

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Ahmed Zabana - Relizane
Faculté de Sciences et technologique

Mécanique des Fluides

Polycopié de Mécanique des Fluides « Cours et applications »

Responsable du module
Dr. Belgacem Souad

Mode d'évaluation
Contrôle continu : 40 % ; Examen final : 60 %



Avant –propos

Ce polycopié de cours de Mécanique des Fluides I répond au programme officiel du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. Il est destiné aux étudiants de la deuxième année LMD (3^{ème} semestre) du domaine Sciences et Technique des universités et écoles d'ingénieurs Algériennes. Il constitue une initiation à la mécanique des fluides

Ce document couvre la majorité des aspects de la mécanique des fluides. Il est constitué de quatre chapitres qui s'enchainent comme suit :

Dans le premier chapitre, on étudie les propriétés des fluides, la statique des fluides en deuxième chapitre et la dynamique des fluides parfaits incompressibles en troisième chapitre, le dernier et quatrième chapitre est réservé à la dynamique des fluides réels incompressibles.

Ces quatre chapitres sont illustrés par des exercices résolus qui peuvent aider le lecteur à mieux comprendre le cours.

La rédaction de ce polycopié à été tirée de la documentation existante au niveau de toutes les bibliothèques et les sites Internet

Sommaire

Chapitre 1 : Propriétés des fluides

- 1.1. Définition d'un fluide
- 1.2. Système d'unités
- 1.3. Propriétés physiques des fluides
 - Compressibilité
 - Masse volumique
 - Densité
 - Poids volumique
 - Volume massique
 - Viscosité

Chapitre 2 : Statique des fluides

- 2.1. Notions de pression
- 2.2. Pression en un point d'un fluide au repos
- 2.3. Principe fondamental de l'hydrostatique
- 2.4. Transmission des pressions dans les liquides
- 2.5. Equations de l'hydrostatique
- 2.6. Hydrostatique d'un liquide incompressible dans le champ de pesanteur
- 2.7. Hydrostatique dans d'autres champs de force

Chapitre 3 : Dynamique des fluides parfaits incompressibles

- 3.1. Equations générales de la dynamique des fluides parfaits
- 3.2. Ecoulement permanent
- 3.3. Equation de continuité
- 3.4. Débit massique, débit volumique
- 3.5. Théorème de Bernoulli (écoulement sans échange de travail)
- 3.6. Applications du théorème de Bernoulli
 - Vidange d'un réservoir
 - Tube de Venturi
 - Tube de Pitot
- 3.7. Théorème de Bernoulli (écoulement avec échange de travail)
- 3.8. Théorème d'Euler

Chapitre 4 : Dynamique des fluides réels incompressibles

- 4.1. Régimes d'écoulement
- 4.2. Ecoulement laminaire et turbulent
- 4.3. Pertes de charge
 - Pertes de charge linéaires
 - Pertes de charge singulières
- 4.4. Théorème de Bernoulli Généralisé

Références bibliographiques

Chapitre 1 : Propriétés des fluides

1.1. Définition d'un fluide

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Ils se déforment et s'écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l'état gazeux et l'état liquide.

1.2. Système d'unités

Les unités de mesure utilisées dans ce document sont celles du système international (SI). Les unités principales de ce système sont rassemblées dans le tableau suivant :

Tableau 1.1 : Principales unités dans le système international (SI)

Longueur	Masse	Temps	Pression	Force	Energie	Puissance
Mètre	Kilogramme	Seconde	Pascal	Newton	Joule	Watt
(m)	(Kg)	(s)	(Pa)	(N)	(J)	(W)
L	M	T	ML ⁻¹ T ⁻²	MLT ⁻²	ML ² T ⁻²	ML ² T ⁻³

1.3. Propriétés des fluides

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

- 1.3.1 Compressibilité
- 1.3.2 Masse volumique et densité
- 1.3.3 Poids volumique
- 1.3.4 Volume massique
- 1.3.5 Viscosité

1.3.1 Compressibilité

La compressibilité est le caractère de variation de volume de fluide avec une variation de pression (dp), le volume de fluide subit une diminution de volume (dV).

L'augmentation de pression entraîne une diminution de volume.

Le coefficient de compressibilité est : $\beta = -\frac{dV/V}{dp} = -\frac{dV}{dpV}$ (Pa⁻¹), (m²/N) (1.1)

β : coefficient de compressibilité (m²/N)

V : volume de fluide (m³)

dV : variation de volume (m³)

dp : variation de pression (N/m²)

1.3.2 Masse volumique et densité

a) *Masse volumique* : La masse volumique ρ d'un fluide est la masse de l'unité de volume de ce fluide. Elle s'exprime en **kg/m³**

Les fluides sont caractérisés par leur masse volumique $\rho = \frac{\text{masse}}{\text{Volume}} = \frac{M}{V}$ (1.2)

M : masse du fluide (kg)

V : volume du fluide (m³)

ρ : masse volumique (kg/m³)

Fluides	mercure	eau de mer	eau pure	huile	essence	butane	air
$\rho(\text{kg/m}^3)$	13 600	1030	1000	900	700	2	1.293

b) *Densité*

La densité : elle mesure le rapport de la masse volumique du fluide rapportée à un corps de référence. C'est une grandeur sans unité définie par : $d = \frac{\rho}{\rho_{\text{réf}}}$ (1.3)

Le corps de référence dépend de l'état physique du corps

Eau : pour les solides et les liquides

Air : pour les gaz

Exemples : $d_{\text{eau}} = \frac{1000}{1000} = 1$ $d_{\text{essence}} = \frac{700}{1000} = 0.7$

Les liquides sont caractérisés par une masse volumique relativement importante ;

$$\rho_{\text{liquide}} \gg \rho_{\text{gaz}}$$

Pour les gaz, la masse volumique dépend de la température et de la pression.

1.3.3 **Poids volumique** (poids spécifique) : ϖ (N/m³)

Il représente la force d'attraction exercée par la terre sur l'unité de volume, c'est-à-dire le poids de l'unité de volume.

$$\varpi = \frac{G}{V} = \frac{Mg}{V} = \frac{\rho V g}{V} \quad \varpi = \rho g \quad (\text{N/m}^3) \quad (1.4)$$

1.3.4 Volume massique (volume spécifique)

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance, c'est l'inverse de la masse volumique

$$v = \frac{V}{M} = \frac{\cancel{V}}{\rho \cancel{V}} = \frac{1}{\rho} \quad (\text{m}^3/\text{kg}) \quad (1.5)$$

1.3.5 Viscosité

La viscosité d'un fluide est la propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches de fluide les unes par rapport aux autres. Lorsque le fluide se déplace en couches parallèles ; le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique, (μ) et on écrit alors :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.6)$$

La viscosité cinématique, ν , est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.7)$$

Dans le système SI, l'unité de la viscosité dynamique est le (Pa.s) ou (kg/ms) ou PI

Pa.s : Pascal seconde

PI : Poiseuille avec $1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ PI} = 1 \text{ kg/ms}$

Dans le système CGS l'unité est le Poise (Po) avec $1 \text{ Po} = 10^{-1} \text{ PI}$

Dans le système SI, l'unité de la viscosité cinématique, ν , est le (m^2/s) ; dans le système CGS l'unité est le stokes où $1 \text{ stokes} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

1.4. Applications

Exercice 1

Soit un volume d'huile $V = 6 \text{ m}^3$ qui pèse $G = 47 \text{ kN}$. Calculer la masse volumique, le poids spécifique et la densité de cette huile sachant que $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Calculer le poids G et la masse M d'un volume $V = 3$ litres d'huile de boîte de vitesse ayant une densité égale à 0.9

Solution

- Masse volumique

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{G}{gV} = \frac{47.1000}{9.81 \cdot 6} = \underline{798.5 \text{ kg/m}^3}$$

- Poids volumique

$$\varpi = \rho g \implies \varpi = 798.5 \cdot 9.81 = \underline{7833.3 \text{ N/m}^3}$$

- Densité

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{réf}}} \implies d = \frac{798.5}{1000} = \underline{0.7985}$$

- Poids ; $\varpi = \frac{G}{V} \implies G = \varpi \cdot V = \rho g V = 0.9 \cdot 10^3 \cdot 9.81 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = \underline{26.48 \text{ N}}$

- Masse : $M = \rho \cdot V = 0.9 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = \underline{2.7 \text{ kg}}$ $M = \frac{G}{g} = \frac{26.48}{9.81} = \underline{2.7 \text{ kg}}$

Exercice 2

Déterminer le poids volumique de l'essence sachant que sa densité $d = 0.7$. On donne :

- l'accélération de la pesanteur $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
- la masse volumique de l'eau $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

Solution

$$\varpi = \rho g \implies \varpi = 0.7 \cdot 1000 \cdot 9.81 = \underline{6867 \text{ N/m}^3}$$

Exercice 3

Déterminer la viscosité dynamique d'une huile moteur de densité $d = 0.9$ et de viscosité cinématique $\nu = 1.1 \text{ St}$

Solution

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \implies \mu = \nu \cdot \rho = 1.1 \cdot 10^{-4} \cdot 900 = \underline{0.099 \text{ Pa}\cdot\text{s}}$$

Exercice 4

La viscosité de l'eau à 20°C est de 0.01008 Poise. Calculer

- La viscosité absolue (dynamique)

- Si la densité est de 0.988, calculer la valeur de la viscosité cinématique en m²/s et en Stokes

Solution

$$1 \text{ Po} = 10^{-1} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\mu = \underline{0.001008 \text{ Pa}\cdot\text{s}}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \implies \nu = \frac{0.001008}{988}$$

$$\nu = 1.02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 1.02 \cdot 10^{-2} \text{ St}$$

Exercice 5

Du fuel porté à une température T=20°C a une viscosité dynamique $\mu = 95 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Calculer sa viscosité cinématique ν en stokes sachant que sa densité est d=0,95.

On donne la masse volumique de l'eau est 1000 kg /m³

Solution

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \nu = \frac{0.095}{950} = \underline{10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} = 1 \text{ St}} \quad (1 \text{ stokes} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s})$$

Exercice 6

On comprime un liquide dont les paramètres à l'état initial sont : p₁= 50bar et V₁= 30.5 dm³ et les paramètres à l'état final sont : p₂= 250bar et V₂= 30dm³. Calculer le coefficient de compressibilité β de ce liquide

Solution

$$\beta = -\frac{dV/V}{dp} = -\frac{dV}{dpV} = -\frac{(30.5 - 30)}{(250 - 50) \cdot 30.5} = \underline{-8.2 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1}}$$

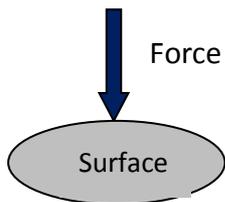
Chapitre 2 : Statique des fluides

2.1. Introduction

La statique des fluides est la branche de la mécanique des fluides qui traite principalement les fluides au repos. L'étude des propriétés des fluides au repos constitue la statique des fluides.

2.2. Notions de pression

La pression exercée par une force F agissant perpendiculairement sur une surface S est :



$$P = \frac{F}{S} \quad (2.1)$$

(N/m^2) (N)
 (m^2)

L'unité légale (SI) de pression est le Pascal. $1Pa = 1 \frac{N}{m^2}$

On utilise également l'hectopascal (hPa) $1hPa = 100 Pa$

Autres unités :

- le bar $1bar = 10^5 Pa = 10^5 \frac{N}{m^2}$
- l'atmosphère $1atm = 101325 Pa = 1013 hPa$ appelée pression atmosphérique.

