Table des Matières

1	Corps des Réels	2
1.1	Bornes supérieure et inférieure d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$	2
1.1.1	Majorants, Minorants	2
1.1.2	Caractérisation des bornes supérieures et inférieures	3
1.1.3	Maximum, Minimum	4
1.1.4	Propriété d'Archimed	5
1.1.5	Partie entière	5
1.1.6	Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$	5
1.1.7	Droite numérique achevée $\mathbb{R}$	6
1.1.8	Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$	6

Chapitre 1

Corps des Réels

1.1 Bornes supérieure et inférieure d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

1.1.1 Majorants, Minorants

1) A est majoré par M (ou $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A) si $\forall x \in A$, on a, $x \leq M$.

2) A est minoré par m (ou $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A) si $\forall x \in A$, on a, $x \geq m$.

3) A est borné si elle est à la fois majorée et minorée, c'est à dire

$\exists(m, M) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in A$, on a $m \leq x \leq M$.

Proposition 1.1.1 *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Montrer que A majorée est équivalent à $-A = \{-a, a \in A\}$ est minoré.*

Preuve. A est majorée par M

donc $\forall x \in A$, on a, $x \leq M$

alors si $\forall x \in A$, on a, $-x \geq -M$.

c'est à dire $-A = \{-a, a \in A\}$ est minoré. ■

Définition 1.1.1 *On appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants de A , on le note $\sup(A)$.*

Définition 1.1.2 On appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants de A , on le note $\inf(A)$.

Exemple 1 $A = [0, 1]$, $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.

$A =]0, 1[$, $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.

1.1.2 Caractérisation des bornes supérieures et inférieures

Proposition 1.1.2 Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle. On a $M = \sup(A)$ ssi :

- 1) $\forall x \in A$, on a, $x \leq M$ et
- 2) $\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M$.

Preuve. Supposons $M = \sup(A)$ donc M est un majorant de A , on considère $\varepsilon > 0$.

Comme M est le plus petit des majorants de A , $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant car plus petit que M .

Donc il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M$.

Réciproquement, supposons que 1) et 2) soient vérifiés et montrons que $M = \sup(A)$.

1) prouve que M est un majorant de A .

Il reste à montrer que c'est le plus petit.

Supposons il existe M' tel que $\forall x \in A$, on a, $x \leq M'$ et $M' < M$.

Si $\varepsilon = M - M'$, d'après 2), il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M$,

alors il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M' < x_\varepsilon \leq M$

est un contradiction. ■

Proposition 1.1.3 Soit A un sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle. On a $m = \inf(A)$ ssi:

- 1) $\forall x \in A$, on a, $x \geq m$.
- 2) $\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $m < x_\varepsilon \leq m + \varepsilon$.

Preuve. Même méthode. ■

Proposition 1.1.4 Soient A et B deux ensembles dans $\mathbb{R}$.

1) Si $A \subset B$ alors $\sup A \leq \sup B$.

2) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

3) Si $A \cap B \neq \emptyset$ on a: $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$.

$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$.

4) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

$\sup(A - B) = \sup A - \inf B$

$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

$\inf(A - B) = \inf A - \sup B$

5) Si $\alpha \geq 0$

$\sup \alpha A = \alpha \sup A$.

$\inf \alpha A = \alpha \inf A$.

5) Si $\alpha \leq 0$

$\sup \alpha A = \alpha \inf A$.

$\inf \alpha A = \alpha \sup A$.

1.1.3 Maximum, Minimum

Définition 1.1.3 On appelle minimum de A le plus petit élément de A , on le note $\min(A)$.

Définition 1.1.4 On appelle maximum de A le plus grand élément de A , on le note $\max(A)$.

Exemple 2 $A = [0, 1]$, $\max A = 1$, $\min A = 0$.

$A =]0, 1[$, $\max A$ n'existe pas, $\min A$ n'existe pas.

Exemple 3 $A = \{1 - \frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\}$

$\inf A = \min A = 0$.

Car $n = 1$, nous donne $1 - \frac{1}{n} = 0$.

et on a $1 - \frac{1}{n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

On montre que $\sup A = 1$

On a $1 - \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon = 1 - \frac{1}{1 + \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} \in A$ tel que $1 - \varepsilon < x_\varepsilon \leq 1$.

Car on a $\frac{1}{\varepsilon} \leq 1 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ donc $\frac{1}{1 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]} \leq \varepsilon$
 c'est à dire $1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]} \leq 1$.

1.1.4 Propriété d'Archimède

$\mathbb{R}$ est archimédien, c'est à dire $\forall x, y \in \mathbb{R}$, avec $y > 0$; $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.

1.1.5 Partie entière

Définition 1.1.5 Soit x nombre réel, il existe un unique entier relatif noté $E[x]$, tel que

$$E[x] \leq x < E[x] + 1.$$

Exemple 4

Proposition 1.1.5 $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = E[x] \iff x \in \mathbb{Z}$

Proposition 1.1.6 $\forall x, m \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $E[x + m] = E[x] + m$.

Remarque 1 En général, $E(x + y) \neq E(x) + E(y)$ et $E(nx) \neq nE(x)$.

Proposition 1.1.7 La partie entière est croissante i.e

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies E[x] \leq E[y].$$

Mais la partie entière n'est pas strictement croissante. Par exemple, $0 < \frac{1}{2}$ et $E[x] = E[\frac{1}{2}]$

1.1.6 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.1.1 Entre deux réels différents, il existe un rationnel.

Preuve. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

On pose $z = y - x$

$\mathbb{R}$ est archimédien, c'est à dire $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $1 < nz$.

Et $[nx] \leq nx \leq [nx] + 1$

alors $\frac{[nx]}{n} \leq x \leq \frac{[nx]+1}{n} \leq \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < y$.

donc $x \leq \frac{[nx]+1}{n} < y$ et $\frac{[nx]+1}{n} \in \mathbb{Z}$. ■

Exercice 1 $A = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 \leq 2\}$

Montrer que n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

1.1.7 Droite numérique achevée $\bar{\mathbb{R}}$

La droite réelle achevée est l'ensemble $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Et on a:

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, x + (+\infty) = +\infty, x + (-\infty) = -\infty$
- 2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- 3) Si $\forall x > 0, x \cdot (+\infty) = +\infty, x \cdot (-\infty) = -\infty$
- 4) Si $\forall x < 0, x \cdot (+\infty) = -\infty, x \cdot (-\infty) = +\infty$
- 5) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
 $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
- 6) $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty$.

1.1.8 Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$

Définition 1.1.6 Une partie $U \subset \mathbb{R}$ est dite ouverte si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$. Une partie $F \subset \mathbb{R}$ est dite fermée si son complémentaire $U = \mathbb{R} \setminus F$ est ouvert.

Exemple 5 $]a, b[,]a, +\infty[,]-\infty, b[,]-\infty, +\infty[$ sont des ouverts. $\{a\}, [a, b], [a, +\infty[,]-\infty, b],]-\infty, +\infty[$ sont des fermés. $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont à la fois ouverts et fermés.