ . Quelles conditions imposer à ϕ pour que la méthode fonctionne ?

Exemple 9.8. 1. Méthode d'Euler : $\phi(t, y, h) = f(t, y)$.

2. Méthode du point milieu : $\phi(t, y, h) = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y))$.

Définition 9.1. (La convergence) Une méthode à un pas est dite convergente sur $[t_0, T]$ si quelle que soit y_0 condition initiale on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq n} |y(t_i) - y_i| = 0.$$

C'est à dire, pour tout $i = 0, \dots, n$ on a convergence de la solution approchée y_i vers la solution exacte au point t_i , $y(t_i)$.

Définition 9.2. (La consistance) Une méthode à un pas est dite consistante si pour tout y solution de $y' = f(t, y)$ on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq n} \left| \frac{1}{h} (y(t_{i+1}) - y(t_i)) - \phi(t_i, y(t_i), h) \right| = 0.$$

On en tire que $p = 1$, donc la méthode d'Euler est d'ordre 1.

Méthode du point milieu : Dans ce cas $\phi(t, y, h) = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y))$ (f supposée de classe C^2). Déterminons $p \geq 1$ tel que

$$\frac{\partial^k}{\partial h^k} \phi(t, y, h)|_{h=0} = \frac{1}{k+1} f^{(k)}(x, y), \quad 0 \leq k \leq p-1.$$

1. $k = 0$: $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$ vérifiée

2. $k = 1$: $\frac{\partial}{\partial h} \phi(t, y, h)|_{h=0} = \frac{1}{2} f'(t, y) = \frac{1}{2} (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f)$. En effet ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} \phi(t, y, h) &= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial(t + \frac{h}{2})}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial(y + \frac{h}{2}f(t, y))}{\partial h} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial h} \phi(t, y, h)|_{h=0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} f(t, y) \right). \end{aligned}$$

On montrera de même que, pour $k = 2$, l'égalité n'a pas lieu. On en tire que $p = 2$, donc la méthode d'Euler est d'ordre 2.

9.6 Exercices

Exercice 9.1. Faire trois itérations avec le pas $h = 0,1$ des méthodes d'Euler, d'Euler modifiée, du point milieu et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour les équations différentielles suivantes :

- a) $y'(t) = t \sin(y(t))$ avec $y(0) = 2$.
- b) $y'(t) = t^2 + (y(t))^2 + 1$ avec $y(1) = 0$.
- c) $y'(t) = (y(t))e^t$ avec $y(0) = 2$.

Exercice 9.2. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. Trouver la solution exacte de ce problème.
2. Prendre cinq subdivisions sur l'intervalle $[0, 1]$ et appliquer les méthodes : d'Euler, Euler modifiée, point milieu.
Ecrire les valeurs obtenues, dans un tableau et comparer chacune avec la valeur exacte (en calculant l'erreur relative correspondante).
3. Quelle est la méthode qui donne de meilleures valeurs approchées de la solution exacte ?

Exercice 9.3. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = t + y(t) & t \in [0, 2] \\ y(0) = 1, 24, \end{cases}$$

qui possède la solution analytique :

$$y(t) = 2,24e^t - (t - 1)$$

I. Résoudre numériquement le même problème à l'aide de la méthode :

1. d'Euler, avec un pas $h = 0,2$.
2. de Runge-Kutta d'ordre 4, avec le pas $h = 1$.

II. Comparer au point $t = 1$, les valeurs numériques à la valeur analytique et donner (en %) l'erreur relative commise par chacune des deux méthodes.

Exercice 9.4. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} t^2 y'(t) - t y(t) + 1 = 0, & t \in [2, 3] \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

1. Résoudre numériquement le problème (P) à l'aide de la méthode :

- i) du point milieu, avec un pas $h = \frac{1}{3}$.
- ii) de Runge-Kutta d'ordre 4, avec un pas $h = 1$.

Ecrire les valeurs obtenues (de la question (i)) dans un tableau et comparer chacune d'elles avec la valeur exacte, sachant que la solution analytique de (P) est $y(t) = -\frac{t}{8} + \frac{1}{2t}$, $t \in [2, 3]$.

2. Quelle est la méthode qui donne la meilleure valeur approchée de la solution exacte au point $t = 3$?

Exercice 9.5. Soit l'équation différentielle : $y'(t) = t(y(t))$ avec $y(1) = 2$, dont on connaît la solution exacte :

$$y(t) = 2e^{(t^2-1)/2}.$$

1. En prenant successivement $h = 0,5$, $h = 0,25$, $h = 0,125$ et $h = 0,0625$.
Approcher dans chaque cas $y(2)$ en appliquant la méthode de Taylor d'ordre 2 et calculer l'erreur absolue commise dans chaque cas en comparant les résultats obtenus avec la valeur exacte $y(2)$.
2. Conclure

Exercice 9.6. Etant données trois méthodes de résolution numérique M_1, M_2 et M_3 d'un problème de Cauchy du premier ordre, de même pas de discrétisation h .

1. Comparer la précision de ces trois méthodes sachant que les erreurs absolues respectives sont de la forme :
$$E_1 = o(h), \quad E_2 = o(h^2) \quad E_3 = o(h^4).$$
2. Proposer trois méthodes de résolution dont les erreurs absolues sont E_1, E_2 et E_3 , en donnant leurs algorithmes.
3. Soit le problème de Cauchy :

$$(P) \quad \begin{cases} (1 + e^t)yy' = e^t, & t \in [0, 1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- a. On pose $h = \frac{1}{2}$. Calculer deux approximations de la solution exacte du problème (P) en $t = 1$ avec quatre décimales.
- b. Comparer chaque approximation avec la solution exacte que l'on déterminera.