	Pascal (Pa)	Bar	Atmosphère
Pascal	1	10^{-5}	$9.869 \cdot 10^{-6}$
Bar	10^5	1	0.987167
Kgf/cm²	98039	0.9803	0.968
Atmosphère	101325	1.0133	1
cm d'eau	98.04	$980 \cdot 10^{-6}$	$968 \cdot 10^{-6}$
mm de Hg	133	$1.333 \cdot 10^{-3}$	$1.316 \cdot 10^{-3}$
mbar	10^2	10^{-3}	$987 \cdot 10^{-6}$

2.3. Pression en un point d'un fluide au repos (Théorème de Pascal)

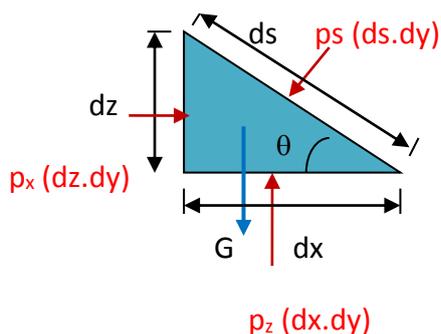


Figure (2.1) : Pression en un point d'un liquide au repos

Supposons que le liquide exerce une pression p_x sur la surface $(dz dy)$, une pression p_z sur la surface $(dx dy)$ et une certaine pression p_s sur la surface $(ds dy)$ de l'élément.

Donc l'intensité des forces de pression (s'appliquant de façon normale aux surfaces) est :

$$F_x = p_x (dzdy) ; F_z = p_z (dxdy) ; F_s = p_s (dsdy) \quad (2.2)$$

La force de gravité agissant sur cet élément de fluide est : $G = \varpi \frac{(dxdz)}{2} dy$ (2.3)

Dans la direction horizontale des x :

$$\sum \vec{F}_{ox} = 0 \longrightarrow F_x - F_s \sin\theta = 0 \longrightarrow p_x (dzdy) - p_s (dsdy) \sin\theta = 0$$

D'où : $p_x dz - p_s ds \sin\theta = 0$, en sachant que $ds \sin\theta = dz$, on obtient : $p_x = p_s$ (2.4)

$$\sum \vec{F}_{oz} = 0 \longrightarrow F_z - F_s \cos\theta - G = 0 \longrightarrow p_z (dxdy) - p_s (dsdy) \cos\theta - \varpi \frac{(dxdz)}{2} dy = 0$$

D'où : $p_z dx - p_s ds \cos\theta - \varpi \frac{(dxdz)}{2} = 0$ et en sachant que $ds \cos\theta = dx$, on obtient : $p_z - p_s - \frac{dz}{2} = 0$

Et si l'on réduit l'élément de volume à un point, c'est-à-dire $dz = 0$, on obtient $p_z = p_s$ (2.5)

Des équations (2.4) et (2.5), on obtient : $p_x = p_z = p_s$ (2.6)

Par conséquent, la pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos est la même (agit de façon égale) dans toutes les directions

On peut vérifier que la pression exercée au sein d'un liquide en équilibre,

- est constante en tous points d'un même plan horizontal.
- est indépendante de la direction considérée.
- croît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de sa surface libre.

2.4. Principe fondamental de l'hydrostatique

3.1 Principe fondamental de l'hydrostatique

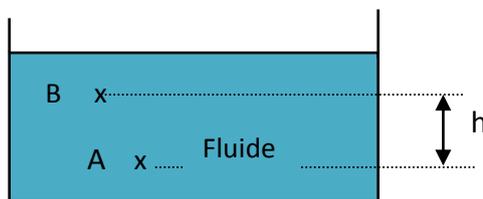


Figure 2.2

ρ est la masse volumique du fluide en (kg/m^3)

h est la dénivellation entre les deux points A et B en (m)

g est l'accélération de la pesanteur $(9,81 \text{ N}/\text{kg})$

$\Delta P = P_A - P_B$ est la différence de pression en (Pa)

La différence de pression entre deux points d'un fluide en équilibre est donnée par la relation,

$$p_A - p_B = \rho gh$$

2.5. Transmission des pressions dans les liquides

2.5.1. Théorème de Pascal

Toute variation de pression en un point d'un liquide au repos est transmise intégralement à tous les autres points du liquide.

2.5.2. Application : Principe de la presse hydraulique

Soit le schéma de principe d'une presse hydraulique (Fig.2.3). On y produit une force considérable à partir d'une force relativement peu importante, en considérant la surface d'un piston à la sortie 2 plus large que celui à l'entrée 1.

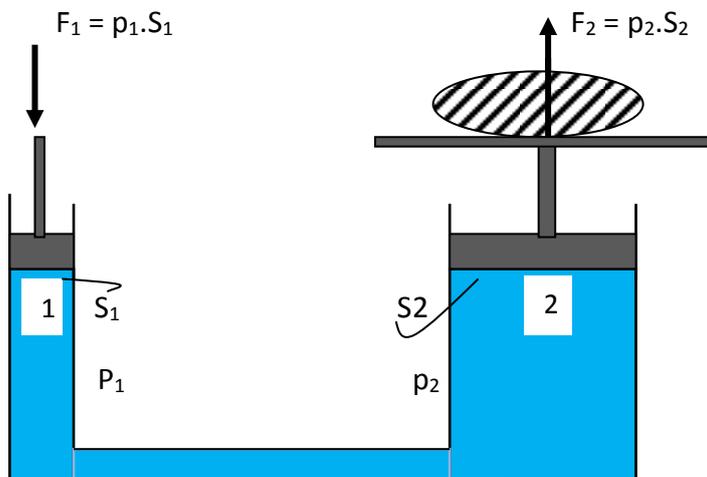


Figure.2.3 : Principe d'une presse hydraulique

Lorsque les deux pistons 1 et 2 sont sur le même niveau, on a : $p_1 = p_2$

$$\text{Soit : } F_1 = p_1 \cdot S_1 \text{ et } F_2 = p_2 \cdot S_2 \quad \text{donc : } P_1 = \frac{F_1}{S_1} \quad P_2 = \frac{F_2}{S_2}$$

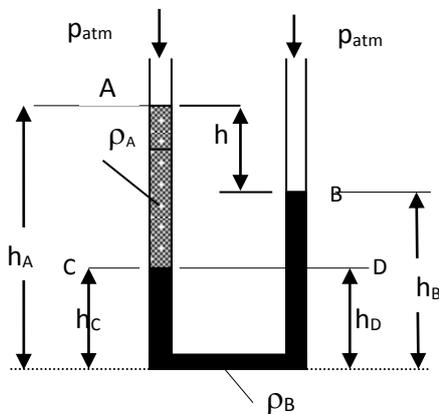
$$p_1 = p_2 \quad \text{donc : } \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$\text{d'où : } \frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}$$

$$\text{Si } S_2 \gg S_1 \implies F_2 \gg F_1$$

2.5.3. Equilibre de deux fluides non miscibles

Un tube en U rempli d'un liquide de masse volumique (ρ_B), si dans l'une des branches un autre liquide non miscible au premier et de masse volumique (ρ_A) est versé, il est observé une dénivellation $h=(h_A-h_B)$ entre les deux liquides. Les deux surfaces libres étant à la pression atmosphérique. D'après le principe de Pascal, il est possible d'écrire les équations suivantes :



$$\left. \begin{array}{l} p_D = p_{atm} + \rho_B g (h_B - h_D) \\ p_C = p_{atm} + \rho_A g (h_A - h_C) \end{array} \right\} \Longrightarrow p_{atm} + \rho_B g (h_B - h_D) = p_{atm} + \rho_A g (h_A - h_C)$$

et puisque $h_D = h_C$ (même plan horizontal d'un même fluide) $\Longrightarrow \rho_B g (h_B - h_C) = \rho_A g (h_A - h_C)$

$$\boxed{\rho_A = \rho_B \frac{(h_B - h_C)}{(h_A - h_C)}} \quad (2.7)$$

La simple mesure des hauteurs des deux fluides permet de déterminer la masse volumique d'un fluide. De même ce concept est utilisé pour la mesure des pressions avec les manomètres à colonne de liquide ou manomètre différentiel.

2.6. Principe d'Archimède

Si l'on examine le comportement d'un cylindre de longueur L et de section S , immergé dans un fluide de masse volumique ρ dans le champ de pesanteur terrestre, ce cylindre est soumis à plusieurs forces :

- des forces radiales de pression qui s'exercent sur la paroi verticale et qui sont diamétralement opposées et s'annulent deux à deux (f et f')

- sur la surface inférieure s'exerce une force verticale normale à S, dirigée vers le haut et d'intensité $F_2 = p_2.S$.
- sur la surface supérieure s'exerce une force verticale normale à S dirigée vers le bas et d'intensité $F_1 = p_1.S$

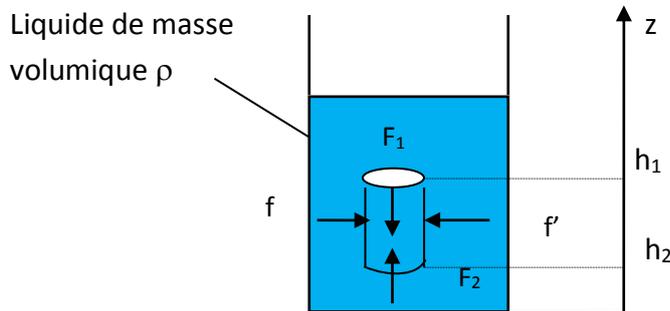


Figure 2.4 : Poussée d'Archimède cylindre immergé

La poussée d'Archimède est la résultante de toutes ces forces. Si ces forces sont projetées sur l'axe Oz, la résultante suivante est obtenue :

$$\vec{\Sigma F}_{\text{ext}} = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = (p_2 - p_1).S = (h_2 - h_1) \rho g S = \rho V g$$

Puisque $(h_2 - h_1)$ n'est autre que la hauteur du cylindre. Donc :

$$\vec{\Sigma F} = \rho V g \quad (2.8)$$

La poussée d'Archimède est dirigée dans le sens inverse du champ de pesanteur et s'annonce de la façon suivante : « Tout corps totalement immergé dans un liquide est soumis à une poussée dirigée du bas vers le haut et égale au poids du liquide déplacé, c'est-à-dire correspondant au volume du corps immergé »

Le comportement d'un corps immergé dans un fluide au repos ; soumis seulement aux forces de pression et de pesanteur, est donné par le sens du vecteur poids apparent, défini par la relation, en projetons sur l'axe Oh ; on obtient : $F_{\text{app}} = -m g + F_A$ dans laquelle F_{app} , mg et F_A représentent respectivement le poids apparent, le poids réel et la poussée d'Archimède. Dans la pratique, trois cas peuvent se présenter, si :

- $F_A > 0$, le corps s'élève dans le fluide et cette ascension aboutit à une flottaison du solide.
- $F_A = 0$, le corps est immobile dans le fluide, puisque la poussée d'Archimède équilibre le poids du solide.
- $F_A < 0$, le corps s'enfonce dans le fluide, c'est le type de chute qui est rencontrée dans la décantation des solides.

2.7. Equations de l'hydrostatique

Considérons un réservoir plein de liquide accéléré en bloc dans une direction quelconque dont la surface libre est exposée à la pression atmosphérique, et prenons un élément de fluide de volume $(dx dy dz)$. L'élément de fluide est en équilibre statique sous l'influence de trois forces de volume et de six forces de pression hydrostatique. Les forces qui agissent sur cet élément de volume $(dx dy dz)$ dans la direction z sont :

1. Les forces de volume : $\rho Z (dx dy dz)$
2. Les forces de surface (de pression) : $(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}) dx dy$ et $(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}) dx dy$

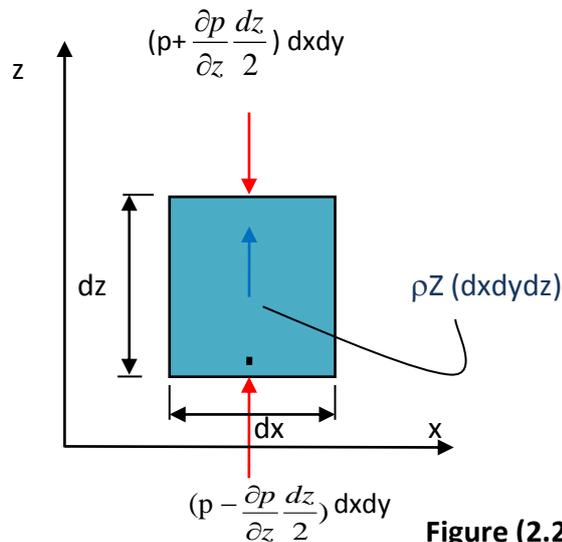


Figure (2.2) : Forces agissant sur un élément de fluide de volume (dxdydz) dans la direction z

La condition d'équilibre des forces selon z est : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

$$\cancel{\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dxdy} - \cancel{\left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dxdy} + \cancel{\rho Z (dxdydz)} = 0 \quad \text{d'où : } -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z = 0 \quad (2.9)$$

De la même façon, on obtient les équations d'équilibre dans les autres directions x et y :

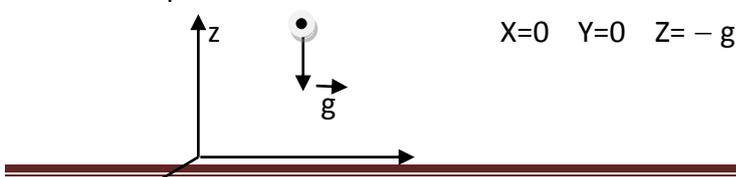
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad \underbrace{\rho \vec{F}}_1 - \underbrace{\text{grad } p}_2 = \vec{0} \quad (2.10)$$

1. Force de volume par volume unitaire 2. Force de pression par volume unitaire

Les équations (2.6) sont appelées équations fondamentales de l'hydrostatique (équations d'Euler). Ces équations montrent que la pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos dépend des coordonnées du point dans le volume du liquide et de la masse volumique, c'est-à-dire $p = f(x, y, z, \rho)$.

2.8. Hydrostatique d'un liquide incompressible dans le champ de pesanteur

Dans le cas où la force massique est seulement la force de pesanteur, les composantes de la force massique unitaire sont :



y x

$$\rho g - \frac{dp}{dz} = 0; \quad dp = -\rho g dz$$

$$\text{d'où } \boxed{p(z) = -\rho g z + C} \quad (2.11)$$

2.9. Hydrostatique dans d'autres champs de force

Dans certains cas particuliers, d'autres champs sont à prendre en considération. Les équations fondamentales générales de l'hydrodynamique sont valables s'il n'y a pas de mouvement relatif entre les particules de fluide, elles sont aussi valables si le fluide est accéléré en bloc comme un corps solide.

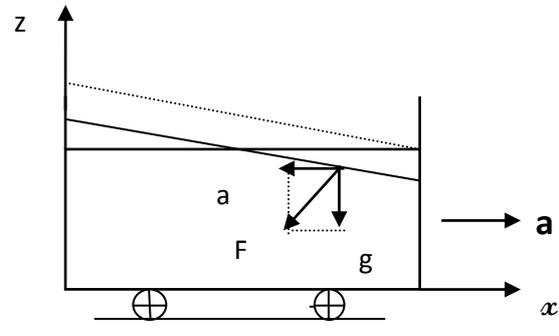
On s'intéresse aux deux cas suivants :

1. Cas d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur avec accélération constante
2. Cas d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur avec rotation uniforme

2.9.1. Champ de pesanteur avec accélération horizontale constante

Soit un liquide homogène soumis à une accélération horizontale constante \mathbf{a} , donc :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{ainsi les équations (2.6) deviennent :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{array} \right. \quad (2.8)$$


La pression est fonction uniquement de x et de z

La variation totale de la pression est définie comme suit :

$$p(x, y) = -\rho a x + f(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = f'(z) \quad f(z) = -\rho g z + C$$

D'où la pression est :

$$\boxed{p(x, z) = -\rho a x - \rho g z + C} \quad (2.12)$$

On divise les deux termes de l'équation (2.9) par $(\bar{\omega} = \rho g)$, on obtient :

$$\frac{p}{\omega} + z + \frac{a}{g} x = C \quad (2.13)$$

C'est l'équation fondamentale de l'hydrostatique dans le champ de pesanteur avec accélération horizontale constante.

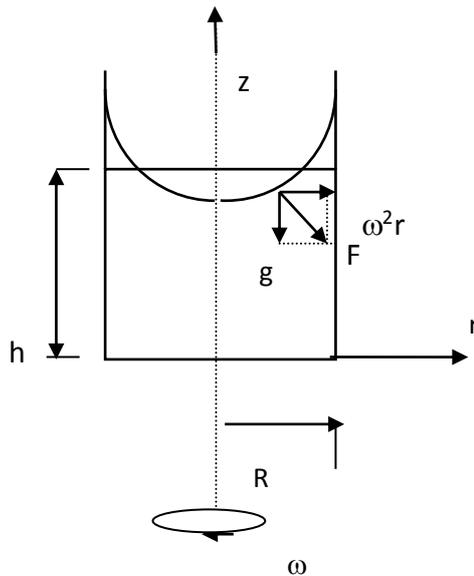
Les lignes isobares (lignes d'égale pression) sont des lignes dont tous les points sont soumis à la même pression, $p = Cte$ et $dp = 0$. Donc l'équation (2.10) peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{z = -\frac{a}{g} x + C} \quad (2.14)$$

C'est l'équation générale des lignes d'égales pression qui sont des droites de $(-a/g)$ orthogonales au vecteur \vec{F} .

2.9.2. Champ de pesanteur avec rotation uniforme

Considérons un réservoir cylindrique qui tourne à une vitesse angulaire ω constante.



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 r \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho \omega^2 r & (a) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 & (b) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g & (c) \end{aligned} \right\} (2.15)$$

$$p(r, z) = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} + f(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = f'(z) \quad \text{d'où } f(z) = -\rho g z + C$$

$$\boxed{p(r, z) = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} - \rho g z + C} \quad (2.16)$$

On divise les deux termes de l'équation (2.13) par ($\bar{\omega} = \rho g$), on obtient :

$$\frac{p}{\bar{\omega}} + z - \frac{\omega^2}{2g} r^2 = C \quad (2.17)$$

C'est l'équation fondamentale de l'hydrostatique dans le champ de pesanteur avec rotation uniforme

Les lignes isobares (lignes d'égale pression) sont des lignes dont tous les points sont soumis à la même pression, $p = Cte$ et $dp = 0$. Donc l'équation (2.14) peut se mettre sous la forme :

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C \quad (2.18)$$

C'est l'équation générale des lignes d'égale pression qui sont des paraboles de révolution symétriques par rapport à l'axe de rotation, orthogonales au vecteur \vec{F} .

2.10. Applications:

Exercice 1 : Une brique de dimension (20x10x5) cm pèse 2.5 kg. Quelle pression exerce-t-elle sur le sol suivant la face sur laquelle on la pose ?

Solution

$$\text{Face 1 : } p_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{mg}{S_1} = \frac{2.5 * 9.81}{0.2 * 0.1} = 1226.25 \frac{N}{m^2}$$

$$\text{Face 2 : } p_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{mg}{S_2} = \frac{2.5 * 9.81}{0.2 * 0.05} = 2425.50 \frac{N}{m^2}$$

$$\text{Face 3 : } p_3 = \frac{F}{S_3} = \frac{mg}{S_3} = \frac{2.5 * 9.81}{0.1 * 0.05} = 4905.00 \frac{N}{m^2}$$

Exercice 2 : On enfonce une punaise métallique dans une planche en exerçant sur sa tête une force de 3 kgf avec le pouce ; la tête a 1cm de diamètre et la pointe 0.5mm. Quelles sont les pressions exercées sur le pouce ensuite sur la planche ?

Solution

Pression sur le pouce :

$$P = \frac{F}{S} = \frac{3 * 9.81}{\pi \frac{(10^{-2})^2}{4}} = 3.8 * 10^5 Pa$$

Sur le bois :

$$P = \frac{F}{S} = \frac{3 \cdot 9.81}{\pi \frac{(0.5^{-3})^2}{4}} = 1530 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La pression augmente lorsque la surface pressée est petite

Exercice 3 : Combien faut-il de mètres d'eau pour avoir une différence de pression de 1bar?

Solution

$$\Delta P = \rho g h \quad \text{soit} \quad 10^5 = 10^3 \cdot 9.81 h \quad \text{d'où} \quad h = 10.19 \text{ m}$$

Exercice 4 : Calculer la pression relative et la pression absolue auquel est soumis un plongeur en mer à une profondeur de 31.6m. On donne $\rho_{\text{eau de mer}} = 1025 \text{ kg/m}^3$

Solution

Pression relative

$$P_r = \rho_{\text{eau de mer}} g h = 1025 \cdot 9.81 \cdot 31.6 = 317\,746 \text{ Pa} = 3.17 \text{ bar}$$

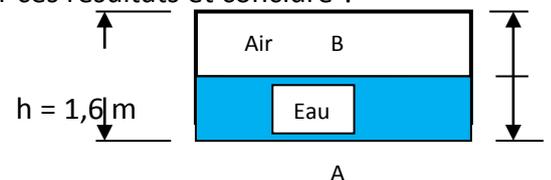
Pression absolue = Pression relative + pression atmosphérique

$$\text{Soit } P_{\text{absolue}} = 317\,746 + 101\,325 = 419\,071 \text{ Pa} = 4.19 \text{ bar}$$

Exercice 5 : La cuve ci-contre est à moitié pleine d'eau. Calculez la différence de pression entre les points A et B, puis entre les points B et C. Comparer ces résultats et conclure !

On donne : - masse volumique de l'eau 10^3 kg/m^3

Solution - masse volumique de l'air 1.3 kg/m^3



$$\Delta P_{AB} = \rho_{\text{eau}} g (h_A - h_B) = \rho_{\text{eau}} g h/2 \quad \text{soit} \quad \Delta P_{AB} = 10^3 \cdot 9.81 \cdot 0.8 = 7\,848 \text{ Pa}$$

$$\Delta P_{BC} = \rho_{\text{air}} g (h_B - h_C) = \rho_{\text{air}} g h/2 \quad \text{soit} \quad \Delta P_{BC} = 1.3 \cdot 9.81 \cdot 0.8 = 10.2 \text{ Pa}$$

Conclusion : la pression dans l'eau est très supérieure devant la pression dans l'air

Exercice 6 : On donne $F_1 = 100 \text{ N}$ et $D_1 = 10 \text{ cm}$ (diamètre du petit piston)

Le petit piston descend d'une hauteur $h_1 = 1 \text{ m}$

1. Si le diamètre du grand piston est $D_2 = 1 \text{ m}$, quelle est l'intensité de la force F_2 exercée sur le grand piston ?
2. De quelle hauteur h_2 monte le grand piston ?

Solution

1.

$$P_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{100}{S_1} = 12732 \text{ Pa} \quad \text{avec} \quad S_1 = \frac{\pi \times (0.1)^2}{4} = 7.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$F_2 = P_2 \cdot S_2 \quad \text{or} \quad P_1 = P_2 \quad \text{soit} \quad F_2 = 12732 \times \frac{\pi}{4} (1)^2 = 10.000 \text{ N}$$

$$2. V = S_1 h_1 = 0,0078 \times 1 = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\text{D'où } h_2 = \frac{V}{S_2} = \frac{7,8 \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{4}(1)^2} = 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

Exercice 7 : Un récipient contient de l'eau sur 20cm et de l'huile sur 50cm. La pression au point A est égale à la pression atmosphérique. Calculer la pression aux points B et C ; sachant que $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_{\text{huile}} = 900 \text{ kg/m}^3$

Solution :

$$\text{Soit } P_A = P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_B = P_A + \rho_h g H_2 = 10^5 + 900 \cdot 9,81 \cdot 0,5 = \underline{104500 \text{ Pa}}$$

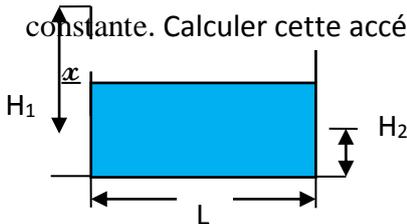
$$P_C = P_B + \rho_e g H_1 = 104500 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,2 = \underline{106482 \text{ Pa}}$$

Exercice 8 : Un récipient en partie rempli d'eau et soumis à une accélération horizontale constante. L'inclinaison de la surface de l'eau est de 30° . Quelle est l'accélération du récipient ?

Solution

$$\text{tg } \theta = \frac{a}{g} \quad \text{Donc : } a = g \cdot \text{tg } \theta = 9,81 \cdot \text{tg } 30^\circ = 9,81 \cdot 0,5 = 4,9 \text{ m/s}^2$$

Exercice 9 : Un récipient en partie rempli d'eau et soumis à une accélération horizontale constante. Calculer cette accélération si on : $L=3\text{m}$ $H_1=1,8\text{m}$ $H_2=1,2\text{m}$ $g=9,81 \text{ m/s}^2$



Solution

$$\text{tg } \theta = \frac{a}{g} = \frac{x}{0,5L} \quad \text{Donc } a = \frac{g \cdot x}{0,5L} = \frac{9,81 \cdot 0,6}{1,5} = 3,9 \text{ m/s}^2$$

$$x = H_1 - H_2 = 1,8 - 1,2 = 0,6 \text{ m}$$

Exercice 10 : Un réservoir cylindrique de 3m de haut, 1m de diamètre contient 2m d'eau et tournant autour de son axe. Quelle vitesse angulaire ω constante peut-on atteindre sans renverser l'eau. Quelle est la pression au fond du réservoir en A (axe) et B (paroi) quand $\omega = 10 \text{ rad/s}$

Solution

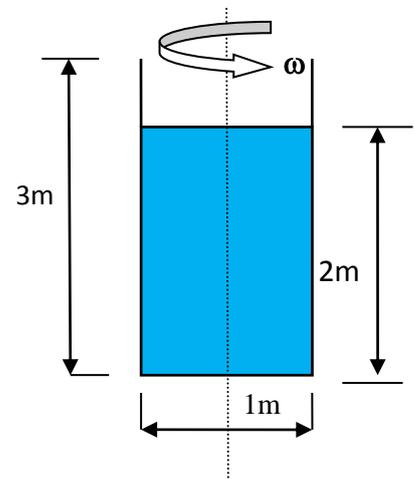
1) Calcul de ω . D'après l'équation des isobares, on a :

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + C$$

Au point O ($r=0$ et $z=0$) donc $C=0$; d'où :

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g} \quad \omega = \sqrt{\frac{2gz}{r^2}}$$

$$z = 2x \quad x = 3 - 2 = 1 \text{ m d'où } z = 2 \text{ m}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 2}{0.5^2}} \quad \underline{\omega = 12.65 \text{ rad/s}}$$

2) Calcul des pressions aux points A et B

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g} = \frac{0.5^2 \cdot 10^2}{29.81} = 1.25 \text{ m}$$

L'origine O s'abaisse de $z/2 = 1.25/2 = 0.625 \text{ m}$ et o se trouve à présent à $2 - 0.625 = 1.375 \text{ m}$ du fond du réservoir

$$p(r, z) = -\rho g z + \rho \frac{r^2 \omega^2}{2} + C \quad (r=0 ; z=0) \implies C=0$$

$$p_A = -\rho g z_A = -10^3 * 9.81(-1.375) = 13750 \text{ Pa}$$

Point A : $r=0$

$$p_B = -\rho g z_B + \rho \frac{r_B^2 \omega^2}{2} = -10^3 * 9.81(-1.375) + 10^3 \frac{0.5^2 \cdot 10^2}{2} = 26250 \text{ Pa}$$

Point B : $r=0.5 \text{ m}$

Chapitre 3 : Dynamique des fluides parfaits incompressibles

3.1. Introduction

La dynamique étudie les fluides en mouvement pour simplifier le problème, on néglige les frottements. Dans un liquide non visqueux ou parfait en mouvement, la pression a les mêmes propriétés que dans un liquide au repos.

On s'intéresse dans ce chapitre aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles à savoir :

L'équation de continuité (conservation de la masse)

Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie)

Le théorème d'Euler (Conservation de la quantité de mouvement)

3.2. Equations générales de la dynamique des fluides parfaits

Soit un cylindre élémentaire de fluide parfait qui se déplace. La démonstration se fait dans la direction des z ; pour les autres directions x et y elle se fait de façon analogue.

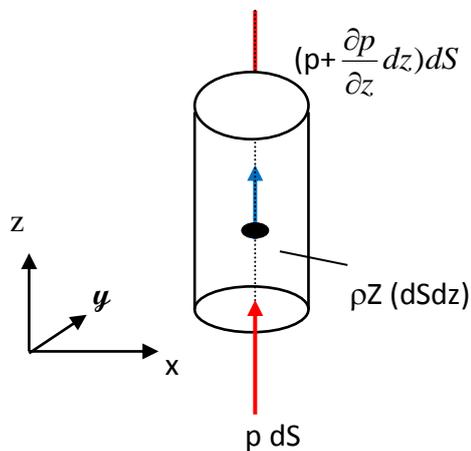


Figure (1.1) : Forces agissant sur un élément de volume ($dSdz$) dans la direction z

Les forces qui agissent sur cet élément de volume ($dSdz$) sont :

1. La force de volume : $\rho Z (dSdz)$
2. Les forces de pression : $p dS$ et $(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz) dS$
3. La force d'inertie (accélération) : $\rho \frac{dw}{dt} (dSdz)$

où w est la composante de la vitesse $\vec{V}(u, v, w)$ selon la direction z

Etant donné que la masse volumique reste constante, l'ensemble des forces satisfait à l'équation de Newton : $\vec{\Sigma F}_{\text{ext}} = \text{masse} \times \text{accélération}$

La condition d'équilibre des forces selon la direction des z s'écrit :

$$\cancel{p dS} - \cancel{\left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dS} + \cancel{\rho Z (dS dz)} = \rho \frac{dw}{dt} \cancel{(dS dz)}$$

ou par unité de volume : $-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z = \rho \frac{dw}{dt}$

On peut écrire de manière identique la condition d'équilibre des forces dans les autres directions, puis sous sa forme vectorielle.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{du}{dt} \\ \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{dv}{dt} \\ \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{dw}{dt} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw}{dt} \end{array} \right. \iff \boxed{\underbrace{\vec{\rho F}}_1 - \underbrace{\text{grad } p}_2 = \underbrace{\rho \frac{d\vec{V}}{dt}}_3} \quad (3.1)$$

1. Force de volume par volume unitaire
2. Force de pression par volume unitaire
3. Force d'inertie par volume unitaire

→ F est le vecteur de force de volume par unité de masse dont les trois composantes sont (X, Y, Z).
Les équations (3.1) sont appelées équations générales de la dynamique des fluides parfaits ou **équations d'Euler**

En introduisant les expressions des composantes de l'accélération pour un écoulement tridimensionnel, les équations (3.1) s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

3.3. Ecoulement permanent ou stationnaire

Un écoulement est dit permanent ou stationnaire lorsqu'en chaque point de l'espace, le vecteur vitesse \vec{V} varie indépendamment du temps.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

Dans le cas contraire, l'écoulement est dit non-permanent ou in stationnaire.

3.4. Equation de continuité

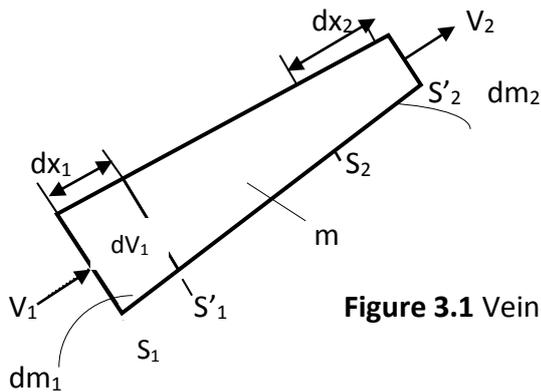


Figure 3.1 Veine de fluide parfait incompressible

Considérons une veine de fluide incompressible de masse volumique ρ animé d'un écoulement permanent (Fig.3.1). On désigne par :

S_1 et S_2 respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t
 S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t' ($t+dt$)
 V_1 et V_2 les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine
 dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt

dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1

dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2

m : masse comprise entre S_1 et S_2

dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1

dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à (dm_1+m)

A l'instant t' : le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(m+dm_2)$

La masse déplacée étant conservée, on écrit alors : $dm_1+m = m+dm_2$; soit $dm_1 = dm_2$

Alors : $\rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2$ ou encore : $\rho_1 S_1 dx_1 = \rho_2 S_2 dx_2$

En divisant par dt , on obtient :

$$\rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx_2}{dt} \iff \rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$$

Puisque le fluide est considéré comme incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; on obtient l'équation de continuité suivante :

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 \quad (3.3)$$

Cette relation représente le débit volumique Q exprimé en (m^3/s). L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse.

3.5. Notion de débit

3.5.1. Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport dm / dt quand dt tend vers zéro

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

Où :

q_m : masse de fluide par unité de temps traversant une section droite de la veine [kg/s]

dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt

dt : intervalle de temps en (s)

En tenant compte des équations précédentes, on obtient :

$$q_m = \rho \cdot S \cdot V$$

Ou encore :

$$q_m = \rho \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho \cdot S_2 \cdot V_2 \quad (3.4)$$

Compte tenu de la conservation de masse, on peut généraliser l'équation (3.4)

$$q_m = \rho \cdot S \cdot V \quad (3.5)$$

q_m : Débit massique (kg/s)

ρ : masse volumique (Kg/m^3)

S : section de la veine fluide (m^2)

V : vitesse moyenne du fluide à travers la section S (m/s)

3.5.2. Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport dV / dt quand dt tend vers zéro

$$q_v = \frac{dV}{dt}$$

Où :

q_v : volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite (m^3/s)

dV : volume élémentaire en (m^3) traversant une section S pendant un intervalle de temps dt

dt : intervalle de temps en secondes (s)

Relation entre le débit massique q_m et le débit volumique q_v :

$$q_v = \frac{q_m}{\rho} = \frac{\cancel{\rho} \cdot S \cdot V}{\cancel{\rho}} = S \cdot V$$

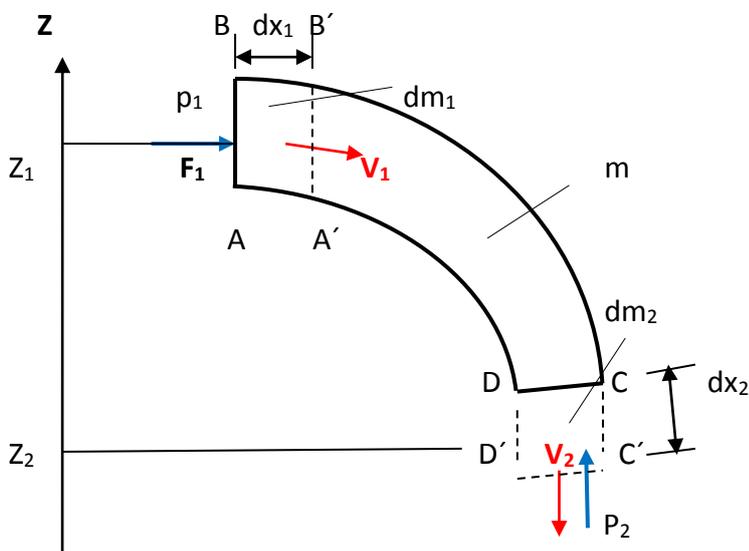
3.6. Théorème de Bernoulli (Conservation de l'énergie)

(a) Cas sans échange d'énergie

Hypothèses :

- Le fluide est parfait et incompressible
- L'écoulement est permanent
- L'écoulement est dans une conduite lisse

Application du théorème de l'énergie cinétique



La relation de Bernoulli est une équation de conservation de l'énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement.

A l'instant t : masse fluide ABCD et à l'instant $t+dt$: masse fluide A'B'C'D'

Théorème de l'énergie cinétique

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les instants t et t+dt. La variation de l'énergie cinétique ΔE_c est égale à la somme des travaux des forces extérieures (poids de l'élément fluide, forces de pression).

$$\Delta E_c = \sum W \vec{F}_{\text{ext}} \Rightarrow \frac{1}{2} dm (V_2^2 - V_1^2) = dm \cdot g (z_1 - z_2) + (p_1 S_1 dx_1 - p_2 S_2 dx_2)$$

$$= dm \cdot g (z_1 - z_2) + p_1 \underbrace{S_1 dx_1}_{dV_1} - p_2 \underbrace{S_2 dx_2}_{dV_2}$$

$$\frac{1}{2} dm (V_2^2 - V_1^2) = dm \cdot g (z_1 - z_2) + (p_1 dV_1 - p_2 dV_2)$$

$$dm = \rho dV \longrightarrow dV = \frac{dm}{\rho}$$

$$\frac{1}{2} dm (V_2^2 - V_1^2) = dm \cdot g (z_1 - z_2) + (p_1 dm_1 / \rho_1 - p_2 dm_2 / \rho_2)$$

$$dm_1 = dm_2 = dm$$

$$\text{Fluide incompressible: } \rho_1 = \rho_2 = \rho$$

$$\cancel{\frac{1}{2} dm (V_2^2 - V_1^2)} = \cancel{dm} \cdot g (z_1 - z_2) + \cancel{dm} (p_1 / \rho - p_2 / \rho)$$

$$\frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) = g (z_1 - z_2) + (p_1 / \rho - p_2 / \rho)$$

Formes de l'équation de Bernoulli

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g Z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g Z_2 \quad (\text{J/kg})$$

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g Z_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g Z_2 \quad (\text{Pa})$$

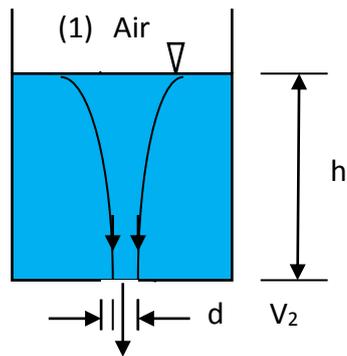
$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 \quad (\text{m})$$

$$(3.7)$$

3.7. Applications du théorème de Bernoulli

3.7.1. Formule de Torricelli

On considère un réservoir de grandes dimensions ouvert à l'atmosphère contenant un liquide de masse volumique ρ et percé d'un petit orifice à sa base à une hauteur h de la surface libre. ($S \gg s$)



On applique le théorème de Bernoulli entre deux points (1) et (2) d'une même ligne de courant (surface libre et la sortie de l'orifice).

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g Z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g Z_2$$

Hypothèses :

- $p_1 = p_2 = p_{atm}$
- $Z_2 = 0 ; Z_1 = h$ (plan de référence en 2)
- $S \gg s \implies V_2 \gg V_1$ donc $V_1 = 0$ (négligeable)

$$V_2 = \sqrt{2gh}$$

Formule de Torricelli (3.8)

V_2 est la vitesse théorique V_{th} , par conséquent le débit théorique du fluide recueilli à l'orifice de section S_2 , est donné par : $Q_{th} = V_{th} \cdot S_2$

$$Q_{th} = S_2 \cdot \sqrt{2gh}$$

En réalité à cause des frottements (solide/liquide), la vitesse est plus petite que la vitesse théorique. On écrit : $V_r = \varphi_1 \cdot V_{th}$

$$V_r = \varphi_1 \cdot \sqrt{2gh}$$

$$\varphi_1 = \frac{V_r}{V_{th}} \quad (3.9)$$

φ_1 : coefficient plus petit que 1 ($\varphi_1 < 1$), appelé coefficient de vitesse

La section du fluide à la sortie de l'orifice est : $S_r = \varphi_2 S_{th}$,

$$\varphi_2 = \frac{S_r}{S_{th}} \quad (3.10)$$

φ_2 : coefficient plus petit que 1 ($\varphi_2 < 1$), appelé coefficient de contraction de section.

Donc le débit réel à la sortie de l'orifice est donc :

$$Q_r = S_r \cdot V_r = \varphi_2 \cdot S_{th} \cdot \varphi_1 \cdot \sqrt{2gh} = \alpha S_{th} \cdot \sqrt{2gh} = \alpha \cdot Q_{th}$$

$$\alpha = \frac{Q_r}{Q_{th}} \quad (3.11)$$

α : coefficient plus petit que 1 ; $\alpha = \varphi_1 \cdot \varphi_2$, appelé coefficient de débit.

3.7.2. Calcul du temps de vidange

A un instant t donné, on a :

$$Q_{v_r} = -\frac{dV}{dt} = \alpha S_{th} \sqrt{2gz}$$

$$dt = -\frac{dV}{\alpha S_{th} \sqrt{2gz}} = -\frac{S(z)dz}{\alpha S_{th} \sqrt{2gz}}$$

Si le réservoir est de section constante : $S(z) = S$

$$t = -\int \frac{dV}{\alpha S_{th} \sqrt{2gz}} = -\int_0^h \frac{Sdz}{\alpha S_{th} \sqrt{2gz}}$$

D'où le temps de vidange total

$$t = \frac{2Sh}{\alpha S_{th} \sqrt{2gz}} \quad (3.12)$$

$S \cdot h$: représente le volume initial (V_0) contenu dans le réservoir

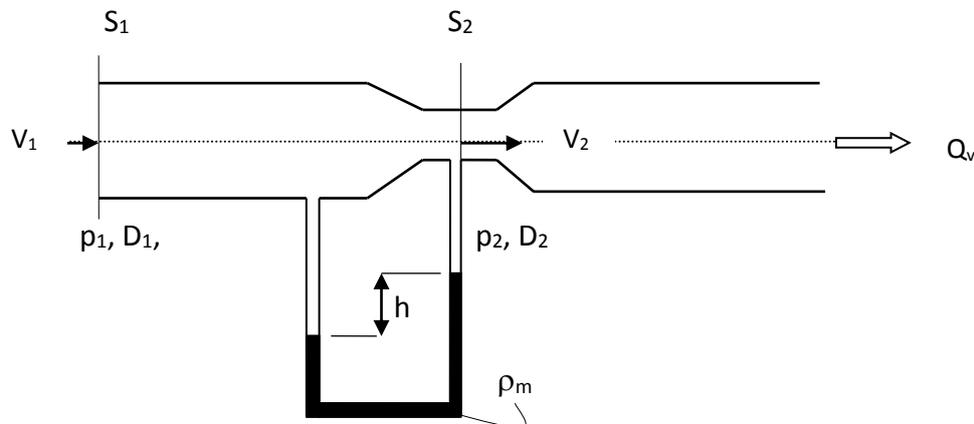
$\alpha S_{th} \sqrt{2gz}$: représente le débit en volume initial (Q_{v_0}) au débit de l'expérience, on peut mettre t sous la forme :

$$t = \frac{2V_0}{Q_{v_0}} \quad (3.13)$$

3.7.3. Tube de Venturi

Un venturi est un étranglement de conduit, limité par les sections S_1 et S_2 où les pressions sont respectivement p_1 et p_2 . Un tel appareil permet de mesurer le débit volumique d'un

fluide. La vitesse du fluide circulant dans la conduite augmente dans l'étranglement et sa pression diminue. $V_2 > V_1$ $p_2 < p_1$



On appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les deux points (1) et (2), on obtient :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Ici $z_1 = z_2$ (écoulement horizontal) et l'équation de continuité permet d'écrire :

$$Q_v = S_1 V_1 = S_2 V_2 \iff V_2 = S_1 \frac{V_1}{S_2}$$

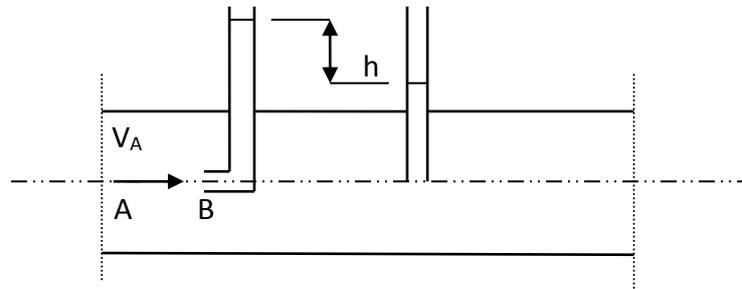
$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] = \frac{V_1^2}{2g} \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right]$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{V_1^2}{2} \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right] \quad (3.14)$$

S_1 et S_2 sont connues (caractéristiques du venturi), p_1 et p_2 sont données par les hauteurs du liquide manométrique dans le manomètre, on détermine donc la vitesse V_1 .

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right]}} \quad (3.15)$$

3.7.4 Tube de Pitot



Le tube de Pitot sert à mesurer la vitesse locale d'un fluide en le reliant à la différence de pression d'un manomètre à liquide. On considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu'il soit parallèle aux lignes de courant. A son embouchure, le fluide peut pénétrer. Une fois qu'il a occupé tout l'espace disponible au sein du tube, il n'y a plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure du tube, est donc nulle. On l'appelle un point d'arrêt de la ligne de courant.

Considérons une ligne de courant A-B.

En A, on a $p = p_A$ (par exemple une pression hydrostatique), $V = V_A = V_\infty$, et $z = z_A$

En B, on a $p = p_B$, $V_B = 0$, et $z = z_A = z_B$

Le théorème de Bernoulli donne donc : $p_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 + \cancel{\rho g z_A} = p_B + \frac{1}{2} \rho V_B^2 + \cancel{\rho g z_B}$ =0 -

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_B - p_A)} \quad (3.16)$$

Comme la différence de pression ($p_B - p_A$) peut être déterminée si on utilise un manomètre (tube en U), on peut déduire la vitesse V_∞

De l'hydrostatique, on a : $(p_B - p_A) = \rho g h$, ce qui donne :

$$V_\infty = \sqrt{2gh}$$

3.8. Théorème de Bernoulli (Conservation de l'énergie)

(b) Cas avec échange d'énergie

Il est assez fréquent, dans les installations industrielles, qu'un appareil hydromécanique, placé dans une veine fluide, permette une transformation d'énergie mécanique en énergie hydraulique (une pompe par exemple) ou inversement (une turbine).

Appelons W_i l'énergie massique transférée en (J/kg)

W_{m1} : représente la densité énergétique à l'entrée de la veine

W_{m2} : représente la densité énergétique à la sortie.

3.9. Applications

Exercice 1 :

Soit un fluide supposé incompressible (eau) qui s'écoule à travers un tube de venturi représenté par la figure 1.

Données : $\rho_m = 13.6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$ $V_1 = 6 \text{ m/s}$ $D_1 = 25 \text{ cm}$

-On demande de calculer le diamètre D_2 si $p_1 = p_2$

-Si cette pression (p_2) est de 12 N/cm^2 , quelle est la valeur de Δh ?

Solution

Exercice 2 :

Un tube de venturi est disposé sur une conduite d'eau incliné. Les tubes de liaison au manomètre sont remplis d'eau.

- 1) Calculer la dénivellation Δh du manomètre en fonction de V_1 , S_1 , S_2 , ρ_{eau} , ρ_m
- 2) Calculer le débit volumique si $\Delta h = 90 \text{ mm}$ et $D_1 = 200 \text{ mm}$ et $D_2 = 90 \text{ mm}$

Solution

- 1) On applique le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$Q_v = S_1 V_1 = S_2 V_2 \quad \iff \quad V_2 = S_1 \frac{V_1}{S_2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) = \frac{V_1^2}{2g} \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] + (z_2 - z_1) = \frac{V_1^2}{2g} \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right] + (z_2 - z_1)$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{V_1^2}{2} \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right] + \rho g (z_2 - z_1) \quad \dots\dots\dots (3)$$

Equation de l'hydrostatique :

$$\left. \begin{aligned} p_N &= p_1 + \rho_e g (z + L + \Delta h) \\ p_{N'} &= p_2 + \rho_e g L + \rho_m g \Delta h \end{aligned} \right\} \iff p_1 - p_2 = -\rho_e g z + g \Delta h (\rho_m - \rho_e) \dots \dots \dots (4)$$

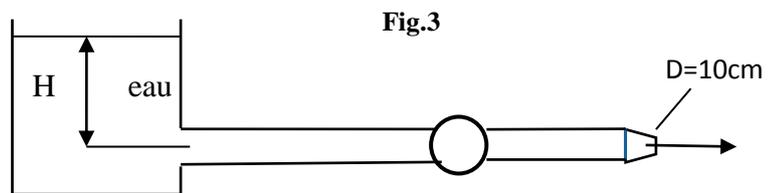
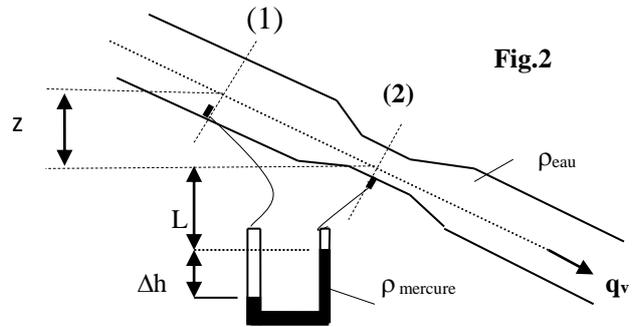
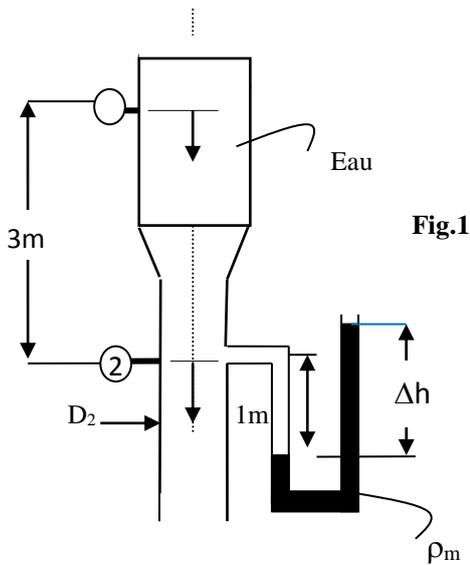
$$\Delta h = \frac{\rho v_1^2 \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right]}{2g(\rho_m - \rho_e)} \qquad V_1^2 = \frac{2g\Delta h(\rho_m - \rho_e)}{\rho_e \left[(D_1/D_2)^4 - 1 \right]}$$

$$V_1 = \underline{0.96 \text{ m/s}} \qquad \text{d'où } q_v = S_1 \cdot V_1 = \underline{0.03 \text{ m}^3/\text{s}}$$

Exercice 3 :

Un réservoir de très grandes dimensions alimente une turbine T (Fig.2) de puissance 15 kW à travers une conduite qui se termine par une tuyère de diamètre $D = 10\text{cm}$. Le débit d'eau transporté est de 85 litres par seconde, on demande de calculer la hauteur d'eau H dans le réservoir.

Solution



Chapitre 4 : Dynamique des fluides réels incompressibles

4.1. Écoulement laminaire et turbulent

La science de la turbulence a commencé vers la fin du XIX^e siècle quand l'anglais Osborne Reynolds a pu observer la transition du régime laminaire au régime turbulent. Dans un tuyau, si l'eau passe lentement, on aura des filets bien réguliers c'est-à-dire un écoulement laminaire. Si cette eau va trop vite, il apparaît un très grand nombre de tourbillons et les pertes de charges dans le tuyau vont être très différentes.

4.1.1. Régimes d'écoulement

Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit de la manière suivante :

$$\mathbf{Re} = \frac{V.D.\rho}{\mu} = \frac{V.D}{\nu} \quad (4.1)$$

Avec :

D : Diamètre intérieur de la conduite en (m)

V : Vitesse moyenne d'écoulement en (m/s)

ρ : Masse volumique du fluide en (kg/m³)

μ : Viscosité dynamique en (Pa.s)

ν : Viscosité cinématique en (m²/s)

En fonction des nombres de Reynolds croissants, on distingue quatre régimes principaux : régime de Stokes, régime laminaire, régime transitoire, régime turbulent.

L'écoulement de Stokes correspond aux très faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 1). Dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent. Cette notion correspond au domaine de la micro fluidique. Pour des valeurs plus élevées, les forces d'inertie entrent en jeu : c'est le domaine de la dynamique des fluides.

On observe d'abord un écoulement laminaire avec des lignes de courant bien identifiées. Dans ce type d'écoulement l'effet de la viscosité s'atténue au fur et à mesure que l'on s'éloigne des parois, les vitesses du fluide tendant à s'homogénéiser. Il est alors souvent commode de considérer que l'approximation du fluide parfait (non visqueux) est suffisante hors d'une zone proche d'une paroi, appelée couche limite.

À partir d'un certain Reynolds se produit une transition qui fait apparaître des instabilités dues à l'amplification des perturbations. La valeur du Reynolds de transition et la nature des instabilités dépendent essentiellement du type d'écoulement considéré.

Ensuite, les instabilités augmentent au point de donner naissance à un phénomène chaotique dans lequel il est difficile de voir une organisation : c'est la turbulence

Soit un courant d'eau qui circule dans une conduite à section circulaire. On introduit un filet de colorant dans l'axe de cette conduite. Suivant la vitesse d'écoulement de l'eau, on peut observer les phénomènes suivants :

- a) Régime laminaire :** le fluide s'écoule en couches cylindriques coaxiales ayant pour axe le centre de la conduite.
- b) Régime transitoire :** c'est une transition entre le régime laminaire et le régime turbulent.
- c) Régime turbulent :** Formation de mouvement tourbillonnant dans le fluide. Cette expérience est faite par Reynolds en faisant varier le diamètre de la conduite, la température, le débit, etc... pour divers fluides.

- Si $Re < 2000$, le régime est Laminaire.
- Si $Re > 3000$, le régime est turbulent.
- Si $2000 < Re < 3000$, le régime est transitoire.

4.1.2. Signification physique du nombre de Reynolds «Re »

Le fluide est globalement soumis à 2 forces :

- Celle que subirait le fluide s'il était parfait :

$$F_{\text{inertie}} = m \cdot a = \rho V \cdot \frac{dv}{dt} \quad (4.2)$$

- Celle qui résulte des frottements

$$F_{\text{frot}} = \mu \cdot S \cdot \frac{dv}{dx} \quad (4.3)$$

- Le rapport de ces deux forces $\frac{F_{\text{inertie}}}{F_{\text{frot}}} = \text{Re}$ (4.4)

Ainsi, si Re est très grand, il y a prédominance des forces d'inertie, par contre, aux faibles valeurs, c'est la force de frottement qui domine

La distribution des vitesses est une « parabole aplatie » :

$$0,75 \leq v_{\text{moy}} \leq 0,85 \cdot v_{\text{max}}$$

Les particules circulent dans toutes les directions (=aléatoire).

La variation de quantité de mouvement est prépondérante.

Au voisinage de la paroi, l'écoulement est laminaire : couche limite.

Le régime turbulent est le plus fréquemment rencontré : il est permanent en moyenne.

4.1.3. Théorème de BERNOULLI pour fluides réels

Lorsque le fluide est réel, la viscosité est non nulle, alors au cours du déplacement du fluide, les différentes couches frottent les unes contre les autres et contre la paroi qui n'est pas parfaitement lisse d'où il y a une perte sous forme de dégagement d'énergie ; cette perte appelée « perte de charge ».

La relation de Bernoulli peut s'écrire sous la forme :

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + \Delta H_{1,2} \quad (4.5)$$

$\Delta H_{1,2}$: C'est l'ensemble des pertes de charge entre (1) et (2) exprimée en hauteur.

Les pertes de charge peuvent être exprimées en pression :

$$\Delta p_{1,2} = \rho \cdot g \cdot \Delta H_{1,2} \quad (4.6)$$

4.1.4. Ecoulement de Poiseuille

Nous adoptons les hypothèses simplificatrices suivantes :

Fluide incompressible

Ecoulement laminaire

Symétrie de révolution autour de l'axe $r = 0$

Ecoulement permanent

Ecoulement induit par gradient de pression constant ΔP établi entre l'entrée et la sortie de la conduite de longueur L .

4. 1.5. Répartition des vitesses à l'intérieur d'une conduite

Soit l'axe (ox) confondu avec l'axe d'une conduite de diamètre $D=2r_0$, (oy) et (oz) sont quelconques perpendiculaire à (ox) . Figure (4.5)

L'écoulement étant laminaire, les lignes de courant sont, par raison de symétrie parallèle à (ox) . Les composantes v et w de la vitesse sont nulles : $v = w = 0$; ainsi l'écoulement étant aussi stationnaire.

Par suite la répartition de la vitesse à l'intérieur du cylindre est donnée par l'expression suivante :

$$u(r) = \frac{a}{4\mu} (R^2 - r^2)$$

En posant $r = 0$ on trouve

$$u = \frac{aR^2}{4\mu} = u_{\max} \quad (4.7)$$

Expression qui représente un parabolode de révolution ayant son sommet sur l'axe De la conduite. Figure (4.6).

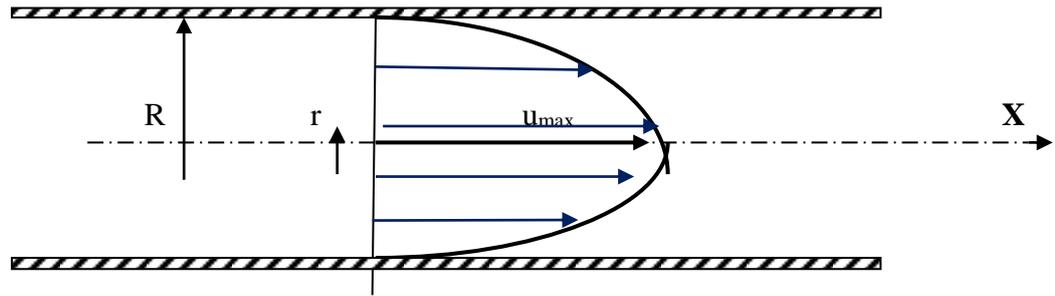


Figure (4.5) : Répartition des vitesses dans la conduite.

De même on peut déterminer la répartition des pressions le long du tube :

On a
$$\frac{dP_m}{dx} = -a \quad (4.8)$$

Soit :
$$p^*(x) = -ax + p_0^*$$

p_0^* : Étant une constante d'intégration.

La pression motrice décroît donc linéairement le long du tube, tout en restant constante dans une même section droite.

On peut écrire : $p_1^* - p_2^* = aL$

L : La distance entre les deux points 1 et 2 sur lesquels s'exerce la pression

$\Delta p_m = p_{m1} - p_{m2}$ est la différence de pression motrice entre l'entrée et la sortie.

Ou encore :
$$a = \frac{\Delta P_m}{L} \quad (4.9)$$

4.1.6. Calcul du débit volumique:

Le débit du fluide est donné par l'intégrale (débit en volume)

$$q_v = \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{2\pi a}{4\mu} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi a R^4}{8\mu} = \frac{\pi a D^4}{128\mu}$$

En remplaçant **a** par sa valeur $a = \frac{\Delta p_m}{L}$, il vient :

$$\boxed{q_v = \frac{\pi R^4}{8\mu L} \Delta P_m = \frac{\pi D^4}{128\mu L} \Delta P_m} \quad (4.10)$$

Cette dernière formule traduit la loi de Hagen Poiseuille : le débit est proportionnel à la différence des pressions motrices appliquées aux extrémités du tube, et à la puissance 4 de son diamètre.

4.1.7. Vitesse débitante (vitesse moyenne):

La vitesse débitante est par définition la vitesse moyenne calculée sur la section droite,

c'est donc :
$$u_{moy} = \frac{q_v}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{\pi a R^4}{8\mu}$$

Soit :
$$\boxed{u_{moy} = \frac{aR^2}{8\mu} = \frac{u_{max}}{2}}$$
 (4.11)

La vitesse maximale de l'écoulement laminaire dans un tube circulaire est exactement le double de la vitesse débitante.

4.1.9. Coefficient de perte de charge

Dans le cas de l'écoulement permanent d'un fluide dans une conduite cylindrique la perte de pression motrice est proportionnelle à la longueur de la conduite considérée. Il est donc naturel d'introduire un coefficient de perte de pression linéique tel que λ .

Des considérations dimensionnelles amènent à écrire la différence de pression traduisant la perte de charge dans une conduite cylindrique sous la forme générale :

$$\Delta P_m / L = \lambda \frac{1}{D} \rho \frac{u_m^2}{2} \quad (4.12)$$

λ : est un coefficient sans dimension, appelé coefficient de perte de charge linéaire.

4.1.10. Pertes de charge

Elles dépendent de :

- La viscosité du fluide.
- La nature de l'écoulement.
- La géométrie de la conduite.

Les pertes de charge sont à l'origine :

➤ Des frottements entre les différentes couches de liquide et des frottements entre le liquide et la paroi interne de la conduite le long de l'écoulement : ce sont les pertes de charge régulières (linéaires)

➤ De la résistance à l'écoulement provoqués par les accidents de parcours (vannes, coudes, etc...) ; ce sont les pertes de charge singulières ou locales.

➤

a). Pertes de charge régulières :

Soit un écoulement permanent d'un liquide dans une conduite de diamètre D. La perte de charge entre deux points séparés d'une longueur L est de la forme :

$$\Delta H_r = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (4.13)$$

Avec :

V : vitesse moyenne du fluide (m/s)

λ : Coefficient de perte de charge régulière.

L : longueur totale de la conduite (m)

D ; Diamètre intérieur de la conduite (m)

Pour déterminer le coefficient de perte de charge régulière **λ**, on fait souvent appel à des formules empiriques tel que :

Si l'écoulement est laminaire, on applique la loi de Poiseuille : $\lambda = \frac{64}{Re}$

✓ Si l'écoulement est turbulent, on a deux cas :

1. Turbulent lisse : $Re < 10^5$, on applique la loi de Blasius : $\lambda = 0,316 \cdot Re^{-1/4}$

2. Turbulent rugueux : $Re > 10^5$, on a la loi de Blench : $\lambda = 0.79 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$

ε : hauteur moyenne des aspérités (mm). En pratique pour les tubes en acier soudé :
 $\varepsilon \in [0.15; 0.20]$

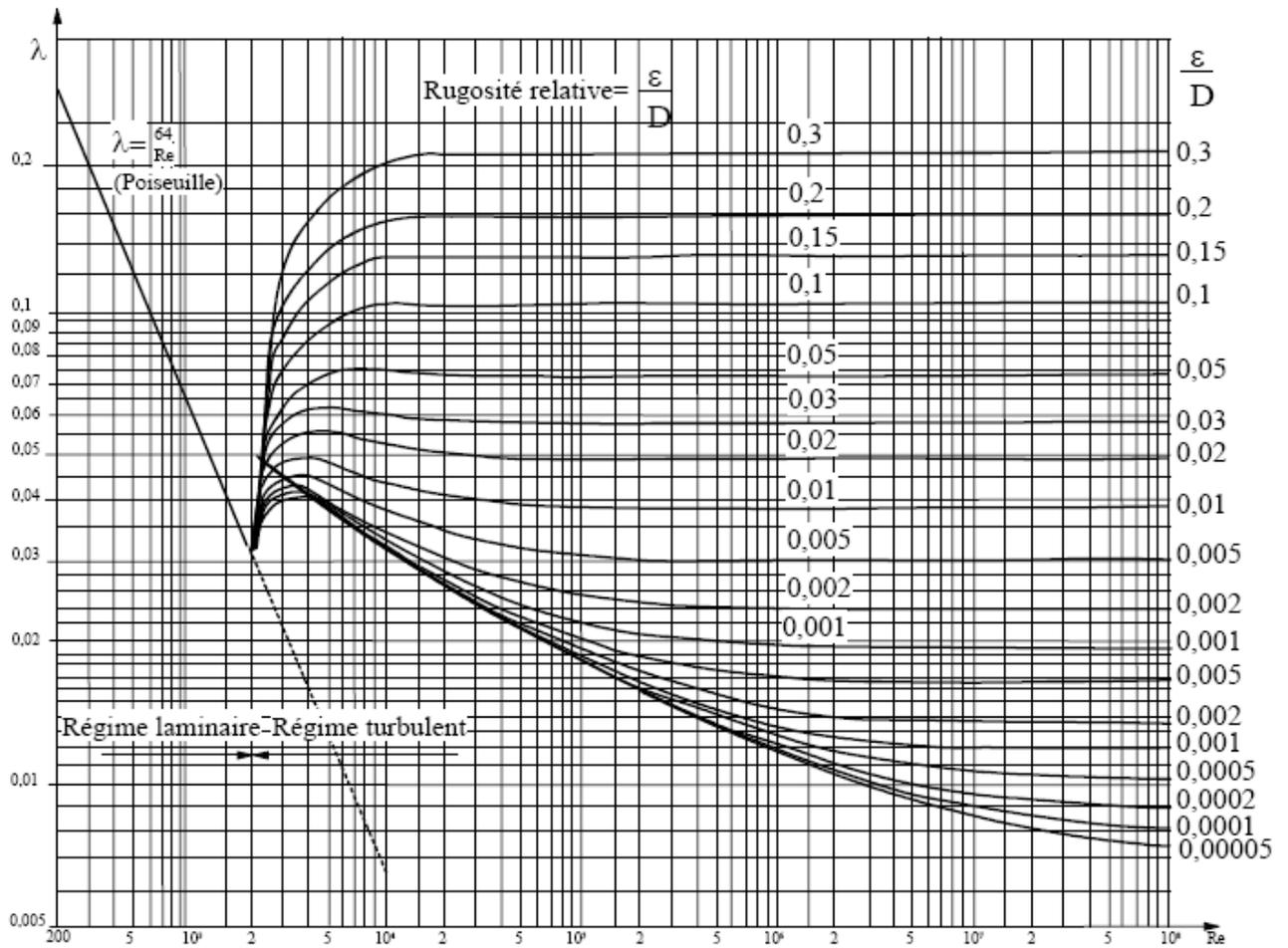


Figure (4.7) : Diagramme de *Moody*

b. Pertes de charge singulières :

Les pertes de charge singulières sont essentiellement dues aux accidents de canalisation c'est à dire toute modification d'un trajet rectiligne.

Dans tous les cas ci-après, il résulte du passage du liquide au point singulier une perte

de charge donnée par la formule :

$$\Delta H_s = \sum K_i \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (4.14)$$

$\sum K_i$: Coefficients sans dimension dépendant de la nature du point singulier dont il s'agit.

Applications :

Exercice 1 : Du pétrole de viscosité $\mu=0.11$ Pa.s et de densité 0.9 circule dans une conduite de longueur 1650m et de diamètre 25cm à un débit volumique 19.7 l/s.

Déterminer la viscosité cinématique du pétrole dans le système SI et le système CGS

Calculer la vitesse de l'écoulement et le débit massique

Calculer le nombre de Reynolds et en déduire la nature de l'écoulement

Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire et calculer la perte de charge dans la conduite

Solution

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \nu = \frac{0.11}{900} = 1.22 * 10^{-4} m^2 / s = 1.22 St$$

$$V = \frac{4 * 19.7 * 10^{-3}}{\pi(0.25)^2} = 0.40 \text{ m/s}$$

$$q_m = \rho * q_v = 0.9 * 19.7 = 17.73 \text{ kg/s}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.4 * 0.25}{1.22 * 10^{-4}} = 820$$

Puisque $Re < Re_c$ (2000) donc le régime est laminaire et $\lambda = 64/Re = 64/820 = 0.078$

$$\Delta H = \lambda \frac{LV^2}{2gD} = 0.078 \frac{1650 * (0.40)^2}{2 * 9.81 * 0.25} = 4.2m$$

Exercice 2 : Déterminer la vitesse critique de l'écoulement de deux fluides dans une conduite de diamètre 15 cm (on suppose pour les deux cas que l'écoulement est laminaire $Re = 2000$)

Du pétrole de viscosité 1.42 cSt

De l'eau de viscosité 1.16 cPo

Solution

$$Re_c = \frac{V_c D}{\nu} \quad V_c = \frac{\nu Re_c}{D} \quad V_c = \frac{1.42 * 10^{-6} * 2000}{0.15} = 0.019 m/s$$

$$Re_c = \frac{V_c D \rho}{\mu} \quad V_c = \frac{Re_c \mu}{D \rho} \quad V_c = \frac{2000 * 1.16 * 10^{-3}}{0.15 * 1000} = 0.015 m/s$$

Exercice 3 : Déterminer la perte de charge et la perte de pression d'une huile de densité 0.8 et de viscosité 9 cSt s'écoulant dans une conduite de 20 cm de diamètre et de rugosité absolue $\varepsilon = 0.25$ mm et de longueur 300m si le débit est de 120 litres par seconde.

Solution

$$\Delta H = \lambda \frac{LV^2}{2gD} \quad V = \frac{4qv}{\pi D^2} = \frac{4 * 0.12}{\pi(0.2)^2} = 3.82 m/s$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{3.82 * 0.2}{9 * 10^{-6}} = 8.5 * 10^4 \quad Re > 2000 \text{ donc le régime est turbulent}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} &= 8.5 \cdot 10^4 \\ \varepsilon/D &= 0.25/200 = 1.25 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \right\} \implies \lambda = 0.019$$

$$\Delta H = \lambda \frac{LV^2}{2gD} = 0.019 \frac{300 \cdot (3.82)^2}{2 \cdot 9.81 \cdot 0.2} = 21.20 \text{ m}$$

$$\Delta p = \rho g \Delta H = 800 \cdot 9.81 \cdot 21.20 = 166377.6 \text{ Pa} = 166.38 \text{ kPa}$$

Exercice 4 : Une conduite constituée de deux tronçons (fig.3) de diamètres et de longueurs différentes transportant une huile de masse volumique $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$ et de viscosité cinématique $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Calculer la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite sachant que :

$$L_1 = 5 \text{ m} \quad L_2 = 0.2 \text{ m} \quad D_1 = 20 \text{ mm} \quad D_2 = 5 \text{ mm} \quad V_1 = 0.5 \text{ m/s} \quad K_c = 0$$

Solution

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{V_1^2}{2} \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right] + \cancel{\rho g(z_2 - z_1)} + \rho g \Delta H_{12}$$

$$\Delta H_{12} = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

$$\Delta H_1 = \lambda_1 \frac{L_1 V_1^2}{2gD_1}$$

$$\Delta H_2 = \lambda_2 \frac{L_2 V_2^2}{2gD_2}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{V_1 D_1}{\nu} = \frac{0.5 \cdot 0.02}{10^{-5}} = 1000$$

$$\text{Re}_2 = \frac{V_2 D_2}{\nu} = \frac{8 \cdot 0.005}{10^{-5}} = 4000$$

$$V_2 = V_1 \frac{S_1}{S_2} = V_1 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 = 0.5 \left(\frac{20}{5} \right)^2 = 8 \text{ m/s}$$

$\text{Re}_1 < 2000$, donc régime laminaire

$\text{Re}_2 > 2000$, donc régime turbulent

$$\lambda_1 = \frac{64}{\text{Re}_1} = \frac{64}{1000} = 0.064$$

$$\lambda_2 = 0.316 \cdot (\text{Re})^{-1/4} = 0.0397$$

$$\Delta H_{12} = \lambda_1 \frac{L_1 V_1^2}{2gD_1} + \lambda_2 \frac{L_2 V_2^2}{2gD_2} = 0.20 + 5.18 = 5.38 \text{ m}$$

AN :

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{V_1^2}{2} \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right] + \rho g \Delta H_{12} = 850 \frac{(0.5)^2}{2} \left[\left(\frac{20}{5} \right)^4 - 1 \right] + 850 \cdot 9.81 \cdot 5.38 = 71991 \text{ Pa}$$

Exercice 5 : Soit un tuyau hydrauliquement rugueux (fig.4). La perte de charge du convergent est négligeable ($K_3=0$) par rapport aux pertes dues à l'entrée et aux coudes. On demande de calculer le débit en volume sachant que :

$$H=20\text{m} \quad D_1=0.2\text{m} \quad D_2=0.1\text{m} \quad L=300\text{m} \quad K_1=0.08 \quad K_2=0.25 \quad v=1.3 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s} \quad \varepsilon=0.8\text{mm}$$

Exercice 6 : Un jet d'eau est alimenté à parti d'un réservoir de grandes dimensions au moyen d'une pompe centrifuge de débit volumique de 2 litres par seconde, à travers une conduite de longueur 15m et de diamètre intérieur de 3cm. La conduite présente un coude de 90° ($K_c=0.3$), $\mu_{\text{eau}} = 10^{-3}$ Pas

- 1) Calculer la vitesse de l'écoulement
- 2) Calculer le nombre de Reynolds et préciser la nature de l'écoulement
- 3) Calculer le coefficient de perte de charge
- 4) Calculer la perte de charge totale dans le circuit
- 5) Calculer la puissance nette de la pompe
- 6) En déduire la puissance absorbée (P_a) par la pompe sachant que son rendement est de 75%

Solution

- 1) Calcul de la vitesse : V

$$V = \frac{4qv}{\pi D^2} = \frac{4 * 2 * 10^{-3}}{\pi (0.03)^2} = 2.83 \text{m/s}$$

- 2) Calcul du nombre de Reynolds : Re

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{2.83 * 0.03 * 10^3}{10^{-3}} = 84900 \quad 2000 < Re < 10^5 \quad \text{régime turbulent lisse}$$

- 3) Coefficient de perte de charge : λ

Formule de Blasius : $\lambda = 0,316. (Re)^{-1/4} \quad \lambda = 0,316. (84900)^{-1/4} = 0.018$

- 4) Perte de charge linéaire :

$$J_L = \lambda \frac{LV^2}{2D} = 0.08 \frac{15 * (2.83)^2}{2 * 0.03} = 36 \text{J/kg}$$

Perte de charge singulière :

$$J_S = Kc \frac{V^2}{2} = 0.3 \frac{(2.83)^2}{2} = 1.2 \text{J/kg}$$

$$\left. \begin{array}{l} J_L = 36 \text{J/kg} \\ J_S = 1.2 \text{J/kg} \end{array} \right\} J_T = J_L + J_S = 37.2 \text{J/kg}$$

- 5) Calcule de la puissance nette : P_n

$$\cancel{\frac{p_2 - p_1}{\rho}} + \cancel{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}} + g(z_2 - z_1) = \frac{P_n}{\rho q_v} - J_T \quad \text{Puisque } V_1=V_2 \text{ et } p_1=p_2=p_{\text{atm}}$$

$$P_n = \rho q_v [g(z_2 - z_1) - J_T] = 10^3 * 2 * 10^{-3} [9.81(10 - 3) + 37.2] = 211.74 \text{W}$$

- 6) Calcul de la puissance absorbée : P_a

$$P_a = \frac{P_n}{\eta} = \frac{211.74}{0.75} = 282.3 \text{W}$$

Fig.4

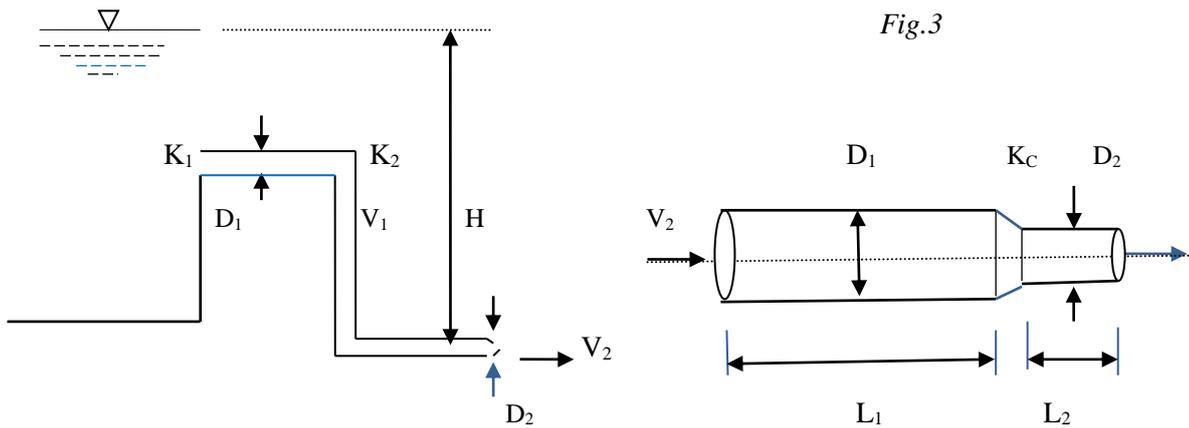


Fig.3

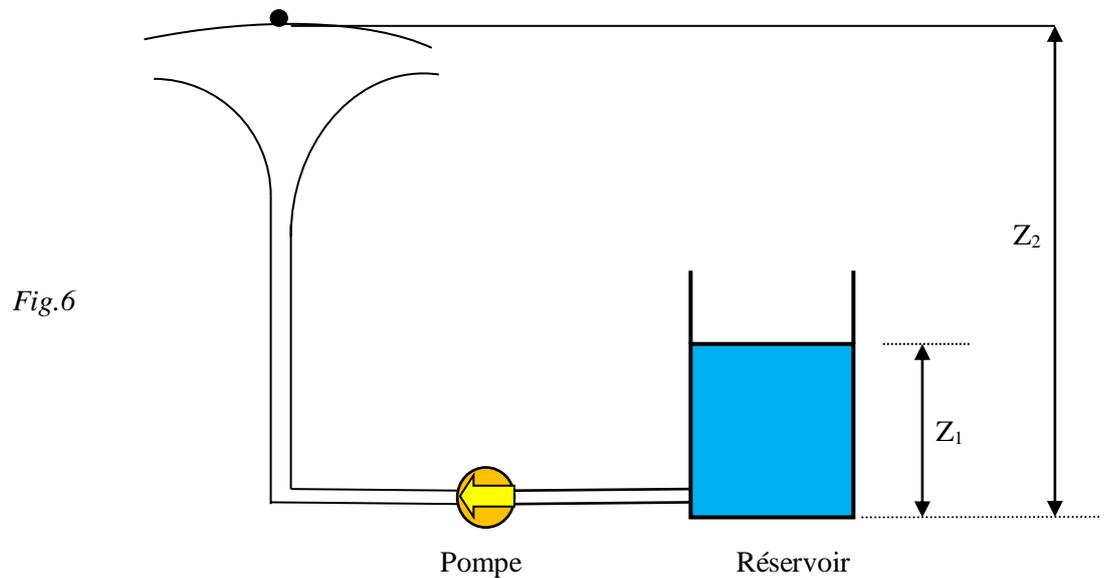


Fig.6

Références bibliographiques

1. Candel S. Mécanique des fluides, Dunod, 1990
2. Comolet R. Mécanique expérimentales des fluides, Vol.1, 2 et 3, Masson, 1981
3. Ouziaux R., Perrier J. Mécanique des fluides appliquée, Dunod, paris, 1998
4. Nekrassov B. Cours d'hydraulique, éditions Mir, 1967
5. Lumbroso H. Problèmes résolus de mécanique des fluides, Dunod, 1989
6. Carlier M. Hydraulique générale et appliquée, éditions Eyrolles, Paris, 1986
7. Padet J. Fluides en écoulement, Masson, 1991
8. Douglas J.F. Solution of problems in fluid mechanics, Pitman, 1985
9. Youcefi A. Cours et Travaux Dirigés de mécanique des fluides, USTO-MB, 2016
10. Loukarfi L. Exercices résolus de mécanique des fluides, Dar El Oumma, 1999